คู่มือการใช้งาน Symbolic Toolbox

สารบัญ

คู่มือการใช้งาน Symbolic Toolbox

ผศ.ดร.ปิยะ โควินท์ทวีวัฒน์
มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

Symbolic toolbox เป็นเครื่องมือที่ช่วยทำให้สามารถทำการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ได้ เช่น สามารถหาค่าอนุพันธ์, ปริพันธ์, ผลรวมของอนุกรม, ลิมิต และอื่นๆ ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของตัวแปรได้

โดยทั่วไปโปรแกรม SCILAB ไม่ได้ติดตั้ง Symbolic toolbox มาให้ ดังนั้นถ้าผู้ใช้ต้องการใช้งาน Symbolic toolbox ให้ทำการติดตั้งซอฟต์แวร์ต่างๆ ดังนี้ (เป็น Freeware ทั้งหมด)

1. **โปรแกรม PERL** เวอร์ชัน 5.10.0.5 (ใช้ติดต่อระหว่าง SCILAB และ MAXIMA)
2. **โปรแกรม MAXIMA** เวอร์ชัน 5.9.3 (ใช้ในการคำนวณเชิงสัญลักษณ์)
3. **มอดูล Symbolic toolbox** (มีฟังก์ชันมากมายที่ใช้ในการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ของ SCILAB)
4. **มอดูล Overloading** (ช่วยทำให้สามารถเรียกใช้งานคำสั่งต่างๆ ในรูปแบบที่ง่ายได้)

หมายเหตุ ในคู่มือนี้ได้ทำการทดลองกับโปรแกรม **SCILAB 4.1.2** บนระบบปฏิบัติการ **Windows XP** เท่านั้น นอกจากนี้ถ้าผู้ใช้ติดตั้งโปรแกรม PERL, MAXIMA, มอดูล Overloading, และมอดูล Symbolic toolbox เวอร์ชันอื่น (นอกเหนือจากที่ให้มานี้) อาจจะทำให้ไม่สามารถใช้งานเครื่องมือ Symbolic toolbox ได้ เนื่องจากโปรแกรมเวอร์ชันใหม่ๆ อาจมีการเปลี่ยนแปลงแก้ไขข้อมูลบางอย่าง (เช่น เปลี่ยนคำสั่งที่ใช้ในการติดต่อสื่อสาร) ซึ่งจะทำให้โปรแกรม SCILAB ไม่สามารถเรียกใช้งาน Symbolic toolbox ได้

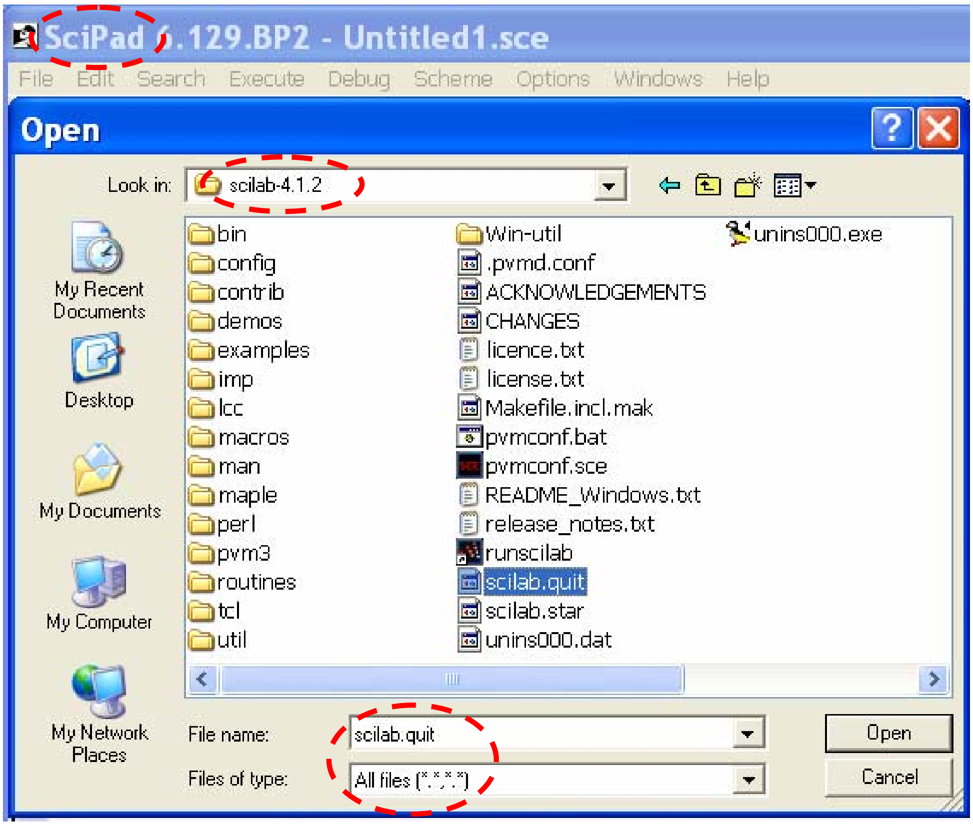
1. ขั้นตอนการติดตั้ง Symbolic Toolbox

การติดตั้ง Symbolic toolbox ในโปรแกรม SCILAB สามารถทำได้ดังนี้

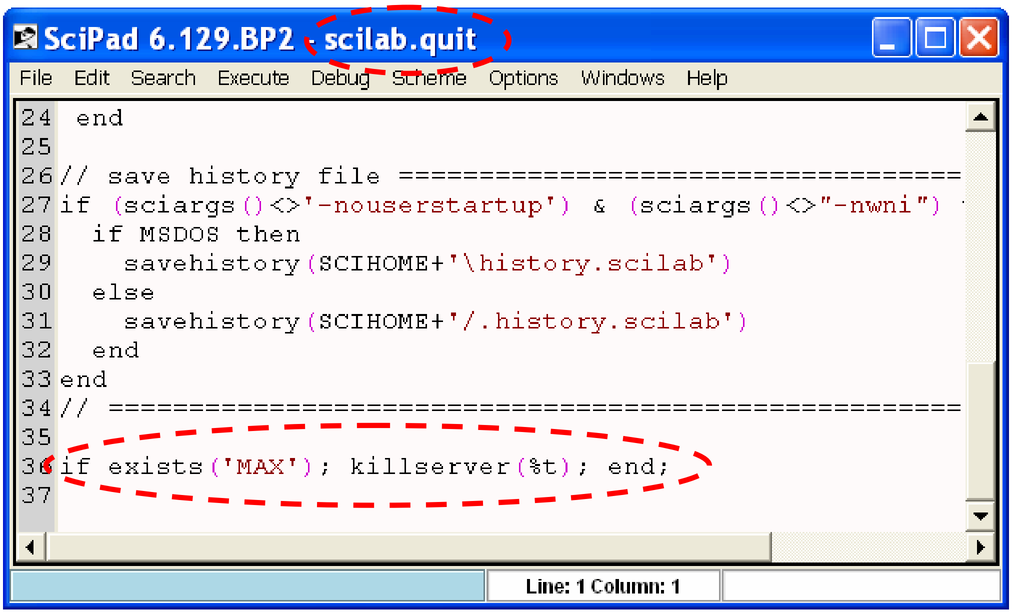
1) ติดตั้งโปรแกรม PERL (strawberry-perl-5.10.0.5) ในไดร์ฟ C:\
2) ติดตั้งโปรแกรม MAXIMA (maxima-5.9.3) ในไดร์ฟ C:\
3) เปิดเอดิเตอร์ SciPad ขึ้นมา แล้วเปิดไฟล์ scilab.quit ซึ่งอยู่ในโฟลเดอร์ที่ติดตั้งโปรแกรม SCILAB ตามภาพที่ 1.1 จากนั้นให้เพิ่มข้อความว่า

```
if exists('MAX'); killserver(%t); end;
```

ที่บรรทัดล่างสุดของไฟล์ scilab.quit ตามภาพที่ 1.2 แล้วทำการ save ไฟล์นั้น



ภาพที่ 1.1 ตำแหน่งของไฟล์ scilab.quit



ภาพที่ 1.2 ข้อความที่ใส่เพิ่มเข้าไปในไฟล์ scilab.quit

หมายเหตุ ถ้าไม่ทำขั้นตอนนี้ ผู้ใช้จะต้องเรียกใช้คำสั่ง `killserver` ที่หน้าต่างคำสั่งก่อนเลิกใช้งานโปรแกรม SCILAB ทุกครั้ง

4) ดาวน์โหลดมอดูล Symbolic toolbox (นั่นคือ s_symt_toolbox_v0.zip) มาไว้ที่ไดร์ฟ C:\ จากนั้นทำการแตกไฟล์ (unzip) ที่ไดร์ฟ C:\ ก็จะได้เป็นโฟลเดอร์ **SYM** อยู่ที่ไดร์ฟ C:\ นั่นคือจะได้เป็น C:\SYM จากนั้น
   - เปิดโปรแกรม SCILAB ขึ้นมา แล้วเปลี่ยนไดเร็กทรอรีที่กำลังทำงานให้เป็นโฟลเดอร์ **SYM**
   - ประมวลผลไฟล์ builder.sce และตามด้วยไฟล์ loader.sce ดังนี้

```
-->chdir('C:\SYM');

-->exec('builder.sce');

-->exec('loader.sce');

Symbolic Math Toolbox. Type hlp symbolic.
file://C:/SYM/doc/index.html

-->
```

5) ดาวน์โหลดมอดูล Overloading (นั่นคือ OVLD_28042006.zip) มาไว้ที่ไดร์ฟ C:\ จากนั้นทำการแตกไฟล์ (unzip) ที่ไดร์ฟ C:\ ก็จะได้เป็นโฟลเดอร์ **OVLD** อยู่ที่ไดร์ฟ C:\ นั่นคือจะได้เป็น C:\OVLD จากนั้น
   - เปิดโปรแกรม SCILAB ขึ้นมา แล้วเปลี่ยนไดเร็กทรอรีที่กำลังทำงานให้เป็นโฟลเดอร์ **OVLD**
   - ประมวลผลไฟล์ builder.sce และตามด้วยไฟล์ loader.sce ดังนี้

```
-->chdir('C:\OVLD');

-->exec('builder.sce');

-->exec('loader.sce');

-->
```

6) ที่หน้าต่างคำสั่งของ SCILAB ให้ทำการเรียกใช้คำสั่ง `restartserver` แล้วพิมพ์ `y` จากนั้นกด Enter

```
-->restartserver
ALL Perl and Maxima tasks will be killed. Okay ? (y/n)-->y
=== Server and Maxima killed ===
=== Server and Maxima started ===

-->
```

หมายเหตุ ขั้นตอนนี้เป็นการเริ่มต้นทำงานใหม่ของ Symbolic toolbox นอกจากนี้ระหว่างที่ใช้งาน Symbolic toolbox หากเกิดปัญหาในการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ ก็ให้เรียกใช้คำสั่งนี้อีกครั้ง เพื่อแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นได้

7) หลังจากที่ทำการติดตั้งโปรแกรมเพิ่มเติมทั้งหมดตามขั้นตอนที่ 1 – 6 แล้ว ในการใช้งาน Symbolic toolbox ครั้งถัดไป ให้ทำการประมวลผล**เฉพาะ**ไฟล์ loader.sce ทั้งสองไฟล์เท่านั้น นั่นคือ /OVLD/loader.sce และ /SYM/loader.sce ดังนี้

```
-->chdir('C:\SYM');

-->exec('loader.sce');

-->chdir('C:\OVLD');

-->exec('loader.sce');
```

หมายเหตุ หลังจากทำการติดตั้ง Symbolic toolbox แล้ว โปรแกรม SCILAB ก็จะสามารถใช้ Symbolic toolbox ได้**จนกระทั่ง**ผู้ใช้เรียกใช้คำสั่ง `clear` ซึ่งเป็นการลบค่าของตัวแปรทั้งหมด ดังนั้นถ้าผู้ใช้ต้องการใช้งาน Symbolic toolbox ในโปรแกรม SCILAB อีกครั้ง ก็จะต้องทำตามขั้นตอนในข้อที่ 7 ใหม่อีกครั้ง

8) หากต้องการให้โปรแกรม SCILAB ทำการติดตั้ง Symbolic toolbox ให้โดยอัตโนมัติสำหรับทุกครั้งที่เรียกโปรแกรม SCILAB ขึ้นมาใช้งาน ก็สามารถทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

- เปิดเอดิเตอร์ SciPad ขึ้นมา แล้วเปิดไฟล์ scilab.star ซึ่งอยู่ในโฟลเดอร์ที่ติดตั้งโปรแกรม SCILAB ตามภาพที่ 1.3 จากนั้นให้เพิ่มข้อความว่า

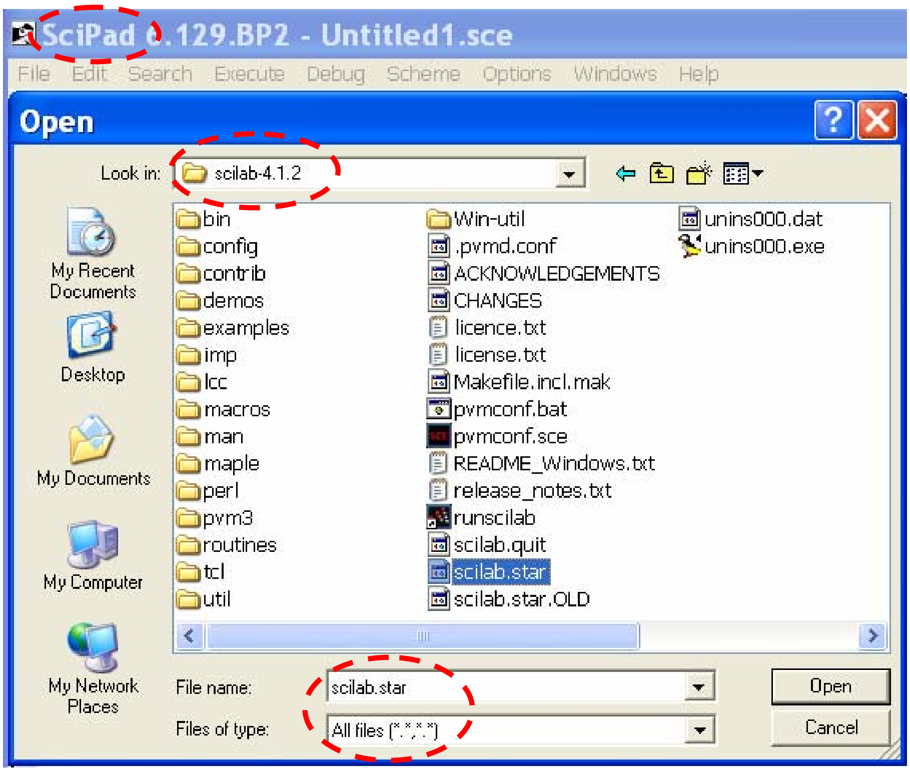
```
exec('C:\SYM\loader.sce');

exec('C:\OVLD\loader.sce');
```

ที่บรรทัดล่างสุดของไฟล์ scilab.star ตามภาพที่ 1.4 แล้วทำการ save ไฟล์นั้น

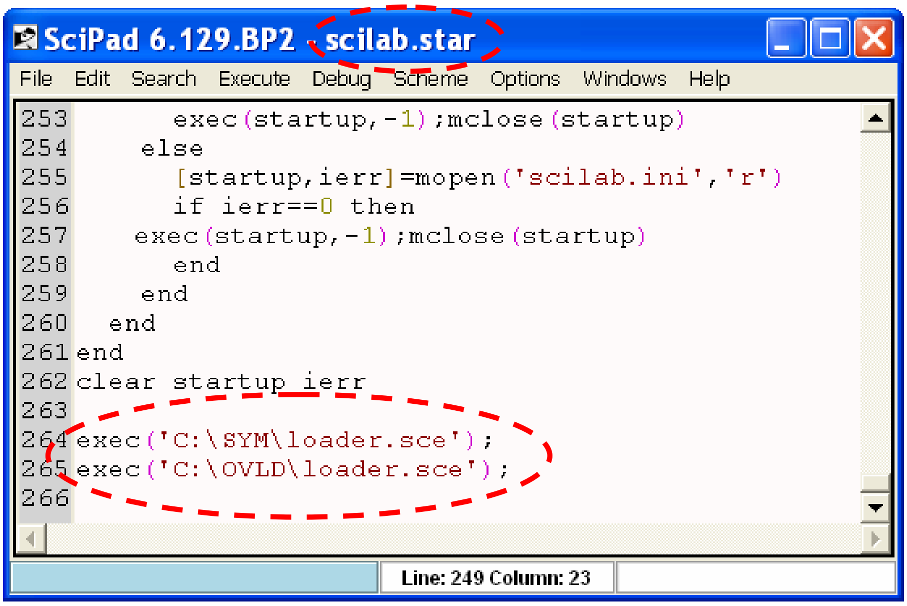
- จากนั้นปิดแล้วเปิดโปรแกรม SCILAB ขึ้นมาใหม่ ก็จะได้หน้าต่างคำสั่งตามภาพที่ 1.5 ซึ่งมีข้อความว่า

```
Symbolic Math Toolbox. Type hlp symbolic.
file://C:/SYM/doc/index.html
```

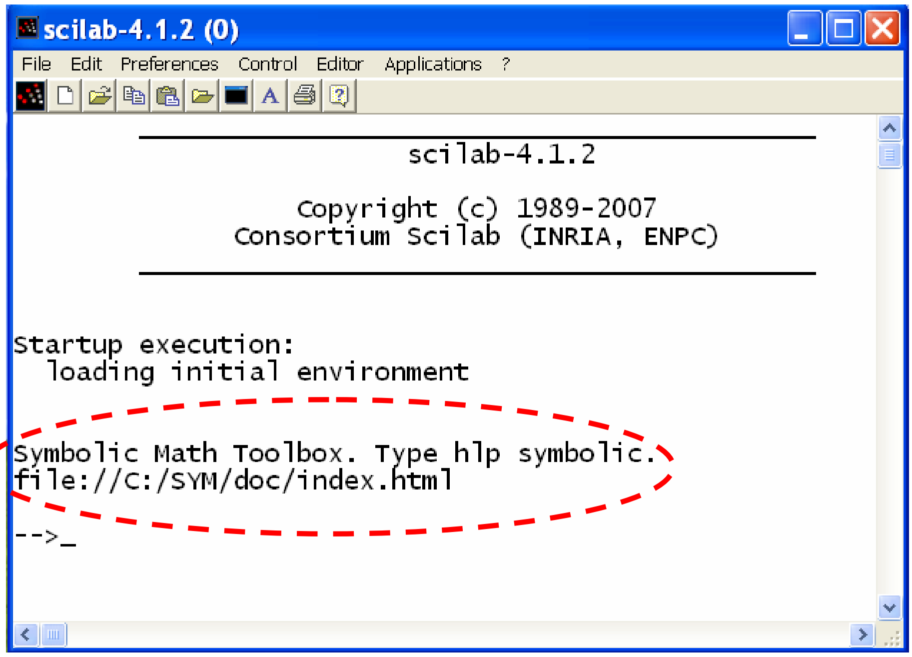
ปรากฏออกมา ทำให้ทราบว่าโปรแกรม SCILAB พร้อมใช้งาน Symbolic toolbox



ภาพที่ 1.3 ตำแหน่งของไฟล์ scilab.star



ภาพที่ 1.4 ข้อความที่ใส่เพิ่มเข้าไปในไฟล์ scilab.star



ภาพที่ 1.5 หน้าต่างคำสั่งของโปรแกรม SCILAB ที่พร้อมใช้งาน Symbolic toolbox

2. คำสั่งใน Symbolic Toolbox

หลังจากติดตั้ง Symbolic toolbox ในโปรแกรม SCILAB แล้ว เมื่อทำการเรียกหน้าต่างช่วยเหลือ (Help) ขึ้นมา ก็จะพบว่ามีเมนูของ Symbolic toolbox ปรากฏอยู่ ซึ่งภายในเมนูนี้จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณเชิงสัญลักษณ์ ดังแสดงในภาพที่ 1.6 ซึ่งประกอบไปด้วยฟังก์ชันต่างๆ มากมายดังนี้

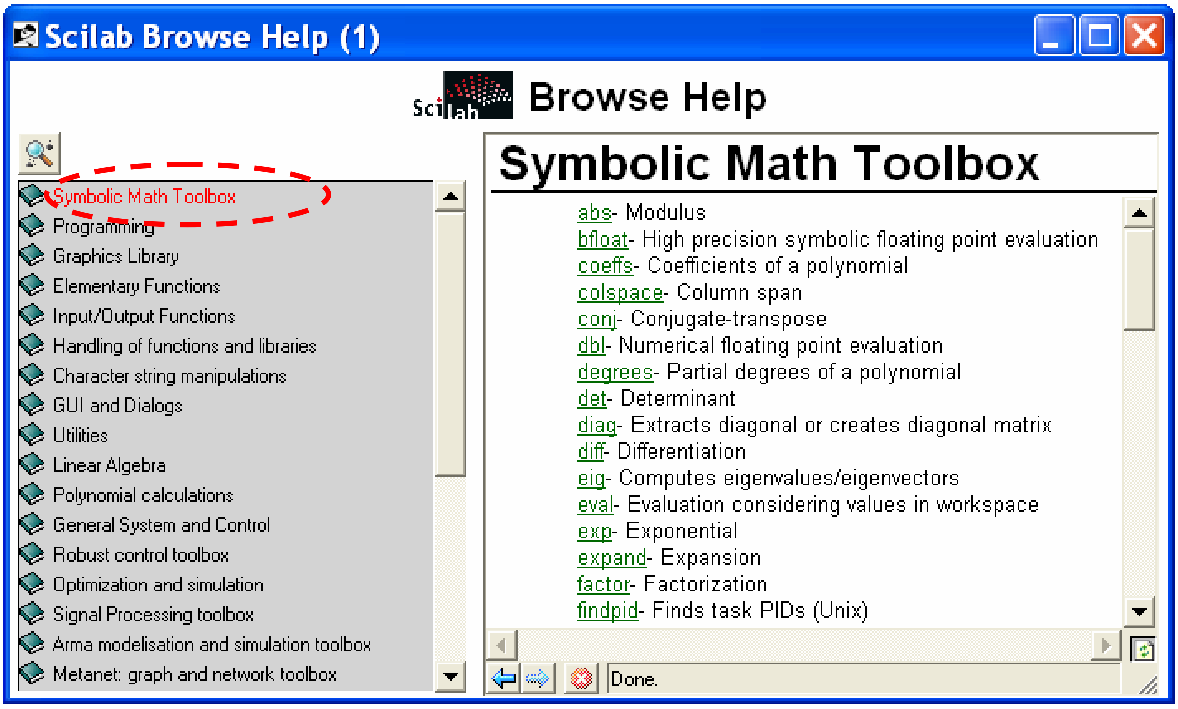
ข้อควรระวัง หากใช้งานโปรแกรม SCILAB ในการคำนวณเชิงสัญลักษณ์แล้วเกิดปัญหาเครื่องหยุดทำงาน ให้**ปิด**โปรแกรม SCILAB แล้ว**เปิด**โปรแกรม SCILAB ขึ้นมาใหม่ แล้วใช้คำสั่ง `restartserver` ที่อยู่ใน Symbolic toolbox เพื่อกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับโปรแกรม PERL และ MAXIMA ใหม่

2.1 คำสั่งที่เกี่ยวข้องกับการสร้างตัวแปรเชิงสัญลักษณ์

2.1.1 คำสั่ง syms

เป็นคำสั่งที่ใช้ในการสร้างตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ เพื่อใช้ในการสร้างสมการคณิตศาสตร์เพื่อนำมาประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
syms a b string c string d string
```



ภาพที่ 1.6 หน้าต่างช่วยเหลือ (Help) จะปรากฏ Symbolic Math Toolbox ขึ้นมา

เมื่อ string คือประเภทของตัวแปร a, b, c, และ d ซึ่งสามารถกำหนดได้หลายแบบคือ even, odd, integer, rational, irrational, real, imaginary, หรือ **complex** (เป็น**ค่าดีฟอลต์**) ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b real c imaginary   //สร้างตัวแปร a และ b เป็นแบบ real และ c เป็นแบบ imaginary
-->symtype(a)
 ans  =
 real                    //บอกว่าตัวแปร a เป็นแบบ real
-->symtype(c)
 ans  =
 imaginary               //บอกว่าตัวแปร d เป็นแบบ imaginary
```

2.1.2 คำสั่ง symtype

เป็นคำสั่งที่ใช้แสดงประเภทของตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ว่าเป็นแบบใด ได้แก่ even, odd, integer, rational, irrational, real, imaginary, หรือ complex โดยมีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = symtype(x)
```

เมื่อ y คือประเภทของตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ x ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a real b integer
-->symtype(a)
 ans  =
 real                    //บอกว่าตัวแปร a เป็นแบบ real
-->symtype(b)
 ans  =
 integer                 //บอกว่าตัวแปร b เป็นแบบ integer
```

2.1.3 คำสั่ง findsym

เป็นคำสั่งที่ใช้ตรวจหาตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ที่ใช้อยู่ในตัวแปรที่กำหนด มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

y = **findsym**(x)

เมื่อ y คือตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ที่ใช้อยู่ในตัวแปร x ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b              //สร้างตัวแปร a และ b เป็นแบบ complex (ค่าดีฟอลต์)
-->x = 4;
-->y = sin(a) + cos(x) + exp(b);
-->params = findsym(y)
 params  =
!a  b  !                 //ตัวแปร a และ b เป็นตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ที่ใช้อยู่ในตัวแปร y
```

2.2 คำสั่งที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันพื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ฟังก์ชันพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ต่างๆ เช่น abs, real, imag, conj, log, exp, และ sqrt เป็นต้น ที่ใช้ในโปรแกรม SCLAB ยังคงสามารถใช้กับตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ได้ ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b real
-->c = a + b*%i;
-->abs(c)
 ans  =
 sqrt(b^2+a^2)           //ตัวค่าสัมบูรณ์ของ c คือ |c| = |a + bi| = √(a² + b²)
```

```
-->sqrt((a+b)^2)
 ans  =
 abs(b+a)
```
//เนื่องจาก $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$

```
-->z = c^3
 z  =
 (%i*b+a)^3
```
//เนื่องจาก $z = c^3 = (a+bi)^3$

```
-->expand(z)
```
//ดูรายละเอียดคำสั่ง **expand** ในหัวข้อที่ 2.3.1

```
 ans  =
 -%i*b^3-3*a*b^2+3*%i*a^2*b+a^3
```
//เนื่องจาก $z = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$

```
-->real(z)
 ans  =
 a^3-3*a*b^2
```
//เนื่องจาก $\mathrm{Re}\{z\} = a^3 - 3ab^2$

```
-->imag(z)
 ans  =
 3*a^2*b-b^3
```
//เนื่องจาก $\mathrm{Im}\{z\} = 3a^2b - b^3$

```
-->conj(z)
 ans  =
 (a-%i*b)^3
```

นอกจากนี้ฟังก์ชันทางด้านตรีโกณมิติ ได้แก่ cos, acos, sin, asin, tan, และ atan ก็ยังคงสามารถใช้กับตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ได้เช่นกัน ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b real
-->simple(2*sin(a)*cos(a))
```
//ดูรายละเอียดคำสั่ง **simple** ในหัวข้อที่ 2.3.3

```
 ans  =
 sin(2*a)
-->tan(atan(b))
 ans  =
 b
```

2.3 คำสั่งที่เกี่ยวข้องกับพหุนาม

2.3.1 คำสั่ง expand

เป็นคำสั่งที่ใช้ในการกระจายฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) ให้อยู่ในรูปของสมการคณิตศาสตร์ โดยมีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = expand(x)
```

เมื่อ x คือฟังก์ชันตรรกยะ และ y คือสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปแบบง่าย ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b c

-->x = (a + b)^2;

-->p = expand(x)
 p  =
 b^2+2*a*b+a^2                          //เนื่องจาก x=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2

-->y = (a + b - c)^2;

-->z = expand(y)
 z  =
 c^2-2*b*c-2*a*c+b^2+2*a*b+a^2
```

2.3.2 คำสั่ง factor

เป็นคำสั่งที่ใช้แยกตัวประกอบ (factorization) ของฟังก์ชันตรรกยะให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันย่อย โดยมีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = factor(x)
```

เมื่อ x คือฟังก์ชันตรรกยะ และ y คือฟังก์ชันย่อยที่ได้จากการแยกตัวประกอบ ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b c d

-->y = (a^2 - b^2)/(c^2 - d^2);         //เนื่องจาก y=(a^2-b^2)/(c^2-d^2)

-->B = factor(y)
 B  =
 (b-a)*(b+a)/((d-c)*(d+c))              //นั่นคือ B=(a+b)(a-b)/(c+d)(c-d)
```

```
-->y = ((a+b)^2-(c+d)^2)
 y  =
 (b+a)^2-(d+c)^2
-->B = factor(y)
 B  =
 (-d-c+b+a)*(d+c+b+a)
```

2.3.3 คำสั่ง simple

เป็นคำสั่งที่ใช้ลดรูปสมการคณิตศาสตร์ให้อยู่ในรูปแบบที่ง่าย มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = simple(x)
```

เมื่อ x คือฟังก์ชันตรรกยะ และ y คือสมการคณิตศาสตร์ที่ลดรูปแล้ว ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b
-->y = (a^2 - b^2)/(a+b);
-->B = simple(y)
 B  =
 a-b
-->G = [cos(a)  sin(a);  -sin(a)  cos(a)]
 G  =
!cos(a)   sin(a)  !
!                 !
!-sin(a)  cos(a)  !
-->simple(G^2)
 ans  =
!cos(2*a)   sin(2*a)  !
!                     !
!-sin(2*a)  cos(2*a)  !
-->simple(G'*G)
 ans  =
!1  0  !
!      !
!0  1  !
```

2.3.4 คำสั่ง numden

เป็นคำสั่งที่ใช้เรียกดูตัวเศษและตัวส่วนของสมการคณิตศาสตร์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
[Num, Den] = numden(x)
```

เมื่อ `Num` คือตัวเศษ (numerator) และ `Den` คือตัวส่วน (denominator) ของสมการคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ `x` ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b
-->M = [2*a/(1+b)  0; 1  a/b];
-->[Num, Den] = numden(M)
 Den  =
!b+1  1  !
!        !
!1    b  !
 Num  =
!2*a  0  !
!        !
!1    a  !
```

2.3.5 คำสั่ง coeffs

เป็นคำสั่งที่ใช้เรียกดูค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
c = coeffs(A, x, n)
```

เมื่อ `c` คือค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม `A` โดยที่ `x` คือตัวแปรของสมการพหุนามที่ต้องการหาค่าสัมประสิทธิ์และ `n` คือดีกรีของตัวแปร `x` ในสมการพหุนาม `A` (ค่าดีฟอลต์คือ `n = 1`) ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b
-->A = (a+b)^2;
-->expand(A)
 ans  =
 b^2+2*a*b+a^2
```

//เนื่องจาก $A=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

```
-->cof = coeffs(A, 'a', 0)       //สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร a ที่มีดีกรีเท่ากับค่าศูนย์คือ b^2
 cof  =
 b^2
-->cof = coeffs(A, 'a', 1)       //สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร a ที่มีดีกรีเท่ากับค่าหนึ่งคือ 2b
 cof  =
 2*b
-->cof = coeffs(A, 'a', 2)       //สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร a ที่มีดีกรีเท่ากับค่าสองคือ 1
 cof  =
 1
```

2.3.6 คำสั่ง degrees

เป็นคำสั่งที่ใช้หาค่าดีกรีของตัวแปรในของสมการพหุนาม มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

`d = degrees(A, x)`

เมื่อ `d` คือดีกรีของตัวแปร `x` ในของสมการพหุนาม `A` ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b
-->A = (a+b)^2;                  //เนื่องจาก A = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2
-->degrees(A, 'a')
 ans  =
 2
-->degrees(A, 'b')
 ans  =
 2
```

2.3.7 คำสั่ง eval

เป็นคำสั่งที่ใช้แทนค่า (เป็นได้ทั้งตัวเลขหรือตัวแปรเชิงสัญลักษณ์อื่นๆ) ให้กับตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

`y = eval(x)`

เมื่อ `x` คือสมการเชิงสัญลักษณ์ที่ต้องการแทนค่าตัวแปรใหม่เข้าไป ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b c d e f
```

```
-->A = (a+b+c)^2/(d+e+f)
 A  =
 (c+b+a)^2/(f+e+d)

-->d = a; e = b; f = c;

-->B = eval(A)
 B  =
 c+b+a

-->a = 2; b = 3;

-->C = eval(B)
 C  =
 c+5
```

2.3.8 คำสั่ง dbl

เป็นคำสั่งที่ใช้เปลี่ยนตัวเลขเชิงสัญลักษณ์ให้อยู่ในรูปของค่าสเกล่าร์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = dbl(x)
```

เมื่อ x คือตัวเลขเชิงสัญลักษณ์ และ y คือค่าสเกล่าร์ ตัวอย่างเช่น

```
-->syms x

-->y = log(x)
 y  =
 log(x)

-->x = 4;

-->z = eval(y)
 z  =
 log(4)                         //เป็นผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปของตัวแปรเชิงสัญลักษณ์

-->dbl(z)
 ans  =
    1.3862944                   //เปลี่ยนค่า log(4) ในรูปของตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ ให้เป็นค่าสเกล่าร์
```

2.4 คำสั่งที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์

2.4.1 คำสั่ง `det`

เป็นคำสั่งที่ใช้หาดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของเมทริกซ์เชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = det(A)
```

เมื่อ `A` คือเมทริกซ์ที่ต้องการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b;

-->M = [a  2*b;  1  a];

-->det(M)

 ans  =

 a^2-2*b
```

2.4.2 คำสั่ง `inv`

เป็นคำสั่งที่ใช้หาอินเวอร์ส (inverse) ของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็นตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = inv(A)
```

เมื่อ `y` คืออินเวอร์สของเมทริกซ์จัตุรัส `A` ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b

-->A = [a-b, a; 2, a+b];

-->A
 A  =
!a-b  a     !
!           !
!2    b+a   !

-->B = inv(A)
 B  =
!(b+a)/((a-b)*(b+a)-2*a)   -a/((a-b)*(b+a)-2*a)      !
!                                                    !
!-2/((a-b)*(b+a)-2*a)      (a-b)/((a-b)*(b+a)-2*a)   !
```

```
-->C = simple(A*B)
 C  =
!1  0  !
!      !
!0  1  !
```

2.4.3 คำสั่ง `diag`

เป็นคำสั่งที่ใช้หาค่าไดเอกกอนอล (diagonal) ของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = diag(A)
```

เมื่อ `y` คือค่าไดเอกกอนอลของเมทริกซ์ `A` ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b c d
-->M = [a^5*b  4  d;  a*b  c^3*d  a*d;  1  2  3]
 M  =
!a^5*b  4      d    !
!                   !
!a*b    c^3*d  a*d  !
!                   !
!1      2      3    !
-->N = diag(M)
 N  =
!a^5*b  !
!       !
!c^3*d  !
!       !
!3      !
```

2.4.4 คำสั่ง `eig`

เป็นคำสั่งที่ใช้หาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector) ของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
Val = eig(A)
[Vec, Val] = eig(A)
```

เมื่อ `Val` คือค่าลักษณะเฉพาะและ `Vec` คือเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b

-->A = [a  1;  b  2];

-->Val = eig(A)
 Val  =
!(-sqrt(4*b+a^2-4*a+4)+a+2)/2  !
!                              !
!(sqrt(4*b+a^2-4*a+4)+a+2)/2   !

-->[Vec, Val] = eig(A)

 Val  =
!(-sqrt(4*b+a^2-4*a+4)+a+2)/2  0                            !
!                                                           !
!0                             (sqrt(4*b+a^2-4*a+4)+a+2)/2  !

 Vec  =
!1                             1                            !
!                                                           !
!(-sqrt(4*b+a^2-4*a+4)-a+2)/2  (sqrt(4*b+a^2-4*a+4)-a+2)/2  !
```

2.4.5 คำสั่ง trace

เป็นคำสั่งที่ใช้หาค่าเทรส (trace) ของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
y = trace(A)
```

เมื่อ `y` คือค่าเทรสของเมทริกซ์ A ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b c d

-->M = [a^5*b  4; a*b*c^3*d  a*d]
 M  =
!a^5*b      4    !
!                !
!a*b*c^3*d  a*d  !

-->trace(M)
 ans  =
 a*d+a^5*b
```

2.4.6 คำสั่ง **rref**

เป็นคำสั่งที่ใช้จัดรูปเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ขั้นบันได (row echelon form) โดยใช้เทคนิค Gussian elimination มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
B = rref(A)
```

เมื่อ B เมทริกซ์ขั้นบันไดที่เกิดจากการจัดรูปเมทริกซ์ A ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b
-->A = [1 2*b 3*a; 2 3*b 0; a*b 0 1]
 A  =
!1     2*b   3*a   !
!                  !
!2     3*b   0     !
!                  !
!a*b   0     1     !
-->B = rref(A)
 B  =
!1   3*b/2   0       !
!                    !
!0   1       6*a/b   !
!                    !
!0   0       1       !
```

2.5 คำสั่งที่เกี่ยวข้องกับแคลคูลัส

ในที่นี้จะอธิบายการใช้คำสั่งเพื่อหาค่าลิมิต limit, อนุกรม symsum, อนุพันธ์ diff, และปริพันธ์ integ ของฟังก์ชันคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ **อย่างไรก็ตาม**ขอให้ผู้ใช้ตรวจสอบผลลัพธ์ทุกครั้งก่อนนำไปใช้งานจริง เพื่อป้องกันข้อผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้นได้

2.5.1 คำสั่ง **limit**

เป็นคำสั่งที่ใช้หาค่าลิมิต (limit) ของสมการคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
z = limit(y, x, x0, [option])
```

เมื่อ y คือสมการคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ที่ต้องการหาค่าลิมิตของตัวแปร x เข้าใกล้ค่าคงที่ x0 โดยที่ option คือเครื่องหมาย '+' หรือ '-' ของการลู่เข้าทางด้านซ้ายหรือทางด้านขวาของการหาค่าลิมิต ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a

-->z = limit(cos(a), a, %pi/4)                    //นั่นคือหาค่า lim_{a→π/4} cos(a)

 z  =
 cos(26087/33215)

-->[dbl(z)  cos(%pi/4)]
 ans  =
    0.7071068    0.7071068
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.1 จงหาค่าของ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

วิธีทำ

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}\times\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{t^2+9}\right)^2-3^2}{t^2\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{t^2+9}\right)^2-3^2}{t^2\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$= \frac{1}{6}=1.6$$

SCILAB

```
-->syms t
-->yt = (sqrt(t^2+9) - 3)/t^2;
-->limit(yt, t, 0)
 ans  =
 1/6
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.2 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ = 0.25 หรือ 1/4 ดังตาราง

x	3.9	3.99	3.999
f(x)	0.25158	0.25016	0.25002

x	4.001	4.01	4.1
f(x)	0.24998	0.24984	0.24846

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (sqrt(x) - 2)/(x - 4);
-->limit(y, x, 4)
 ans  =
 1/4
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.3 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$ ดังตาราง

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01
f(x)	0.84147	0.95885	0.99833	0.99958	0.99998

x	–1	–0.5	–0.1	–0.05	–0.01
f(x)	0.84147	0.95885	0.99833	0.99958	0.99998

SCILAB

```
-->syms x
-->limit(sin(x)/x, x, 0)
ans  =
 1
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.4 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\pi} x\cos(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} x\cos x &= (\lim_{x\to\pi} x)(\lim_{x\to\pi}\cos x)\\ &= \pi\cdot\cos\pi\\ &= -\pi\end{aligned}$$

SCILAB

```
-->syms x
-->z = limit(x*cos(x), x, %pi)
 z  =
 103993*cos(103993/33102)/33102
-->dbl(z)
 ans  =
  - 3.1415927
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.5 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{4x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x} &= \lim_{x\to 0}\frac{7}{4}\frac{\sin 7x}{7x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{7}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\\ &= \frac{7}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\\ &= \frac{7}{4}\cdot 1\\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = sin(7*x)/(4*x);
-->z = limit(y, x, 0)
 z  =
 7/4
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.6 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

วิธีทำ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ดังตาราง

x	–0.1	–0.01	–0.001
f(x)	0.95163	0.99502	0.99950

x	0.001	0.01	0.1
f(x)	1.00050	1.00502	1.05171

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (exp(x) - 1)/x;
-->z = limit(y, x, 0)
 z  =
 1
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.7 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}$

วิธีทำ $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}=0.2$ หรือ 1/5 ดังตาราง

x	1.9	1.99	1.999
f(x)	0.20408	0.20040	0.20004

x	2.001	2.01	2.1
f(x)	0.19996	0.19960	0.19608

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (x - 2)/(x^2 + x - 6);
-->z = limit(y, x, 2)
 z  =
 1/5
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.8 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (x-1)/(x^2-1);
-->z = limit(y, x, 1)
 z  =
 1/2
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.9 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

วิธีทำ ถ้าใช้โปรแกรม SCILAB ในการหาคำตอบ ก็สามารถทำได้ดังนี้

```
-->syms x;
-->limit(x^2*sin(1/x), x, 0)
 ans  =
 0
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.10 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right] = \frac{1}{2}$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (1-sqrt(x))/(1-x);
-->z = limit(y, x, 1)
 z  =
 1/2
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.11 จงแสดงว่า $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{-h}{2(2+h)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{2(2+h)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2+h}\right) = -\frac{1}{4}$$

SCILAB

```
-->syms h
-->y = 1/h*(1/(2+h)-1/2);
-->limit(y, h, 0)
 ans  =
 -1/4
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.12 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 4}\frac{(3x-10)^4}{(4x-15)^3}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 4}\frac{(3x-10)^4}{(4x-15)^3}=\frac{\lim_{x\to 4}(3x-10)^4}{\lim_{x\to 4}(4x-15)^3}$$

$$=\frac{\left(\lim_{x\to 4}(3x-10)\right)^4}{\left(\lim_{x\to 4}(4x-15)\right)^3}$$

$$=\frac{\left(\lim_{x\to 4}(3x)-\lim_{x\to 4}(10)\right)^4}{\left(\lim_{x\to 4}(4x)-\lim_{x\to 4}(15)\right)^3}$$

$$=\frac{(3(4)-10)^4}{(4(4)-15)^3}=2^4=16$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (3*x-10)^4/(4*x-15)^3;
-->limit(y, x, 4)
 ans  =
 16
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.13 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

วิธีทำ เนื่องจาก $1-\cos(x)=2\sin^2(x/2)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)}$$

ให้ $y=x/2$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x} = 2\lim_{t\to 0}\frac{\cos y}{\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)}$$

$$= 2\frac{\lim\limits_{t\to 0}\cos y}{\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)}$$

$$= \frac{2(1)}{1} = 2$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = x*sin(x)/(1-cos(x));
-->limit(y, x, 0)
 ans  =
 2
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.14 จงแสดงว่า $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta} = 0$

วิธีทำ

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos\theta}\right)\frac{1}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (1 - cos(x))/x;
-->limit(y, x, 0)
 ans  =
 0
```

หมายเหตุ ในกรณีที่หาค่าลิมิตแล้วได้ผลลัพธ์ไม่เป็นไปตามที่ต้องการ เช่น ได้ค่าอนันต์หรือค่าแปลกๆ **ให้ผู้ใช้ลองเปลี่ยนค่าของการหาลิมิตเป็นค่าอื่นที่ใกล้เคียงกับค่าเดิม** ตัวอย่างเช่น จากเดิม $n\to\infty$ ให้ลองเปลี่ยนเป็น $n\to 1000$ หรือจากเดิม $n\to 0$ ให้ลองเปลี่ยนเป็น $n\to 0.0001$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.5.1.15 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{5n-3}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(5-\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{5-\frac{3}{n}}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right) = 5$

จะได้ $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5-\frac{3}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}\right)} = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = \dfrac{2n}{5n-3}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{5n-3} = \dfrac{2}{5}$

ถ้าใช้โปรแกรม SCILAB ในการหาคำตอบ ก็สามารถทำได้ดังนี้

```
-->syms n

-->limit(2*n/(5*n-3), n, %inf)
 ans  =
 2*%inf/(5*%inf-3)
```

เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้เป็นค่าที่ไม่ต้องการ วิธีการแก้ไขคือการเปลี่ยนค่าของการหาลิมิตจาก $n\to\infty$ ไปเป็น $n\to 1000$ ดังนี้

```
-->[dbl(limit(2*n/(5*n-3), n, 1000))   2/5]
 ans  =
    0.4002401    0.4
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.16 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+\sqrt[3]{n^3+2}}$

วิธีทำ

จาก $$\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+\sqrt[3]{n^3+2}} = \frac{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{n\left(2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}\right)} = \frac{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}}$$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}\right) = 2$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}\right) = 3$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+\sqrt[3]{n^3+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}\right)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ดังนั้น ลำดับ $a_n = \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+\sqrt[3]{n^3+2}}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ถ้าใช้โปรแกรม SCILAB ในการหาคำตอบ ก็สามารถทำได้ดังนี้

```
-->syms n

-->limit(sqrt(4*n^2-1)/(2*n + (n^3+2)^(3/2)), n, %inf)
 ans  =
 sqrt(4*%inf^2-1)/((%inf^3+2)^1.5+2*%inf)
```

เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้เป็นค่าที่ไม่ต้องการ วิธีการแก้ไขคือการเปลี่ยนค่าของการหาลิมิตจาก $n \to \infty$ ไปเป็น $n \to 1000$ ดังนี้

```
-->[dbl(limit(sqrt(4*n^2-1)/(2*n + (n^3+2)^(1/3)), n, 1000))   2/3]
 ans  =
     0.6666667    0.6666667
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.17 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

วิธีทำ การหาลิมิตของฟังก์ชันนี้สำหรับ $n \to \infty$ ไม่สามารถหาได้ วิธีแก้ปัญหาคือจะต้องสมมติค่า n เป็นค่าสูงๆ เพื่อใช้แทนค่าอนันต์ ในที่นี้จะสมมติให้ $n \to z$ เมื่อ z = 1500 (โปรแกรม SCILAB ไม่สามารถรองรับค่า n ที่มากกว่านี้ได้ เนื่องจากจะเกิดปัญหาเกี่ยวกับหน่วยความจำ)

```
-->syms n

-->x = 4;                    //กำหนดให้ x = 4

-->z = 1500;                 //สมมติว่า z คือค่าอนันต์
```

```
-->[dbl(limit((1+x/n)^n, n, z))     exp(x)]
 ans  =
    54.308249    54.59815
```

จากผลลัพธ์ที่ได้พบว่ามีค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ มีใกล้เคียงกันกับค่า e^x โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ z มีค่ามากขึ้น

ตัวอย่างที่ 2.5.1.18 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x}\cdot\frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(\sqrt{5+x}+\sqrt{5})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(\sqrt{5+x}+\sqrt{5})}\\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\end{aligned}$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (sqrt(5+x)-sqrt(5))/(2*x);
-->1/(4*sqrt(5))
 ans  =
    0.1118034
-->dbl(limit(y, x, 0.0001))
 ans  =
    0.1118008
```

ตัวอย่างที่ 2.5.1.19 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$ ตามที่แสดงในตาราง

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
f(x)	−0.23026	−0.04605	−0.00691	−0.00092	−0.00012

หรือเขียนเป็นโปรแกรม SCILAB ได้คือ

```
-->syms x;
-->y = x*log(x);
-->[dbl(limit(y,x,0.01))   dbl(limit(y,x,0.00001))]
 ans  =
  - 0.0460517  - 0.0001151
```

2.5.2 คำสั่ง symsum

เป็นคำสั่งที่ใช้หาผลรวมของอนุกรม (series summation) มีรูปแบบการเรียกใช้งานคือ

```
z = symsum(y, x, x0, x1)
```

เมื่อ z คือผลรวมของอนุกรม y ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสัญลักษณ์ x เมื่อ x มีค่าตั้งแต่ x0 ถึง x1 ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a n

-->symsum(a^(-n),n,0,10)            //นั่นคือหาค่า ∑_{n=0}^{10} a^{-n}

 ans  =
 1/a+1/a^2+1/a^3+1/a^4+1/a^5+1/a^6+1/a^7+1/a^8+1/a^9+1/a^10+1

-->symsum(a^(-n),n,0,%inf)          //นั่นคือหาค่า ∑_{n=0}^{∞} a^{-n}

 ans  =
 (a^(-%inf-1)-1)/(1/a-1)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.1 จงแสดงว่าอนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots=2$

วิธีทำ โจทย์ของนี้สามารถใช้โปรแกรม SCILAB ได้ดังนี้

```
-->syms n

-->z = symsum(1/2^(n-1), n, 1, %inf)      //นั่นคือหาค่า ∑_{n=1}^{∞} 1/2^{n-1}
 z  =
 -4*(2^(-%inf-1)-1/2)

-->dbl(z)                                 //ทำให้เป็นค่าสเกล่าร์
 ans  =
    2.
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.2 จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c คือค่าคงตัว

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{\text{n terms}}$

$= nc$

SCILAB

```
-->syms c n integer
-->symsum(c, n, 1, n);
 ans  =
 c*n
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.3 จงแสดงว่า

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

วิธีทำ สามารถใช้โปรแกรม SCILAB ได้ดังนี้

```
-->syms i n integer

-->symsum(i, i, 1, n)
 ans  =
 (n^2+n)/2

-->symsum(i^2, i, 1, n)
 ans  =
 (2*n^3+3*n^2+n)/6

-->symsum(i^3, i, 1, n)
 ans  =
 (n^4+2*n^3+n^2)/4

-->symsum(i^4, i, 1, n)
 ans  =
 (6*n^5+15*n^4+10*n^3-n)/30
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.4 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$

วิธีทำ สามารถใช้โปรแกรม SCILAB ได้ดังนี้

```
-->syms n

-->symsum(1/2^n, n, 1, %inf)
 ans  =
 -2*(2^(-%inf-1)-1/2)
```

```
-->dbl(ans)
 ans  =
    1.
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.5 จงหาค่าของอนุกรม $\sum_{i=1}^{10}(i-2)^3$

SCILAB

```
-->syms i
-->symsum((i-2)^3,i,1,10);
 ans  =
 1295
```

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(i-2)^3 &= \sum_{i=1}^{10}\left(i^3-6i^2+12i-8\right)\\ &= \sum_{i=1}^{10}i^3-6\sum_{i=1}^{10}i^2+12\sum_{i=1}^{10}i-\sum_{i=1}^{10}8\\ &= \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2-6\left(\frac{10}{6}(10+1)(20+1)\right)+12\left(\frac{(10)(10+1)}{2}\right)-80\\ &= 3025-2310+660-80\\ &= 1295\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.5.2.6 จงหาค่าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$

วิธีทำ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3^n}+\ldots$$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{2}{3}$ และ $r = \frac{1}{3}$

เนื่องจาก $|r| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$ อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = 1$

SCILAB

```
-->syms n
-->dbl(symsum(2/3^n,n,1,%inf))
 ans  =
 1
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.7 จงหาค่าของอนุกรม $\sum_{i=1}^{m}3\left(4^i\right)$

วิธีทำ

$$\sum_{i=1}^{m} 3\cdot 4^i = 3\sum_{i=1}^{m} 4^i$$
$$= 3(4+4^2+4^3+\ldots+4^m)$$
$$= 3\left(\frac{(4)(1-4^m)}{1-4}\right)$$
$$= 4^{m+1}-4$$

SCILAB
```
-->syms i m integer
-->symsum(3*4^i,i,1,m)
 ans  =
 4^(m+1)-4
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.8 จงหาค่าของอนุกรม $\sum_{i=1}^{n}(i^2-i)$

วิธีทำ

$$\sum_{i=1}^{n}(i^2-i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-1\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1-3}{3}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$
$$= \frac{n^3-n}{3}$$

SCILAB
```
-->syms i n integer
-->symsum(i^2-i,i,1,n)
 ans  =
 (2*m^3+3*m^2+m)/6-(m^2+m)/2
-->simple(ans)
 ans
 (m^3-m)/3
```

หมายเหตุ ในกรณีที่หาค่าผลรวมของอนุกรมแล้วได้ผลลัพธ์ไม่เป็นไปตามที่ต้องการหรือมีข้อผิดพลาดเกิดขึ้น **ให้ผู้ใช้ลองเปลี่ยนค่าขอบเขตบนของการหาผลรวมเป็นค่าอื่นที่ใกล้เคียงกับค่าเดิม** ตัวอย่างเช่น จากเดิม $k=\infty$ ให้ลองเปลี่ยนเป็น $k=1000$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.5.2.9 จงหาค่าของอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

วิธีทำ

ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$

เนื่องจาก $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k)^2-1}$

$= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

จะได้ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$

ถ้าใช้โปรแกรม SCILAB จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
-->syms k

-->symsum(1/(4*k^2-1), k, 1, %inf)
 ans  =
%val=[''sum(1/(4*k^2-1),k,1,%inf)']
           !--error 276
```

ซึ่งหมายความว่ามีข้อผิดพลาดเกิดขึ้น วิธีการแก้ไขคือการเปลี่ยนค่าขอบเขตบนของการหาผลรวมจากค่า $k=\infty$ ไปเป็นค่า k ที่มีค่ามากๆ เช่น $k=1000$ เป็นต้น

```
-->[dbl(symsum(y,k,1,100))  dbl(symsum(y,k,1,1000))  1/2]
 ans  =

    0.4975124    0.4997501    0.5            //ผลลัพธ์ใกล้กับค่า 0.5 ตามที่ต้องการ
```

นั่นคือเมื่อ `k` มีค่ามากๆ ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะมีค่าเข้าใกล้ค่า `1/2 = 0.5` ตามที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 2.5.2.10 จงหาค่าของอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{4k-1}-\frac{6}{4k+3}\right)$

วิธีทำ

ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{4k-1}-\frac{6}{4k+3}\right)$

จะได้ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{4k-1}-\frac{6}{4k+3}\right)$

$= \left(2-\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{6}{7}-\frac{6}{11}\right)+\left(\frac{6}{11}-\frac{6}{15}\right)+\ldots+\left(\frac{6}{4n-1}-\frac{6}{4n+3}\right)$

$= 2-\frac{6}{4n+3}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{6}{4n+3}\right) = 2$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{4k-1}-\frac{6}{4k+3}\right) = 2$

ถ้าใช้โปรแกรม SCILAB จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
-->syms k

-->y = 6/(4*k-1) - 6/(4*k+3);

-->dbl(symsum(y,k,1,%inf))

%val=[''sum(6.0/(4.0*k-1.0)-6.0/(4.0*k+3.0),k,1.0,%inf)']

           !--error 276
```

ซึ่งหมายความว่ามีข้อผิดพลาดเกิดขึ้น วิธีการแก้ไขคือการเปลี่ยนค่าขอบเขตบนของการหาผลรวมจากค่า $k=\infty$ ไปเป็นค่า k ที่มีค่ามากๆ เช่น $k=100$ หรือ 1000 เป็นต้น

```
-->[dbl(symsum(y,k,1,100))  dbl(symsum(y,k,1,1000))]

 ans  =
    1.9851117    1.9985011          //ผลลัพธ์ใกล้กับค่า 2 ตามที่ต้องการ
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.11 จงหาค่าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$

วิธีทำ

พิจารณา $\dfrac{1}{k(k+4)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+4}\right)$

$$
\begin{aligned}
\text{ดังนั้น } S_n &= \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{n(n+4)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\right. \\
&\quad \left.\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{เนื่องจาก } \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{25}{48}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อนุกรม $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{2\cdot 6}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+4)}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ $\dfrac{25}{48}$

ถ้าใช้โปรแกรม SCILAB จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
-->syms n

-->y = 1/(n*(n+4));

-->dbl(symsum(y,n,1,%inf))
%val=[''sum(1/(n*(n+4.0)),n,1.0,%inf)']
              !--error 276
```

ซึ่งหมายความว่ามีข้อผิดพลาดเกิดขึ้น วิธีการแก้ไขคือการเปลี่ยนค่าขอบเขตบนของการหาผลรวมจากค่า $k=\infty$ ไปเป็นค่า k ที่มีค่ามากๆ เช่น $k=100$ หรือ 1000 เป็นต้น

```
-->[dbl(symsum(y,n,1,100))  dbl(symsum(y,n,1,1000))  25/48]
 ans  =

     0.5110761    0.5198358    0.5208333    //ผลลัพธ์ใกล้กับค่า 25/48 ตามที่ต้องการ
```

ตัวอย่างที่ 2.5.2.12 จงหาค่าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

วิธีทำ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ 1

ถ้าใช้โปรแกรม SCILAB จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
-->syms n integer

-->y = (2*n+1)/(n^2*(n+1)^2);

-->dbl(symsum(y,n,1,%inf))
%val=[''sum((2.0*n+1.0)/(n^2*(n+1.0)^2),n,1.0,%inf)']
           !--error 276
```

ซึ่งหมายความว่ามีข้อผิดพลาดเกิดขึ้น วิธีการแก้ไขคือการเปลี่ยนค่าขอบเขตบนของการหาผลรวมจากค่า $k=\infty$ ไปเป็นค่า k ที่มีค่ามากๆ เช่น $k=100$ หรือ 1000 เป็นต้น

```
-->[dbl(symsum(y,n,1,100))  dbl(symsum(y,n,1,1000))]
 ans  =

    0.9999020    0.999999      //ผลลัพธ์ใกล้กับค่า 1 ตามที่ต้องการ
```

2.5.3 คำสั่ง `diff`

เป็นคำสั่งที่ใช้หาอนุพันธ์ของสมการคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานสองแบบคือ

แบบที่ 1 คือ `z = diff(y, x)`

เป็นการหาอนุพันธ์ของสมการ y เทียบกับตัวแปร `x`

แบบที่ 2 คือ `z = diff(y, x1, n1, x2, n2, ...)`

เป็นการหาอนุพันธ์ของสมการ y เทียบกับตัวแปร `xi`, และ `ni` คืออันดับของการหาอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปร `xi`, และ `i` = 1, 2, …

ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b

-->y = a^2*sin(3*b);            //นั่นคือ y = a^2 sin(3b)

-->diff(y, a)
 ans  =
 2*a*sin(3*b)                   //นั่นคือ dy/da = 2a sin(3b)

-->diff(y, b)
 ans  =
 3*a^2*cos(3*b)                 //นั่นคือ dy/db = 3a^2 cos(3b)

-->diff(y, a, 2, b, 2)
 ans  =
 -18*sin(3*b)                   //นั่นคือ d^4y/(da^2 db^2) = -18 sin(3b)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.1 กำหนดให้ $y = \frac{1}{x^3+3} + \left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-5x-4\right)$ จงหา $y' = dy/dx$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^3+3} + \left[(x^2+2x+1)\frac{d}{dx}(x^2-5x-4) + (x^2-5x-4)\frac{d}{dx}(x^2+2x+1)\right]$$

$$= -\frac{3x^2}{(x^3+3)^2} + (x^2+2x+1)(2x-5) + (x^2-5x-4)(2x+2)$$

โจทย์ของนี้สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรม SCILAB ได้ดังนี้

```
-->syms x

-->fx = 1/(x^3+3) + (x^2+2*x+1)*(x^2-5*x-4);

-->diff(fx,x)
 ans  =
 -3*x^2/(x^3+3)^2+(2*x-5)*(x^2+2*x+1)+(2*x+2)*(x^2-5*x-4)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.2 กำหนดให้ $y=(1-2x)^4$ จงหา $y'=dy/dx$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\text{จาก } y &= (1-2x)^4 \\
\text{ให้ } u &= 1-2x \\
\text{ดังนั้น } y &= u^4 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= \frac{d}{du}(u^4)\cdot\frac{d}{dx}(1-2x) \\
&= -8u^3 \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(-8u^3) \\
&= -8\left(\frac{d}{du}(u^3)\cdot\frac{du}{dx}\right) \\
&= -8\left(\frac{d}{du}(u^3)\cdot\frac{d}{dx}(1-2x)\right) \\
&= -8(3u^2)(-2) \\
&= 48u^2 \\
&= 48(1-2x)^2
\end{aligned}
$$

SCILAB

```
-->syms x
-->diff((1-2*x)^4, x);
 ans  =
 -8*(1-2*x)^3
-->diff((1-2x)^4, x, 2);
 ans  =
 48*(1-2*x)^2
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.3 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{4x^5-5x^4+3x^2}{x^2}$ จงหา $f'(x)=df(x)/dx$

วิธีทำ $f(x)=\dfrac{4x^5-5x^4+3x^2}{x^2}=\left(4x^3-5x^2+3\right)$

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left(4x^3-5x^2+3\right)$$

$$=\frac{d}{dx}(4x^3)-\frac{d}{dx}(5x^2)+\frac{d}{dx}(3)$$

$$=4\frac{dx^3}{dx}-5\frac{dx^2}{dx}+0$$

$$=4\left(3x^2\frac{dx}{dx}\right)-5\left(2x\frac{dx}{dx}\right)$$

$$=4(3x^2)(1)-5(2x)(1)=12x^2-10x$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (4*x^5 - 5*x^4 + 3*x^2)/x^2;
-->simple(diff(y, x))
 ans  =
 12*x^2-10*x
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.4 กำหนดให้ $y=\sqrt{x}\log\left(x^2\right)$ จงหา $y'=dy/dx$

วิธีทำ $y=\sqrt{x}\log x^2 \;=2\sqrt{x}\log x$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=2\frac{d}{dx}\sqrt{x}\log x$

$$=2\left[\sqrt{x}\frac{d}{dx}\log x+\log x\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right]$$

$$=2\left[\sqrt{x}\frac{1}{x}\log e\frac{dx}{dx}+\left(\log x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$=2\left[\frac{\log e}{\sqrt{x}}+\frac{\log x}{2\sqrt{x}}\right]=\frac{2}{\sqrt{x}}\left(\log e+\frac{1}{2}\log x\right)$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = sqrt(x)*log(x^2);
-->diff(y, x)
 ans  =
 log(x)/sqrt(x)+2/sqrt(x)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.5 กำหนดให้ $y=\left(3x+8\right)2^{x^3}$ จงหา $y'=dy/dx$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(3x+8)2^{x^3}$

$$=\left(3x+8\right)\frac{d}{dx}2^{x^3}+2^{x^3}\frac{d}{dx}\left(3x+8\right)$$

$$=\left(3x+8\right)2^{x^3}\ln 2\frac{d}{dx}x^3+3\left(2^{x^3}\right)$$

$$=\left(3x+8\right)2^{x^3}\ln 2\left(3x^2\right)+3\left(2^{x^3}\right)$$

$$=3\left(2^{x^3}\right)\left[x^2(3x+8)(\ln 2)+1\right]$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = (3*x+8)*2^(x^3);
-->diff(y, x)
 ans  =
 3*log(2)*x^2*(3*x+8)*2^x^3+3*2^x^3
-->simple(ans)
 ans  =
 (9*log(2)*x^3+24*log(2)*x^2+3)*2^x^3
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.6 กำหนดให้ $y = 5^{\ln\left(\sqrt{x-4}\right)}$ จงหา $y' = dy/dx$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}5^{\ln\sqrt{x-4}}$

$$= 5^{\ln\sqrt{x-4}}\ln 5\frac{d}{dx}\ln\sqrt{x-4}$$

$$= 5^{\ln\sqrt{x-4}}\ln 5\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln(x-4)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 5)5^{\ln\sqrt{x-4}}\frac{1}{x-4}\frac{d}{dx}(x-4)$$

$$= \frac{(\ln 5)5^{\ln\sqrt{x-4}}}{2(x-4)}$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = 5^log(sqrt(x-4));
-->diff(y, x)
 ans  =
 log(5)*5^(log(x-4)/2)/(2*(x-4))
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.7 กำหนดให้ $y = \sin\left(\ln\left(2^x\right)\right)$ จงหา $y' = dy/dx$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\ln 2^x)$

$$= \cos(\ln 2^x)\frac{d}{dx}\ln 2^x$$

$$= \cos(\ln 2^x)\frac{d}{dx}(x\ln 2)$$

$$= \cos(\ln 2^x)\left(\ln 2\frac{dx}{dx}\right)$$

$$= \ln 2\cos(\ln 2^x)$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = sin(log(2^x));
-->diff(y, x)
 ans  =
 log(2)*cos(log(2)*x)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.8 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\frac{d}{dx}\sin(u) = \cos(u)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot(u) = -\operatorname{cosec}^2(u)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos(u) = -\sin(u)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sec(u) = \sec(u)\tan(u)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan(u) = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}(u) = -\cot(u)\operatorname{cosec}(u)\frac{du}{dx}$$

วิธีทำ

SCILAB

```
-->syms u
-->diff(sin(u), u)
 ans  =
 cos(u)
-->diff(cos(u), u)
 ans  =
 -sin(u)
-->diff(tan(u), u)
 ans  =
 sec(u)^2
```

SCILAB

```
-->syms u
-->diff(1/tan(u), u)
 ans  =
 -sec(u)^2/tan(u)^2   //เท่ากับ −cosec²(u)
-->diff(1/cos(u), u)
 ans  =
 sin(u)/cos(u)^2      //เท่ากับ sec(u)tan(u)
-->diff(1/sin(u), u)
 ans  =
 -cos(u)/sin(u)^2     //เท่ากับ −cot(u)cosec(u)
```

เนื่องจาก $\cot(u) = 1/\tan(u)$, $\sec(u) = 1/\cos(u)$ และ $\operatorname{cosec}(u) = 1/\sin(u)$

ตัวอย่างที่ 2.5.3.9 กำหนดให้ $y = \dfrac{2^{\tan(x)}}{\sec(x)} = 2^{\tan(x)}\cos(x)$ จงหา $y' = dy/dx$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{2^{\tan x}}{\sec x} = \frac{1}{\sec^2 x}\left[\sec x\frac{d}{dx}2^{\tan x} - 2^{\tan x}\frac{d}{dx}\sec x\right]$$

$$= \cos^2 x\left[\sec x\left(2^{\tan x}\right)\ln 2\left(\frac{d}{dx}\tan x\right) - 2^{\tan x}(\tan x)(\sec x)\right]$$

$$= \cos^2 x\left[\sec x\left(2^{\tan x}\right)\ln 2\left(\sec^2 x\right) - 2^{\tan x}\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \cos^2 x\left[\sec x\left(2^{\tan x}\right)\ln 2\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - \frac{2^{\tan x}\sin x}{\cos^2 x}\right]$$

$$= \sec x\left(2^{\tan x}\right)\ln 2 - 2^{\tan x}\sin x$$

$$= 2^{\tan x}(\ln 2\sec x - \sin x)$$

โจทย์ข้อนี้สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรม SCILAB ได้ดังนี้

```
-->syms u
-->y = 2^(tan(x))*cos(x);
```

```
-->diff(y, x)
 ans  =
 log(2)*cos(x)*sec(x)^2*2^tan(x)-sin(x)*2^tan(x)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.10 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้พิสูจน์ได้โดยใช้โปรแกรม SCILAB ดังนี้

```
-->syms u

-->diff(asin(u),u)
 ans  =
 1/sqrt(1-u^2)

-->diff(acos(u),u)
 ans  =
 -1/sqrt(1-u^2)

-->diff(atan(u),u)
 ans  =
 1/(u^2+1)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.11 กำหนดให้ $y = \sin^{-1}\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)$ จงหา $y' = dy/dx$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\cos\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\sqrt{x})}}\frac{d}{dx}\cos\sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\left(-\sin\left(\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\left(\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

โจทย์ข้อนี้สามารถหาคำตอบได้โดยใช้โปรแกรม SCILAB ดังนี้

```
-->syms x

-->y = asin(cos(sqrt(x)));
```

```
-->z = diff(y, x)
 z  =
 -sin(sqrt(x))/(2*sqrt(1-cos(sqrt(x))^2)*sqrt(x))
```

ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม SCILAB มีค่าเท่ากับ $-1/\left(2\sqrt{x}\right)$ เพียงแต่โปรแกรม SCILAB แสดงผลลัพธ์ที่ยังไม่ได้ลดรูปสมการ นั่นคือ

$$z=\frac{-\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{1-\cos^2\left(\sqrt{x}\right)}\left(\sqrt{x}\right)}=\frac{-\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sin\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

ตัวอย่างที่ 2.5.3.12 กำหนดให้ $y=e^{\tan^{-1}(1/x)}$ จงหา $y'=dy/dx$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{d}{dx}x^{-1}$$

$$=\frac{x^2e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}}{1+x^2}$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = exp(atan(1/x));
-->diff(y, x)
 ans  =
 -%e^atan(1/x)/((1/x^2+1)*x^2)
-->simple(ans)
 ans  =
 -%e^atan(1/x)/(x^2+1)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.13 จงหาความชันของกราฟ $y=\sin^2(x)+\arcsin(x)$ ที่จุด (0, 0)

วิธีทำ เนื่องจาก $y'=\frac{d}{dx}\sin^2x+\frac{d}{dx}\arcsin x$

$$=2\sin x\cos x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad=\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ความชันของกราฟที่จุดใดๆ คือ $y' = \sin 2x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ดังนั้นความชันของกราฟที่จุด $(0,0)$ คือ $y'(0) = \sin(0) + \dfrac{1}{\sqrt{1-0}} = 0+1 = 1$

โจทย์ข้อนี้สามารถหาคำตอบได้โดยใช้โปรแกรม SCILAB ดังนี้

```
-->syms x

-->y = sin(x)^2 + asin(x);

-->z = diff(y, x)
 z  =
 2*cos(x)*sin(x)+1/sqrt(1-x^2)

-->x=0;  y=0;

-->SLOPE = eval(z)
 SLOPE  =
 1
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.14 กำหนดให้ $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+9}}$ จงหา $y' = dy/dx$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+9}}\right)$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}\left[\sqrt{x^2+9}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dx}\right) - \sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\frac{d}{dx}\left(x^2+9\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x^2+9}\left[\frac{\sqrt{x^2+9}}{2\sqrt{x}} - \frac{(2x)\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2+9}}\right]$$

$$= \frac{1}{x^2+9}\left[\frac{\sqrt{x^2+9}}{2\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+9}}\right]$$

โจทย์ข้อนี้สามารถหาคำตอบได้โดยใช้โปรแกรม SCILAB ดังนี้

```
-->syms x

-->y = sqrt(x)/sqrt(x^2+9);
```

```
-->diff(y, x)
 ans  =
 1/(2*sqrt(x)*sqrt(x^2+9))-x^(3/2)/(x^2+9)^(3/2)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.3.15 กำหนดให้ $y=\sqrt{x}\left(5-6x+\sqrt[4]{x}\right)$ จงหา $y'=dy/dx$

วิธีทำ จาก $y=\sqrt{x}\left(5-6x+\sqrt[4]{x}\right)=x^{\frac{1}{2}}\left(5-6x+x^{\frac{1}{4}}\right)=5x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}$

ดังนั้น
$$y'=\frac{d}{dx}\left(5x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$=5\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}-6\frac{dx^{\frac{3}{2}}}{dx}+\frac{dx^{\frac{3}{4}}}{dx}$$

$$=5\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)-6\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{5}{2\sqrt{x}}-9\sqrt{x}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

โจทย์ข้อนี้สามารถหาคำตอบได้โดยใช้โปรแกรม SCILAB ดังนี้

```
-->syms x
-->y = 5*sqrt(x) - 6*x^(3/2) + x^(3/4);
-->diff(y,x)
 ans  =
 -9.0*x^0.5+0.75/x^0.25+5/(2*sqrt(x))
```

2.5.4 คำสั่ง `integ`

เป็นคำสั่งที่ใช้หาปริพันธ์ของสมการคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ มีรูปแบบการเรียกใช้งานสองแบบคือ

แบบที่ 1 คือ `z = integ(y, x)`

เป็นการหาปริพันธ์ของสมการ y เทียบกับตัวแปร x (indefinite integral)

แบบที่ 2 คือ `z = integ(y, x, a, b)`

เป็นการหาปริพันธ์ของสมการ y เทียบกับตัวแปร x จากค่า a ถึง b (definite integral)

ตัวอย่างเช่น

```
-->syms a b
-->P = [a  a^2;  b  3];
-->integ(P, a)
 ans  =
!a^2/2  a^3/3  !
!              !
!a*b    3*a    !
```

เนื่องจาก $\int a\,da = a^2/2 + c$

$\int a^2 da = a^3/3 + c$

$\int b\,da = ab + c$

$\int 3da = 3a + c$

เมื่อ c คือค่าคงตัว ที่โปรแกรม SCILAB ละไว้ในฐานที่เข้าใจ

ตัวอย่างที่ 2.5.4.1 จงหาปริพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{x^3+5x^2-4}{x^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{x^3+5x^2-4}{x^2} = x+5-4x^{-2}$

ดังนั้น $\int f(x)dx \;=\; \int (x+5-4x^{-2})dx$

$$= \frac{x^2}{2} + 5x + 4x^{-1} + c$$

SCILAB

```
-->syms x
-->fx = (x^3+5*x^2-4)/x^2;
-->integ(fx, x)
 ans  =
 (x^2+10*x)/2+4/x
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.2 จงหาปริพันธ์ของ $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

วิธีทำ $\int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}})dx \quad = \quad \int \frac{1}{x^2}dx \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \; \int x^{-2}dx - \int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{x} - x^{\frac{1}{2}} + c \\
&= -\frac{1}{x} - \sqrt{x} + c
\end{aligned}
$$

โจทย์ของนี้สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรม SCILAB ได้ดังนี้

```
-->syms x

-->y = 1/x^2 - 1/(2*sqrt(x));

-->integ(y, x)
 ans  =
 -sqrt(x)-1/x
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.3 จงหาปริพันธ์ของ $y = \dfrac{6}{\sqrt{x}} - 8\sqrt{x}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x}\right)dx &= \int 6x^{-\frac{1}{2}}dx + \int 8x^{\frac{1}{2}}dx \\
&= 6\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 8\int x^{\frac{1}{2}}dx \\
&= 12x^{\frac{1}{2}} + \frac{16x^{\frac{3}{2}}}{3} + c \\
&= 12\sqrt{x} + 16x\sqrt{x} + c
\end{aligned}
$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = 6/sqrt(x) + 8*sqrt(x);
-->integ(fx, x)
 ans  =
 16*x^(3/2)/3+12*sqrt(x)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.4 จงหาปริพันธ์ของ $\int_0^1 x^2\left(x^2+1\right)^2 dx$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2(x^2+1)^2 dx &= \int_0^1 (x^6 + 2x^4 + x^2)dx \\
&= \left(\frac{x^7}{7} + \frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - 0 \\
&= \frac{92}{105}
\end{aligned}
$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = x^2*(x^2+1)^2;
-->integ(fx, x, 0, 1)
 ans  =
 92/105
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.5 จงหาค่าของ $\int \frac{x}{x^2+1}dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2+1$ จะได้ว่า $du = 2xdx$ ดังนั้น

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

แทนค่า $u = x^2+1$ กลับเข้าไป จะได้

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

SCILAB

```
-->syms x
-->integ(x/(x^2+1), x)
 ans  =
 log(x^2+1)/2
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.6 จงหาค่าของ $\int x\tan^{-1}(x)dx$

วิธีทำ ในที่นี้จะให้ $u = \tan^{-1}(x)$ และ $dv = xdx$

ดังนั้น $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ และ $v = \frac{x^2}{2}$

แทนค่าในสูตร $\int udv = uv - \int vdu$ จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\begin{aligned}
\int x\tan^{-1}(x)dx &= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x) - \int\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\left(x-\tan^{-1}x\right) + c
\end{aligned}$$

SCILAB

```
-->syms x
-->integ(x*atan(x), x)
 ans  =
 x^2*atan(x)/2-(x-atan(x))/2
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.7 จงหาค่าของ $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1-x^3$ จะได้ว่า $du = -3x^2dx$ ดังนั้น

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{3}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + c = -\frac{2}{3}\sqrt{u} + c$$

แทนค่า $u = 1-x^3$ กลับเข้าไป จะได้ $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + c$

SCILAB

```
-->syms x
-->integ(x^2/sqrt(1-x^3), x)
 ans  =
 -2*sqrt(1-x^3)/3
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.8 จงหาค่าของ $\int x\sin xdx$

วิธีทำ ในที่นี้จะให้ $u = x$ และ $dv = \sin xdx$

ดังนั้น $du = dx$ และ $v = \int \sin xdx = -cosx$

แทนค่าในสูตร $\int udv = uv - \int vdu$ จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\int x\sin xdx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

SCILAB

```
-->syms x
-->integ(x*sin(x), x)
 ans  =
 (x)-x*cos(x)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.9 จงหาค่าของ $\int \sin^4 x\cos^3 xdx$

วิธีทำ ในที่นี้ $\cos(x)$ ยกกำลังคี่ให้แยก $\cos^3 x$ ออกเป็น $\cos^2(x)\cos(x)$ แล้วใช้เอกลักษณ์ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ และ $d(\sin x) = \cos(x)dx$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\int \sin^4 x\cos^3 xdx = \int(\sin^4 x)(\cos^2 x)(\cos xdx)$$

$$= \int\left[\sin^4(x)\left(1-\sin^2 x\right)\right]d\sin x$$

$$= \int(\sin^4 x - \sin^6 x)d\sin x$$

$$= \int \sin^4(x)d\sin x - \int \sin^6(x)d\sin x$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^6 x}{7} + c$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = sin(x)^4*cos(x)^3;
-->integ(y, x)
 ans  =
 (7*sin(x)^5-5*sin(x)^7)/35
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.10 จงหาค่าของ $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

วิธีทำ ในที่นี้ฟังก์ชันมีพจน์ $\sqrt{x^2-9}$ อยู่ในรูปแบบ 2 ดังนั้น จะให้

$x = 3\sec\theta$ จะได้ $dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta$

และ $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\tan^2\theta} = 3\tan\theta$ หรือ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right)$

ดังนั้น $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int\left[\frac{(3\tan\theta)(3\sec\theta\tan\theta)}{3\sec\theta}\right]d\theta$

$$=3\int \tan^2\theta d\theta$$

$$=3\int (\sec^2-1)d\theta$$

$$=3(\tan\theta-1)+c$$

SCILAB

```
-->syms x
-->y = sqrt(x^2-9)/x;
-->integ(y, x)
 ans  =
 3*asin(3/abs(x))+sqrt(x^2-9)
```

แทนค่า $\tan\theta$ และ θ ในรูปของ x จะได้ว่า

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\sqrt{x^2-9}-3\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right)+c$$

ตัวอย่างที่ 2.5.4.11 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\int \cos(u)\,du=\sin(u)+c$$

$$\int \sin(u)\,du=-\cos(u)+c$$

$$\int \sec^2(u)\,du=\tan(u)+c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(u)\,du=-\cot(u)+c$$

$$\int \sec(u)\tan(u)\,du=\sec(u)+c$$

$$\int \operatorname{cosec}(u)\cot(u)\,du=-\operatorname{cosec}(u)+c$$

วิธีทำ

SCILAB

```
-->syms u
-->integ(cos(u), u)
 ans  =
 sin(u)
-->integ(sin(u), u)
 ans  =
 -cos(u)
-->integ(1/cos(u)^2, u)
 ans  =
 tan(u)
```

$\ldots ec(u)=1/\sin(u),$

SCILAB

```
-->syms u
-->integ(1/sin(u)^2, u)
 ans  =
 -1/tan(u)
-->integ(sin(u)/cos(u)^2, u)
 ans  =
 1/cos(u)
-->integ(cos(u)/sin(u)^2, u)
 ans  =
 -1/sin(u)
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.12 จงแสดงให้เห็นว่า $\int e^x\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}e^x\left(\cos(x)+\sin(x)\right)+c$

วิธีทำ โจทย์ของนี้สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรม SCILAB ได้ดังนี้

```
-->syms x
-->integ(exp(x)*cos(x), x)
 ans  =
 %e^x*(sin(x)+cos(x))/2
```

ตัวอย่างที่ 2.5.4.13 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\int \sin(bx)\,dx = \frac{-1}{b}\cos(bx) + c \qquad \int \sec^2(bx)\,dx = \frac{1}{b}\tan(bx) + c$$

วิธีทำ

```
-->syms b x
-->integ(sin(b*x),x)
 ans  =
 -cos(b*x)/b
-->integ(1/cos(b*x)^2,x)
 ans  =
 2*sin(2*b*x)/(b*sin(2*b*x)^2+b*cos(2*b*x)^2+2*b*cos(2*b*x)+b)
-->simple(ans)
 ans  =
 sin(b*x)/(b*cos(b*x))
```

//เท่ากับ $\frac{1}{b}\tan(bx)$

---

3. ข้อควรทราบในการใช้งาน Symbolic toolbox

ในส่วนนี้จะสรุปข้อควรระวังในการใช้งาน Symbolic toolbox ดังนี้

- คำสั่งบางคำสั่งอาจจะใช้เวลาในการประมวลผล**นาน** ซึ่งเป็นผลมาจากการติดต่อสื่อสารระหว่างโปรแกรม SCILAB และโปรแกรม MAXIMA ผ่านทางโปรแกรม PERL
- ฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่ซับซ้อนเกินไป โปรแกรม SCILAB อาจจะไม่สามารถใช้คำนวณหาผลลัพธ์ได้ วิธีการแก้ไขคือ ให้ผู้ใช้ลองลดรูปสมการก่อน แล้วจึง ใช้คำสั่งใน Symbolic toolbox อาจจะช่วยแก้ไขปัญหานี้ได้บ้าง (แต่ไม่ทุกครั้งเสมอไป)

- ในกรณีที่หาค่า**ลิมิต** (limit) แล้วได้ผลลัพธ์ไม่เป็นไปตามที่ต้องการ เช่น ได้ค่าอนันต์หรือค่าแปลกๆ ให้ผู้ใช้ลองเปลี่ยนค่าของการหาลิมิตเป็นค่าอื่นที่ใกล้เคียงกับค่าเดิม ตัวอย่างเช่น จากเดิม $n \to \infty$ ให้ลองเปลี่ยนเป็น $n \to 1000$ หรือจากเดิม $n \to 0$ ให้ลองเปลี่ยนเป็น $n \to 0.0001$ เป็นต้น
- ในกรณีที่หาค่า**ผลรวมของอนุกรม** (series summation) แล้วได้ผลลัพธ์ไม่เป็นไปตามที่ต้องการหรือมีข้อผิดพลาดเกิดขึ้น ให้ผู้ใช้ลองเปลี่ยนค่าขอบเขตบนของการหาผลรวมเป็นค่าอื่นที่ใกล้เคียงกับค่าเดิม ตัวอย่างเช่น จากเดิม $k = \infty$ ให้ลองเปลี่ยนเป็น $k = 1000$ เป็นต้น
- หากใช้งานโปรแกรม SCILAB ในการคำนวณเชิงสัญลักษณ์ แล้วเกิดปัญหาโปรแกรมทำงานช้ามาก ให้ผู้ใช้**ปิด**โปรแกรม SCILAB แล้ว**เปิด**โปรแกรม SCILAB ขึ้นมาใหม่ แล้วใช้คำสั่ง `restartserver` ที่อยู่ใน Symbolic toolbox เพื่อกำหนดค่าเริ่มต้นใหม่ให้กับโปรแกรม PERL และ MAXIMA

4. เอกสารอ้างอิง

[1] ปิยะ โควินท์ทวีวัฒน์, ***คู่มือโปรแกรมภาษา SCILAB สำหรับผู้เริ่มต้น (ฉบับปรับปรุงใหม่)***, เพชรเกษมการพิมพ์, 2551

[2] Jean-François Magni, "***Scilab Symbolic Toolbox***," Retrieved on August 20, 2009 from http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Magni/s_sym