การประยุกต์การใช้งานโปรแกรม SCILAB กับสมการพหุนาม

1. การแก้สมการพหุนามที่มีตัวแปรเดียว

สมการพหุนาม (polynomial equation) ที่มีตัวแปรเดียวหมายถึงสมการที่อยู่ในรูป

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 = 0$$

เมื่อ a_n , a_{n-1} , ... , a_1 , a_0 เป็นค่าคงตัว x เป็นตัวแปร และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ นอกจากนี้ถ้า $a_n \neq 0$ จะเรียกสมการพหุนามนี้ว่า สมการพหุนามดีกรี (degree) n ตัวอย่างเช่น

(1) $2x +1 = 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 1

(2) $2x^2+3x+1 = 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 2

(3) $3x^3+2x^2-12x-8 = 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 3

2. ทบทวนการแก้สมการพหุนามอย่างง่าย

สมการพหุนามสามารถที่จะถูกแยกตัวประกอบได้อย่างง่ายๆ ได้ เช่น ทำให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง ผลบวกของกำลังสาม หรือ ผลต่างของกำลังสาม อันได้แก่สูตร

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการแก้สมการพหุนามอย่างง่าย

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $x^2-4x+3 = 0$

วิธีทำ

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x-1 = 0 \text{ หรือ } x-3 = 0$$

นั่นคือ x=1 หรือ x=3

คำตอบของสมการคือ x = {1,3}

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->s = x^2 - 4*x + 3
 s  =
               2
    3 - 4x + x
-->roots(s)   //คำสั่งหารากของคำตอบของสมการพหุนาม
 ans  =
    1.
    3.
```

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $4x^2 - 2x - 3 = 0$

วิธีทำ ถ้ากำหนด $ax^2+bx+c=0$ $a \neq 0$ จะได้ว่า

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เนื่องจาก a = 4 , b = -2 , c = -3 แทนค่าจะได้

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{8}$$

$$x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}$$

คำตอบของสมการคือ $x = \{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}\}$

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->s =4*x^2 - 2*x - 3
 s  =
                  2
  - 3 - 2x + 4x
-->roots(s)
 ans  =
 - 0.6513878       //ประมาณ (1-√13)/4
   1.1513878       //ประมาณ (1+√13)/4
```

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

วิธีทำ $(x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0$

และใช้วิธีการแยกตัวประกอบ จะได้

$$(x^2-4)(x^2-1) = 0$$

$$(x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$$

ดังนั้น x+2 = 0 หรือ x-2 = 0 หรือ x+1 = 0 หรือ x -1 = 0

นั่นคือ x = -2 หรือ x = 2 หรือ x = -1 หรือ x = 1

คำตอบของสมการคือ x = {-2 ,2 , -1 ,1}

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->s = x^4 - 5*x^2 + 4
 s  =
            2    4
    4 - 5x + x
-->roots(s)
 ans  =
    1.
  - 1.
  - 2.
    2.
```

3. การหารสังเคราะห์

การหารสังเคราะห์ (Synthetic division) เป็นเรื่องที่ว่าด้วยการหารพหุนาม (ของตัวแปร x) ที่มีดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 ด้วยพหุนามที่อยู่ในรูป x - a เมื่อ a $\neq$ 0 เช่น

$$\frac{2x^3 - x^2 - 8x + 15}{x-2} = ?$$

ด้วยวิธีการหารยาวเราสามารถหาผลหารได้ดังนี้

$$\begin{array}{r}
2x^2+3x-2 \\
x-2\,\overline{)\,2x^3-x^2-8x+15} \\
\underline{2x^3-4x^2} \qquad\qquad \\
3x^2-8x \qquad \\
\underline{3x^2-6x} \qquad \\
-2x+15 \\
\underline{-2x+4} \\
\underline{\underline{11}}
\end{array}$$

ดังนั้น $\dfrac{2x^3-x^2-8x+15}{x-2}=2x^2+3x-2+\dfrac{11}{x-2}$

วิธีการหารยาวดังกล่าว ค่อนข้างจะเสียเวลา การหารสังเคราะห์เป็นวิธีลัดในการหาผลหารและหาเศษจากการหาร จากตัวอย่างข้างต้นที่กล่าวไปแล้ว จะพบว่ามีตัวเลขบางตัวเกิดซ้ำเช่น 2, 3 และ -2 ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของผลหาร จะเกิดขึ้นในระหว่างการหารสามครั้งและตัวเลข -8, 15 ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของสองพจน์สุดท้ายของตัวตั้งเกิดซ้ำในระหว่างการหารสองครั้ง ถ้าเรานำกระบวนการหารยาวดังกล่าวมาเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปสามแถว ดังนี้

-2	2	-1	-8	15	แถวที่ 1
		-4	-6	4	แถวที่ 2
	2	3	-2	11	แถวที่ 3

จากการสังเกตจะพบว่า จำนวนแต่ละจำนวนในแถวที่ 2 เกิดจากการนำ -2 คูณกับจำนวนที่มาก่อนของแถวที่ 3 เช่น

-4 เกิดจาก การนำ -2 คูณกับ 2

-6 เกิดจาก การนำ -2 คูณกับ 3

4 เกิดจาก การนำ -2 คูณกับ -2

นอกจากนี้จำนวนแต่ละจำนวนในแถวที่สาม (ยกเว้นจำนวนแรก) เกิดจากผลต่างระหว่างจำนวนในแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน เช่น

-3 เกิดจาก -1 – (- 4)

-2 เกิดจาก -8 – (- 6)

11 เกิดจาก 15 – 4

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $(x^3+x^2-18x+18)\div(x-3)$

วิธีทำ ในที่นี้ x - a = x – 3 ดังนั้น a = 3

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 1 & -18 & 18 \\ & & 3 & 12 & -18 \\ \hline & 1 & 4 & -6 & 0 \end{array}$$

ดังนั้น

$$(x^3+x^2-18x+18)\div(x-3) \;=\; x^2+4x-6$$

หรือ

$$(x^3+x^2-18x+18) \;=\; (x-3)(x^2+4x-6)$$

ในตัวอย่างนี้เศษจากการหารเท่ากับ 0 แสดงว่าหารลงตัว

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->s =x^3+x^2-18*x+18
 s  =
                 2   3
    18 - 18x + x + x
-->t =x-3
 t  =
  - 3 + x
-->[n,d] = pdiv(s,t) //คำสั่งที่ใช้หาร
 d  = //จำนวนเต็มที่ได้จากการหาร
               2
  - 6 + 4x + x
 n  =        //เศษที่ได้จากการหาร
    0.
```

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $(3x^4+2x^2+3x-5)\div(x+1)$

วิธีทำ ในที่นี้ x – a = x + 1 = x – (-1)

ดังนั้น a = -1

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 3 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ & & -3 & 3 & -5 & 2 \\ \hline & 3 & -3 & 5 & -2 & -3 \end{array}$$

ดังนั้น

$$\frac{3x^4+2x^2+3x-5}{x+1} = 3x^3-3x^2+5x-2-\frac{3}{x+1}$$

หรือ

$$(3x^4+2x^2+3x-5) = (x+1)(3x^3-3x^2+5x-3)-3$$

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->s = 3*x^4 + 2*x^2 + 3*x - 5
 s  =
             2    4
  - 5 + 3x + 2x + 3x
-->t = x+1
 t  =
    1 + x
-->[n,d] = pdiv(s,t)
 d  =        //จำนวนเต็มที่ได้จากการหาร
             2    3
  - 2 + 5x - 3x + 3x
 n  =        //เศษที่ได้จากการหาร
  - 3.
```

4. ทฤษฎีบทการหาร (division algorithm)

ถ้า p(x) และ q(x) เป็นพหุนาม โดยที่ q(x) $\neq$ 0 แล้ว จะมีพหุนาม s(x) และ r(x) ซึ่งทำให้

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

หรือ $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ โดยที่ $r(x) = 0$ หรือ $r(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีน้อยกว่าดีกรีของ $q(x)$

<u>**ตัวอย่างที่ 6**</u> กำหนดให้ $p(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 8$ และ $q(x) = x^2 + 4x - 2$ จงหาผลหาร s(x) และเศษ r(x) จากการหาร p(x) ด้วย q(x)

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{x}^2 \text{ - 7x } + 25 \\
x^2 + 4x - 2 \big) & x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x - 8 \\
 & \underline{x^4 + 4x^3 - 2x^2} \\
 & \quad -7x^3 - 3x^2 + x \\
 & \quad \underline{-7x^3 - 28x^2 + 14x} \\
 & \qquad\qquad 25x^2 - 13x - 8 \\
 & \qquad\qquad \underline{25x^2 + 100x - 50} \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{\underline{-113x + 42}}
\end{array}
$$

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->p = x^4-3*x^3-5*x^2+x-8
 p  =
                 2    3    4
  - 8 + x - 5x - 3x + x
-->q = x^2 + 4*x -2
 q  =
                 2
  - 2 + 4x + x
-->[n,d] = pdiv(p,q)
 d  =                  //จำนวนเต็มที่ได้จากการหาร
                  2
    25 - 7x + x
 n  =                  //เศษที่ได้จากการหาร
    42 - 113x
```

ดังนั้นผลหารคือ $s(x) = x^2 - 7x + 25$

และเศษที่ได้จากการหารคือ $r(x) = -113x + 42$

นั่นคือ $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 8 = (x^2 - 7x + 25)(x^2 + 4x - 2) + (-113x + 42)$

<u>**บทนิยาม**</u> พหุนาม q(x) เป็นตัวประกอบของพหุนาม p(x) ก็ต่อเมื่อมีพหุนาม s(x) ซึ่งทำให้

$$p(x) = q(x)s(x)$$

5. ทฤษฎีบทตัวประกอบ (factor theorem)

กำหนดพหุนาม p(x) และ a เป็นจำนวนจริง

(1) ถ้า x-a เป็นตัวประกอบของ p(x) แล้ว p(a) = 0

(2) ถ้า p(a) = 0 แล้ว x-a จะเป็นตัวประกอบของ p(x)

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $p(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$

ก) จงแสดงว่า x -1 เป็นตัวประกอบของ p(x)

ข) จงหารพหุนาม s(x) ซึ่งทำให้ p(x) = (x - 1)s(x)

วิธีทำ

1		3	0	-5	0	0	2
			3	-2	-2	-2	-2
	3	3	-2	-2	-2	0	

เศษเท่ากับ 0 = p(1)

ก) จะพบว่า เศษ = p(1) = 0 ดังนั้น

x-1 เป็นตัวประกอบของ p(x)

ข) จากการหารสังเคราะห์ พบว่า s(x) = $3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x - 2$

นั่นคือ p(x) = $(x-1)(3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x - 2)$

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->p = 3*x^5 - 5*x^3 + 2
 p  =
             3     5
    2 - 5x + 3x
-->q = x - 1
 q  =
  - 1 + x
-->[n,s] = pdiv(p,q)
 s  =
                      2     3     4
  - 2 - 2x - 2x + 3x + 3x
 n  =
    0.
```

ตัวอย่างที่ 8 ถ้าพหุนาม $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$

ก) จงแสดงว่า x +1 เป็นตัวประกอบของ p(x)

ข) จงแยกตัวประกอบของ p(x)

วิธีทำ

ก) ในที่นี้ x – a = x + 1 = x – (-1) จะได้ว่า a = - 1

ดังนั้น $p(-1) = 3(-1)^3 - 4(-1)^2 - 3(-1) + 4 = 0$

จากทฤษฎีบทตัวประกอบจะได้ว่า x +1 เป็นตัวประกอบของ p(x)

ข) จากตัวประกอบอื่นๆ ของ p(x)

-1	3	-4	-3	4
		-3	7	-4
	3	-7	4	0

ดังนั้น

$$3x^3 - 4x^2 - 3x + 4 = (x+1)(3x^2 - 7x + 4)$$
$$= (x+1)(3x-4)(x-1)$$

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->p = 3*x^3-4*x^2-3*x+4
 p  =
                 2     3
    4 - 3x - 4x + 3x
-->q = x + 1
 q  =
    1 + x
-->[n,d] = pdiv(p,q)
 d  =
                 2
    4 - 7x + 3x
 n  =
    0.
-->s = factors(p)
 s  =
       s(1)
  - 1 + x
       s(2)
    1 + x
       s(3)
 - 1.3333333 + x
```

6. **ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ** (rational factor theorem)

กำหนดพหุนาม

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, ..., a_1 a_0$ เป็นจำนวนเต็ม n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n \neq 0$ ถ้า $x - \frac{c}{d}$ เป็นตัวประกอบของ p(x) เมื่อ c และ d เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $d \neq 0$ และตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ c และ d คือ 1 ดังนั้นจะได้ว่า c เป็นตัวประกอบของ a_0 (c หาร a_0 ลงตัว) และ d เป็นตัวประกอบของ a_n (dหาร a_n ลงตัว)

<u>**ตัวอย่างที่ 9**</u> จงแก้สมการ $3x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ ดังนั้นจำนวนเต็ม c ที่หาร 4 ลงตัวได้แก่ 1, -1, 2, -2, 4, -4 และจำนวนเต็ม d ที่หาร 3 ลงตัวได้แก่ 1,-1,3,-3 เพราะฉะนั้นจำนวนตรรกยะ c/d เมื่อ ห.ร.ม. ของ c และ d เท่ากับ 1 ได้แก่

$$1, -1, 2, -2, 4, -4, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$$

```
SCILAB:
-->x = poly(0,'x');
-->p = 3*x^3+5*x^2+8*x+4
 p =
              2    3
   4 + 8x + 5x + 3x
-->s = roots(p)
 s =
  - 0.6666667
  - 0.5 + 1.3228757i
  - 0.5 - 1.3228757i
```

ตรวจสอบค่าของ $p(c/d)$ จะพบว่า $p(-2/3) = 0$

ดังนั้น

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 3 & 5 & 8 & 4 \\ & & -2 & -2 & -4 \\ \hline & 3 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

แสดงว่า $x + \frac{2}{3}$ เป็นตัวประกอบของ p(x) และ

$$3x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(3x^2 + 3x + 6\right)$$

ดังนั้นจากสมการที่กำหนดให้จะได้ว่า $(x + \frac{2}{3})(3x^2 + 3x + 6) = 0$

ดังนั้น $x + \frac{2}{3} = 0$ หรือ $3x^2 + 3x + 6 = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ หรือ $x^2 + x + 3 = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ หรือ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (เป็นจำนวนเชิงซ้อน)

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงแยกตัวประกอบของ $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ $p(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$

จำนวนเต็ม c ที่หาร -2 ลงตัวได้แก่ 1,-1,2,-2

จำนวนเต็ม d ที่หาร 3 ลงตัวได้แก่ 1,-1,3,-3

ดังนั้นจำนวนตรรกยะ c/d เมื่อ ห.ร.ม. ของc และ d เท่ากับ 1 จะได้จำนวนตรรกยะต่อไปนี้

$$1,-1,2,-2,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$$

ตรวจสอบค่าของ $p(\frac{c}{d})$ จะพบว่า $p(1) = 0$ ดังนั้น

$$\begin{array}{c|cccc} \underline{1} & 3 & -10 & 9 & -2 \\ & & 3 & -7 & 2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & 0 \end{array}$$

SCILAB:

```
-->x = poly(0,'x');
-->p = 3*x^3 - 10*x^2 + 9*x - 2
 p  =
                    2     3
  - 2 + 9x - 10x + 3x
-->s = factors(p)
 s  =
       s(1)
  - 0.3333333 + x
       s(2)
  - 1 + x
       s(3)
  - 2 + x
```

ดังนั้น x – 1 เป็นตัวประกอบของ p(x) และ

$$3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = (x-1)(3x^2 - 7x + 2) = (x-1)(3x-1)(x-2)$$