



มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

# Communication Engineering Systems

## Sampling Theorem & Pulse Code Modulation (9)

---

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

<http://home.npru.ac.th/piya>



*“All things are difficult before they are easy”*

โปรแกรมวิศวกรรมโทรคมนาคม

# Outline



## □ การชักตัวอย่าง

- ทฤษฎีบทการชักตัวอย่างของไนควิสต์
- กระบวนการชักตัวอย่าง
- กระบวนการสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมา
- ความผิดเพี้ยนภาพ

## □ การแจกหน่วย

- วงจรแจกหน่วยเอกรูป
- การกล้ำสัญญาณเดลตา

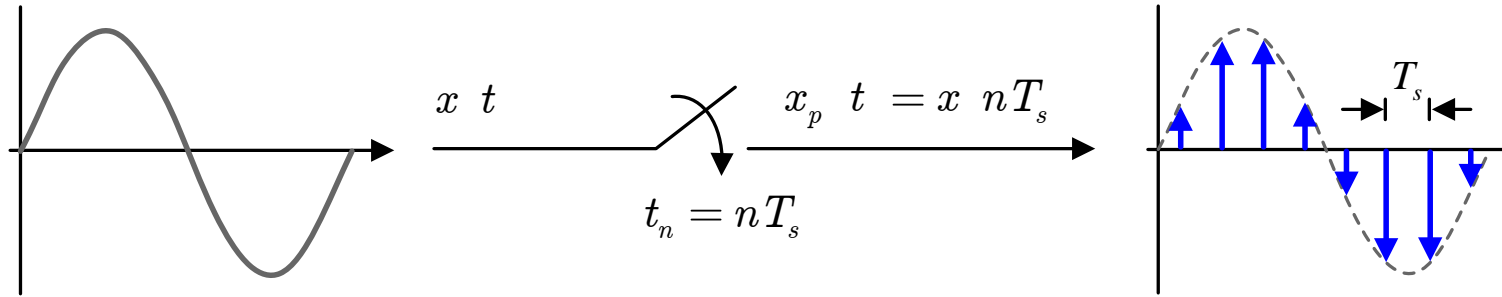
## □ การเข้ารหัสพีซีเอ็ม



- ระบบสื่อสารถูกออกแบบมาเพื่อใช้ส่งข่าวสารจากแหล่งต้นทางผ่านช่องสัญญาณไปยังแหล่งปลายทาง โดยข่าวสารที่ส่งเป็นได้ทั้ง
  - ข่าวสารที่เป็นข้อความ (textual information)
  - ข่าวสารแอนะล็อก (analog information)
  - ข่าวสารดิจิทัล (digital information)
- ระบบสื่อสารดิจิทัลจะถูกออกแบบมาเพื่อใช้ส่งเฉพาะข่าวสารดิจิทัล
  - ข่าวสารที่เป็นข้อความ  $\Rightarrow$  เข้รหัส  $\Rightarrow$  ข่าวสารดิจิทัล
  - ข่าวสารแอนะล็อก  $\Rightarrow$  ข่าวสารดิจิทัล โดยผ่าน**การกล้ำรหัสพัลส์** (PCM)
    - การชักตัวอย่าง (sampling)
    - การแจกหน่วย (quantization)
    - การเข้ารหัสพีซีเอ็ม (PCM encoding)



# การซ้กตัวอย่าง



$$x_p(t) = x(t) \Big|_{t=nT_s} = x(nT_s)$$

$T_s$  = คาบการซ้กตัวอย่าง

$x(nT_s)$  = แซมเปิล (sample)

$\{x(nT_s)\} = \{x(0), x(T_s), x(2T_s), \dots, x(nT_s)\}$  = ลำดับข้อมูล (data sequence)

- ต้องการให้ลำดับข้อมูล  $x(nT_s)$  เป็นตัวแทนหนึ่งเดียวของสัญญาณ  $x(t)$  เพื่อจะได้สามารถนำลำดับข้อมูล  $x(nT_s)$  มาสร้างสัญญาณ  $x(t)$  ให้กลับคืนมาเหมือนเดิมได้อย่างสมบูรณ์
  - เป็นจริงก็ต่อเมื่อ ระยะเวลาการซ้กตัวอย่างสอดคล้องกับ **ทฤษฎีบทการซ้กตัวอย่างของไนควิสต์** (Nyquist's sampling theorem)



# ทฤษฎีบทการซีกตัวอย่างของไนควิสต์



สัญญาณ  $x(t)$  = สัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัด (band-limited signal) ก็ต่อเมื่อ

$$X(f) = 0, \quad \text{สำหรับ } |f| < W$$

เมื่อ  $W$  คือความถี่สูงสุดของสัญญาณ  $x(t)$  มีหน่วยเป็นเฮิรตซ์

ถ้าต้องการให้ข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการซีกตัวอย่างเป็นตัวแทนหนึ่งเดียวของสัญญาณแอนะล็อก ก็ต้องซีกตัวอย่างสัญญาณ  $x(t)$  ด้วยความถี่การซีกตัวอย่าง

$$f_s \geq 2W, \quad \text{เมื่อ } f_s = 1/T_s$$

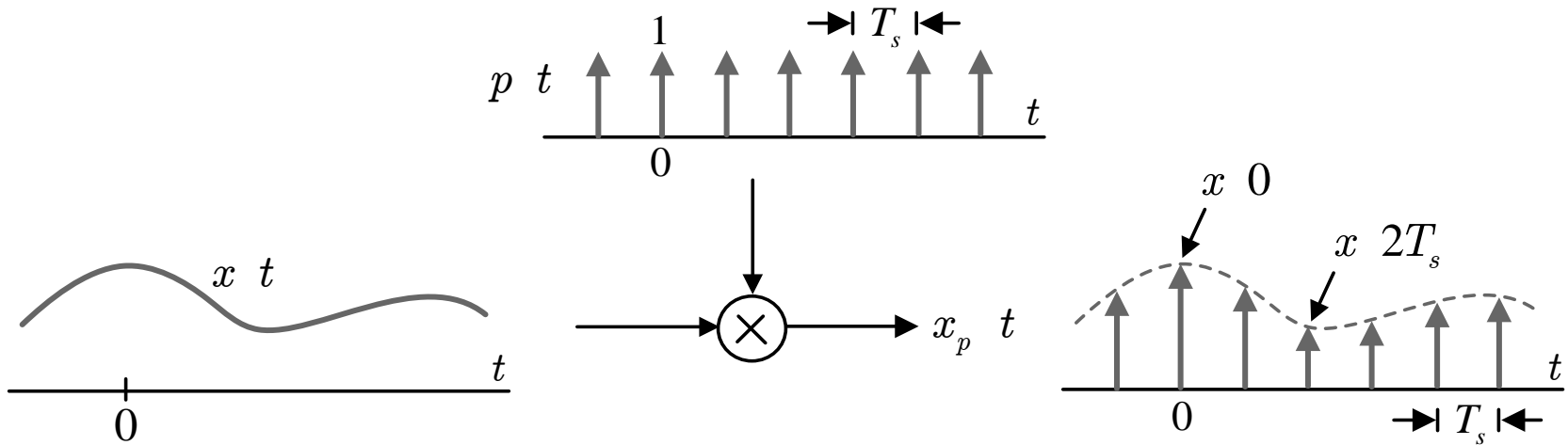
ความถี่การซีกตัวอย่างต่ำสุด  $f_s = 2W$  จะเรียกว่าอัตราไนควิสต์ (Nyquist rate) ถ้าทำการซีกตัวอย่างสัญญาณ  $x(t)$  ด้วยความถี่  $f_s < 2W$  ก็จะก่อให้เกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่าความผิดเพี้ยนภาพ (aliasing) ซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ต้องการในทุกงานประยุกต์



# กระบวนการชักตัวอย่าง



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \Leftrightarrow P(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s)$$



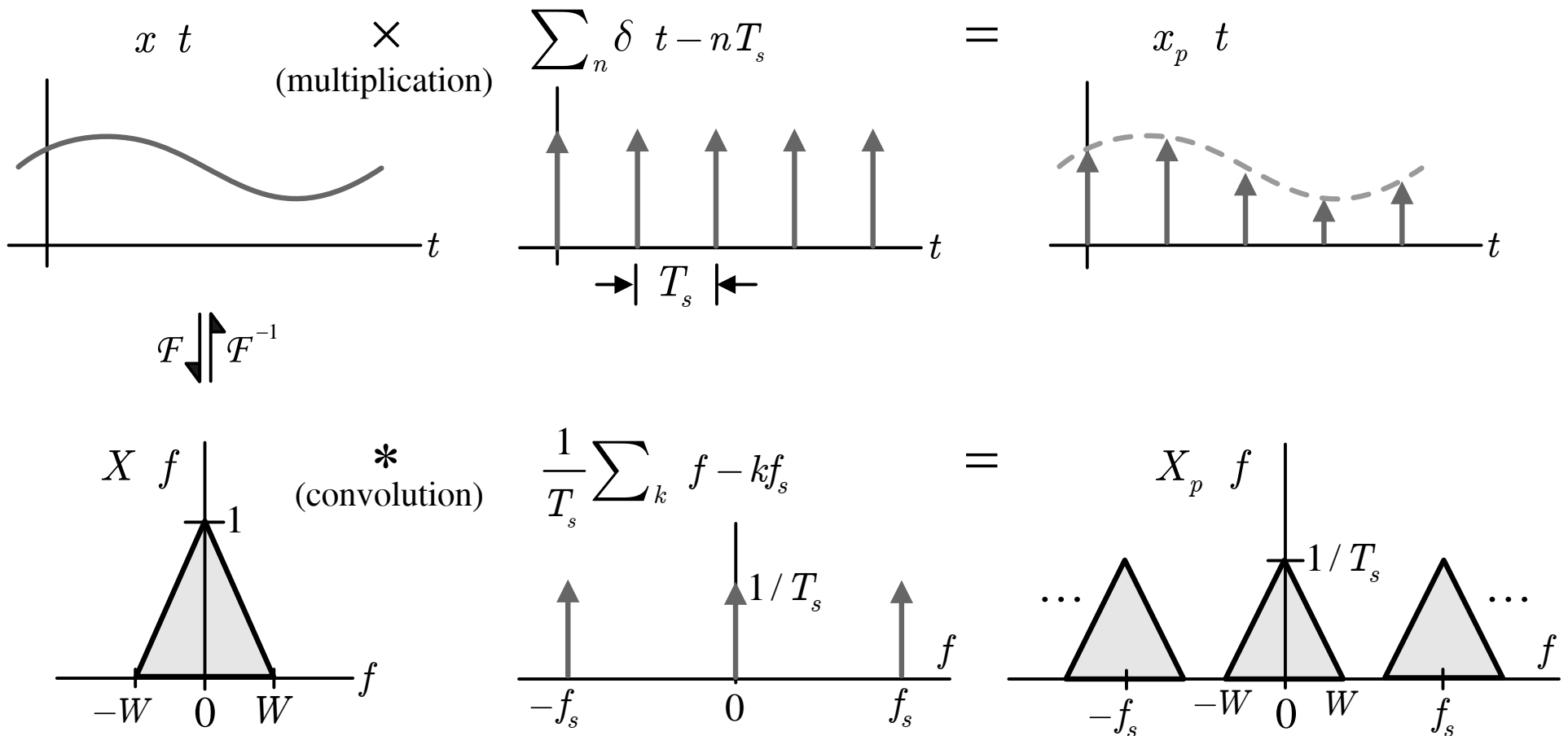
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$





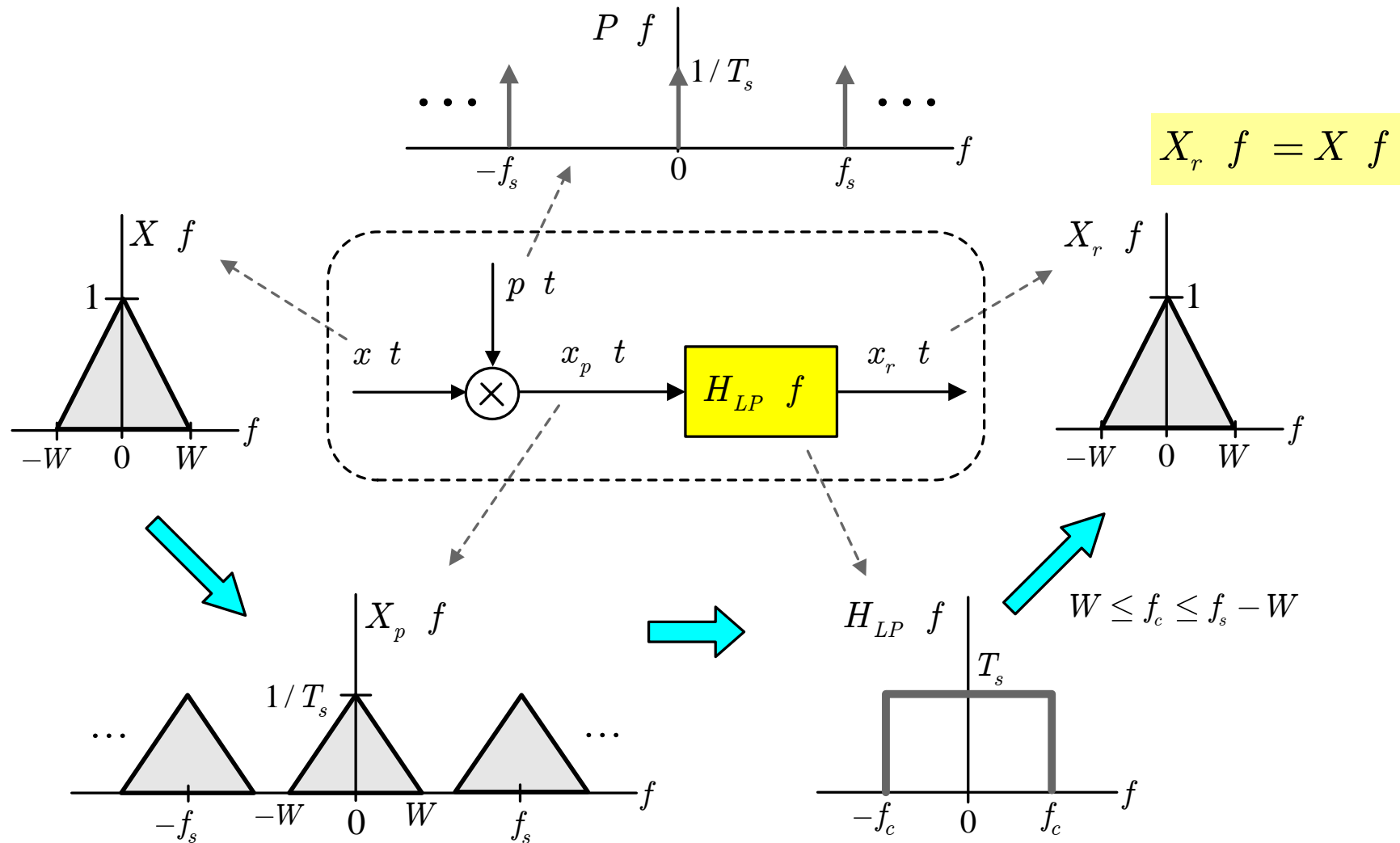
$$X_p f = \mathcal{F}[x_p t] = \mathcal{F}[x t p t] = \int_{-\infty}^{\infty} X \theta P f - \theta d\theta = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X f - kf_s$$

$$x_p t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x nT_s \delta t - nT_s \Leftrightarrow X_p f = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X f - kf_s$$





# การสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมาจากข้อมูลแซมเปิล



$$h_{LP}(t) = \frac{T_s \sin(2\pi f_c t)}{\pi t} = 2f_c T_s \text{sinc}(2\pi f_c t) \Leftrightarrow H_{LP}(f) = \begin{cases} T_s, & |f| \leq f_c \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

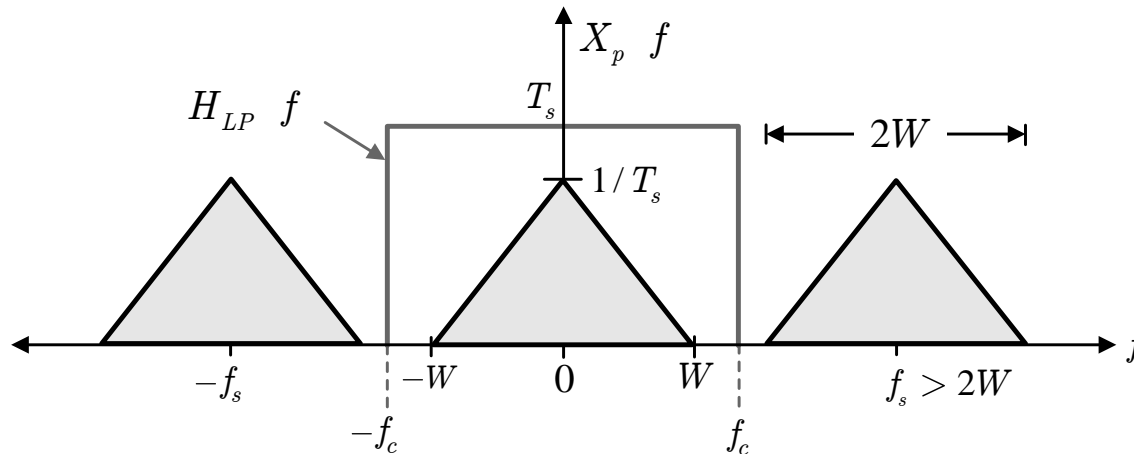






$$f_s \geq 2W$$

$$X_r(f) = X(f) = X_p(f) H_{LP}(f)$$



$$F^{-1}[X_r(f)] = x_r(t) = x_p(t) * h_{LP}(t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] * [2f_c T_s \text{sinc}(2\pi f_c t)]$$

$$= 2f_c T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}(2\pi f_c (t - nT_s))$$

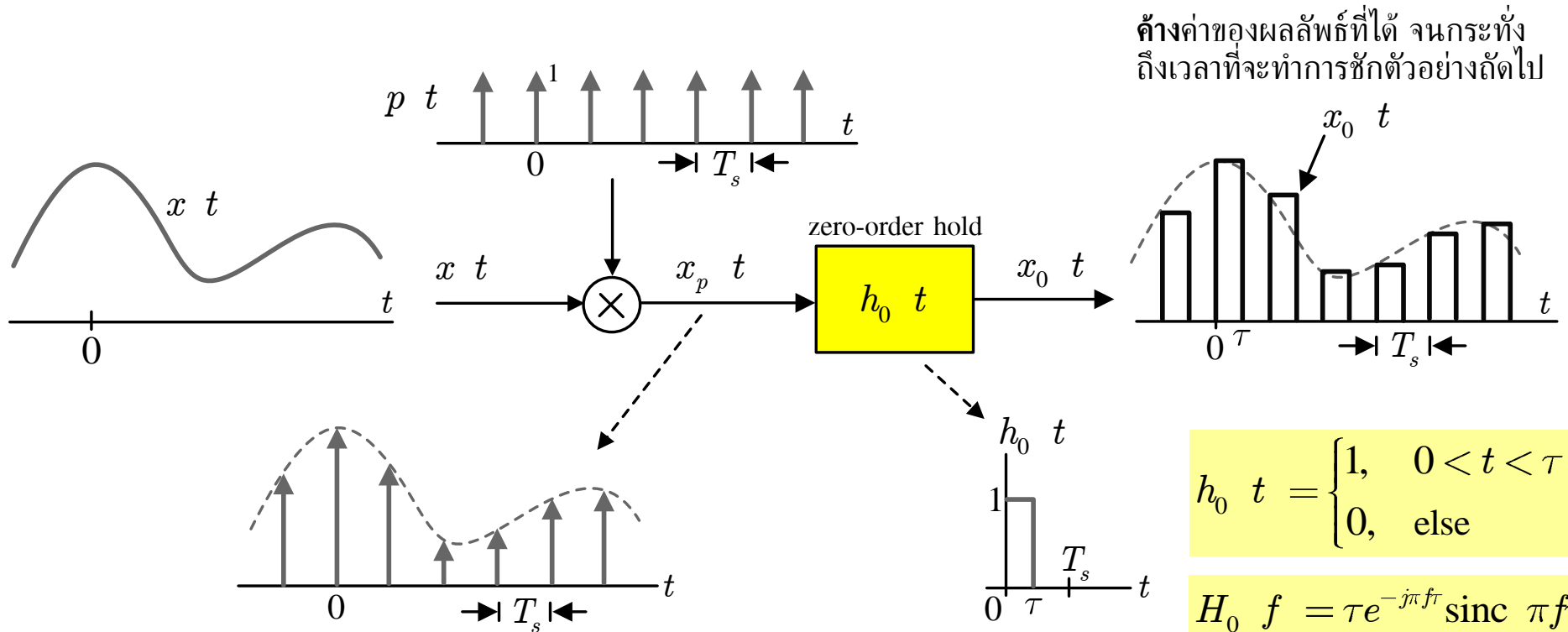
สูตรการประมาณค่าในช่วงของไนควิสต์และแซนอน (Nyquist-Shannon interpolation formula)



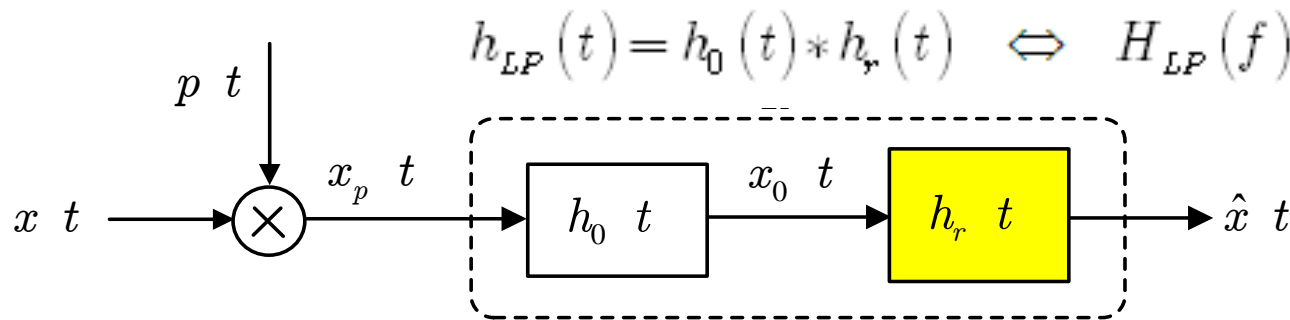


# การซ้กตัวอย่างด้วยวงจรกรองค่างอันดับศูนย์

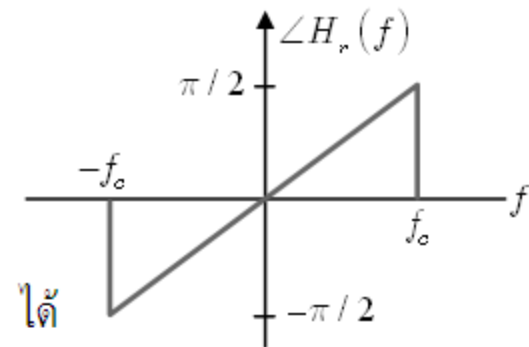
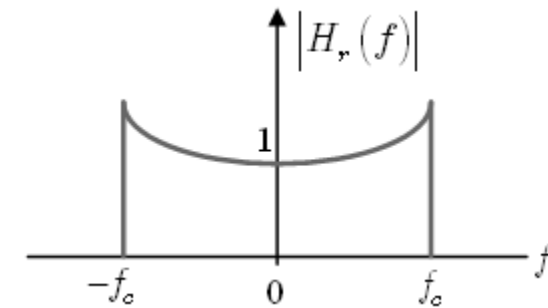
- สัญญาณ  $x_p(t)$  ที่ได้จากการซ้กตัวอย่างด้วยขบวนสัญญาณอิมพัลส์ไคแรกเดลตาจะมีลักษณะเป็นสัญญาณพัลส์ที่มีความกว้างของสัญญาณแคบและมีแอมพลิจูดสูงมาก  $\Rightarrow$  การสร้างและส่งสัญญาณ  $x_p(t)$  ไปยังปลายทาง**ทำได้ยาก**
  - แก้ไขโดย  $\Rightarrow$  ทำให้อยู่ในรูปของ**สัญญาณค่างอันดับศูนย์** (zero-order hold signal)



# □ การสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมา



$$h_{LP}(t) = h_0(t) * h_r(t) \Leftrightarrow H_{LP}(f) = H_0(f)H_r(f)$$

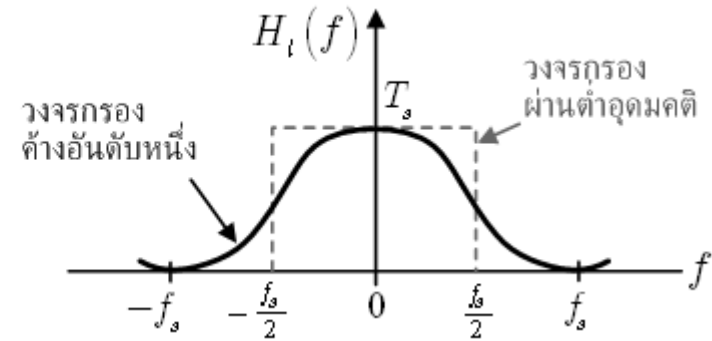
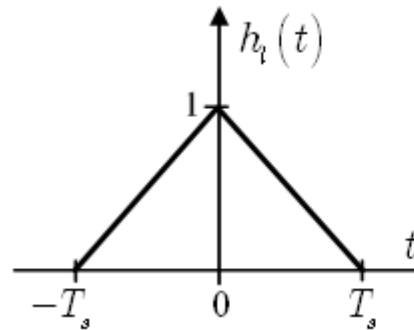


$$H_r(f) = \frac{H_{LP}(f)}{H_0(f)} = \frac{T_s}{T e^{-j\pi f T} \text{sinc}(\pi f T)} = \frac{T_s e^{j\pi f T}}{T \text{sinc}(\pi f T)}$$

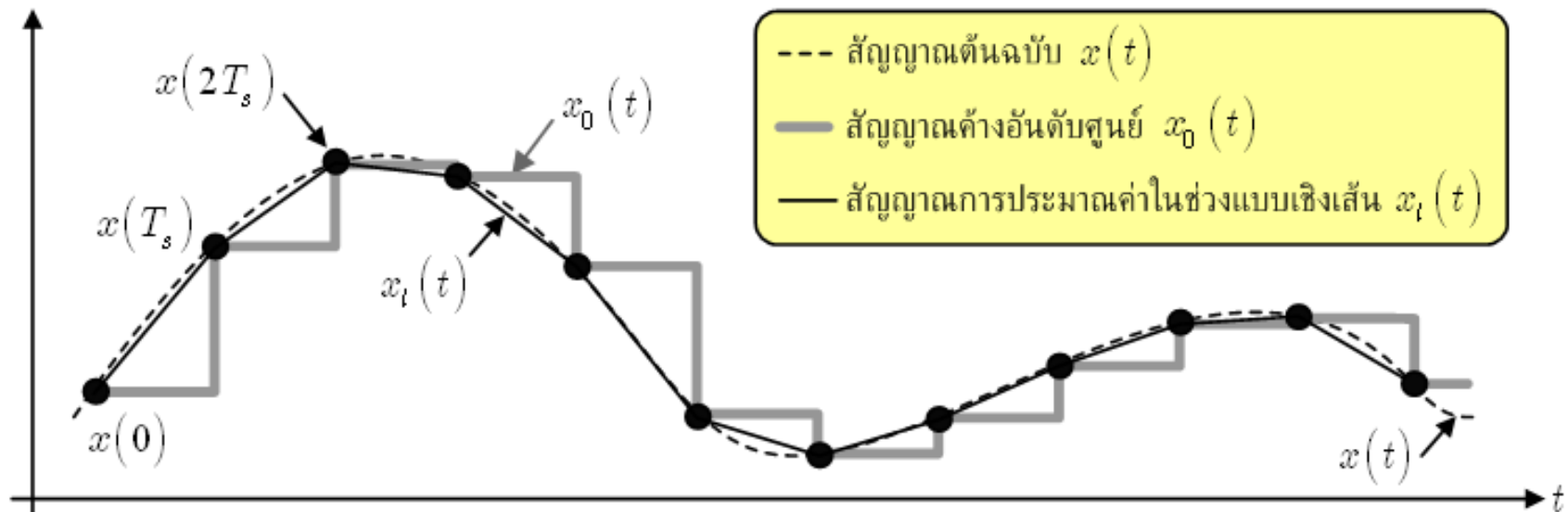
ในหลายกรณีสัญญาณค้ำอันดับศูนย์  $x_0(t)$  สามารถนำมาใช้แทนสัญญาณต้นฉบับ  $x(t)$  ได้ โดยไม่ต้องนำไปผ่านวงจรกรอง  $h_r(t)$  ถ้า  $f_s$  มีค่าสูงเพียงพอ หรืออาจใช้วิธีการประมาณค่าในช่วง (interpolation) ระหว่างข้อมูลแซมเปิลก็ได้

# ❑ วงจรกรองค้ำอันดับหนึ่ง (1st-order hold)

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_s}, & |t| \leq T_s \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

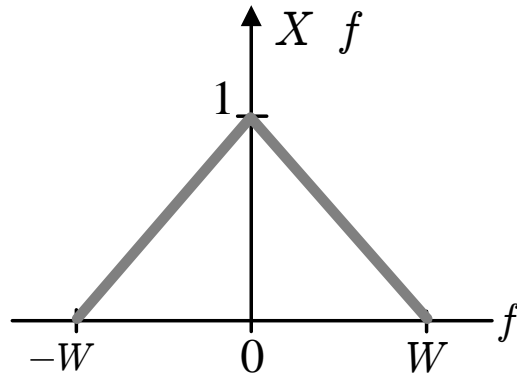


$$|H_1(f)| = \frac{1}{T_s} \left[ \frac{\sin \pi f T_s}{\pi f} \right]^2 = T_s \text{sinc}^2 \pi f T_s$$

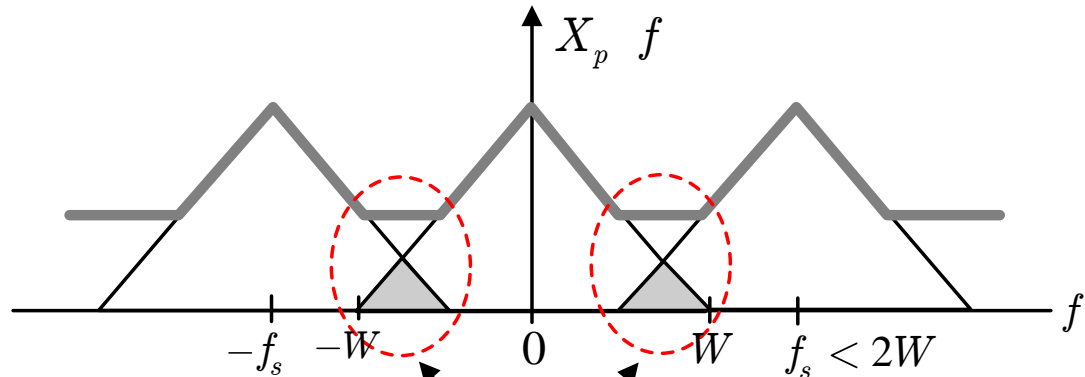


# ความผิดเพี้ยนภาพ

$$f_s < 2W$$



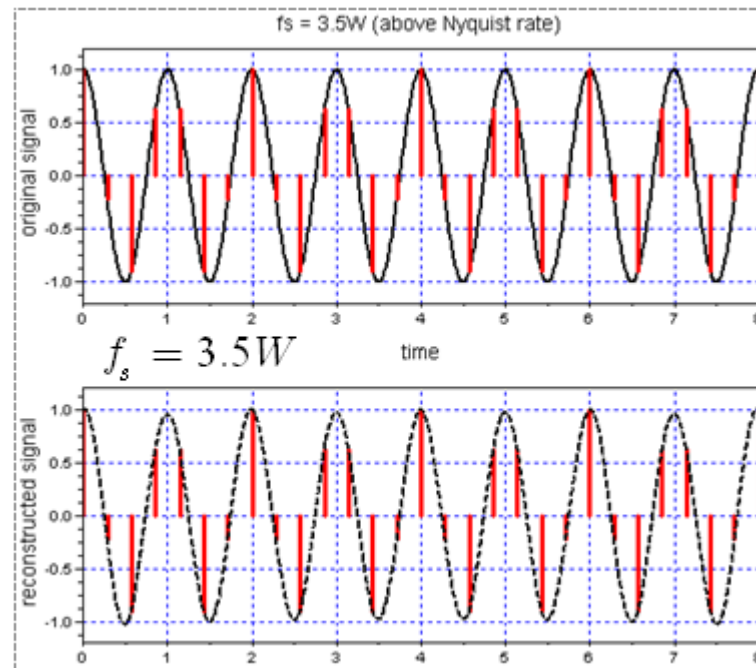
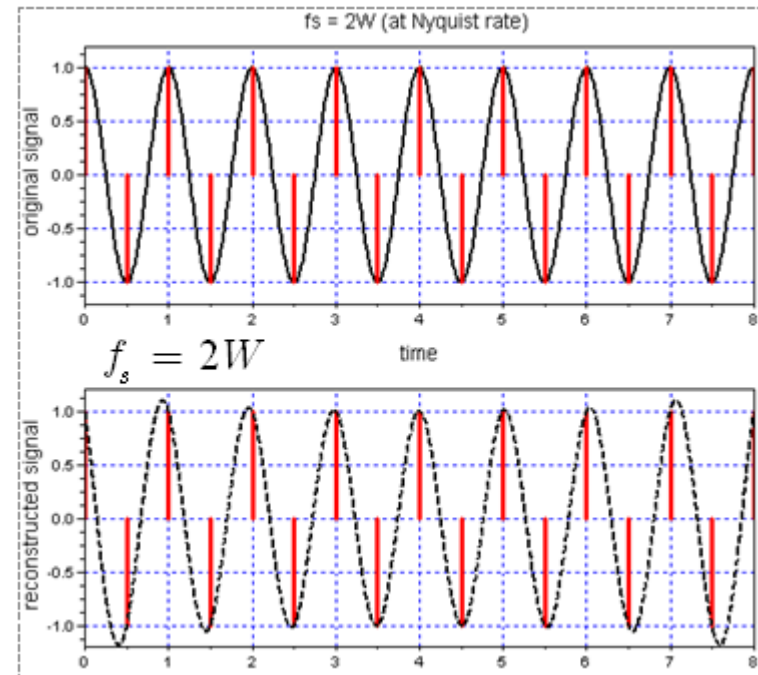
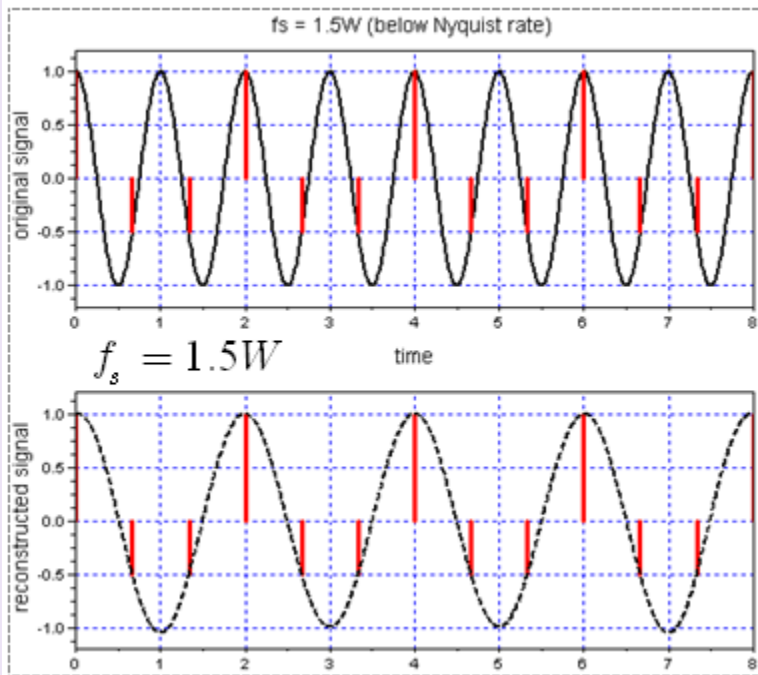
สัญญาณต้นฉบับ



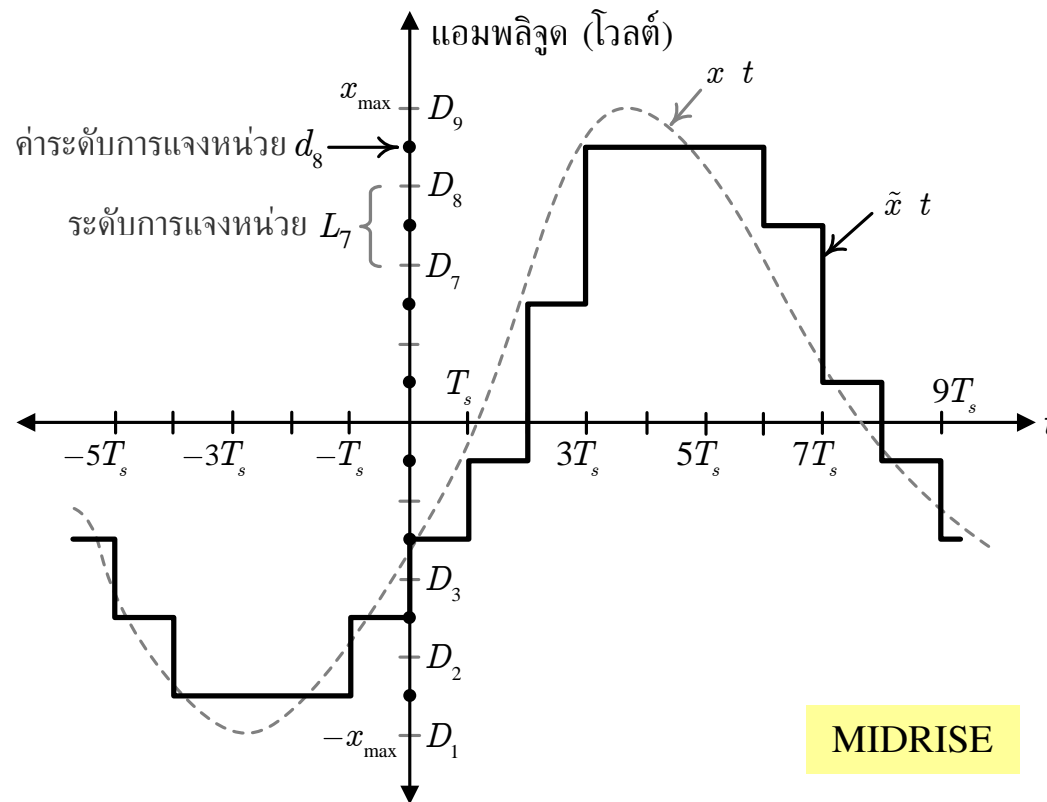
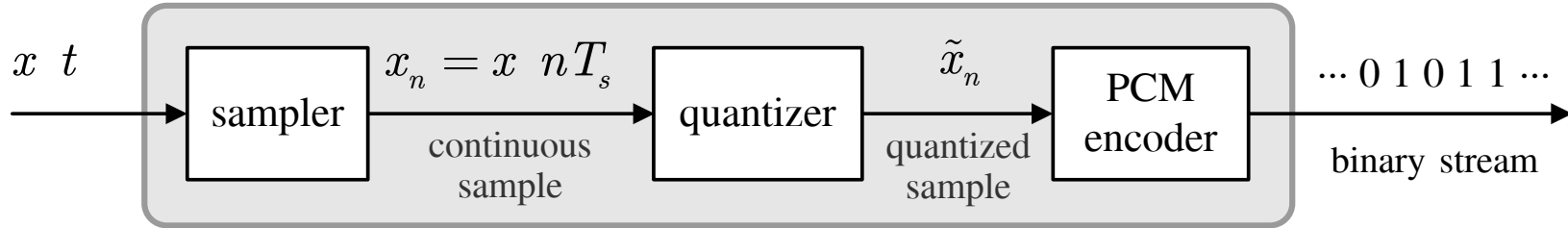
ความผิดเพี้ยนภาพ

- เมื่อสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมาจากข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการชักตัวอย่างด้วยความถี่  $f_s < 2W$ 
  - สัญญาณแอนะล็อกที่ได้จะมีรูปร่างผิดเพี้ยนไปจากสัญญาณต้นฉบับ เนื่องจากสเปกตรัมความถี่ของสัญญาณที่สร้างกลับคืนมามีรูปร่างผิดไปจากสเปกตรัมความถี่ของสัญญาณต้นฉบับ

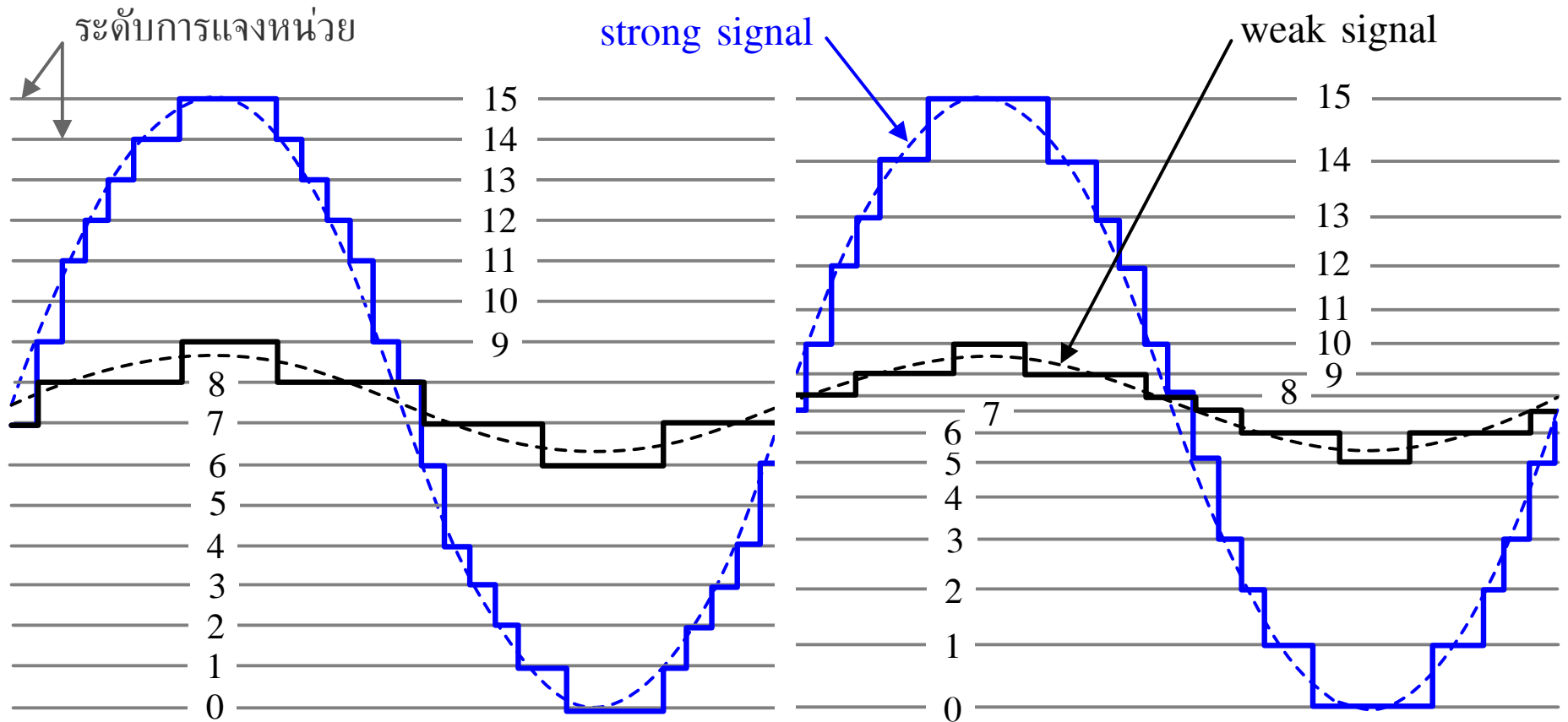




# การแจกหน่วย (Quantization)



# วงจรแรงหน่วยไม่เชิงเส้น

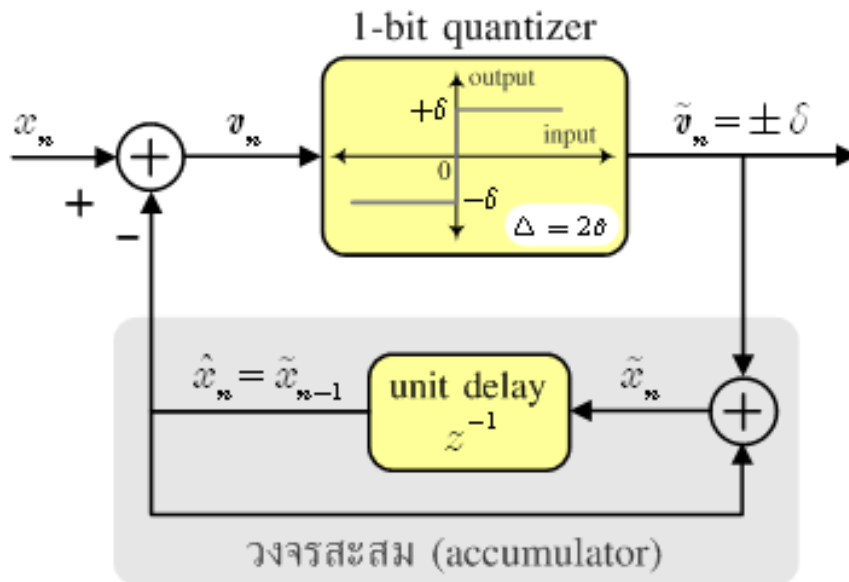




# การกล้ำสัญญาณเดลตา (DM หรือ $\Delta$ )



- นิยมใช้กับการส่งผ่านสัญญาณเสียงที่**ไม่เห็น**คุณภาพของเสียงมากนัก
- ในทางปฏิบัติ DM  $\Rightarrow$  ระบบ DPCM แบบง่ายสุดที่ใช้
  - วงจรแจกหน่วยแบบหนึ่งบิต (1-bit quantizer) และ
  - วงจรกรองทำนายอันดับหนึ่งแบบคงที่ หรือวงจรหน่วงเวลา 1 หน่วย (unit delay)



วงจรเข้ารหัส DM

$$v_n = x_n - \tilde{x}_{n-1}$$

$$\tilde{v}_n = \delta \operatorname{sgn} v_n = \begin{cases} +\delta, & v_n > 0 \\ -\delta, & v_n < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{x}_n = \tilde{v}_n + \tilde{x}_{n-1}$$

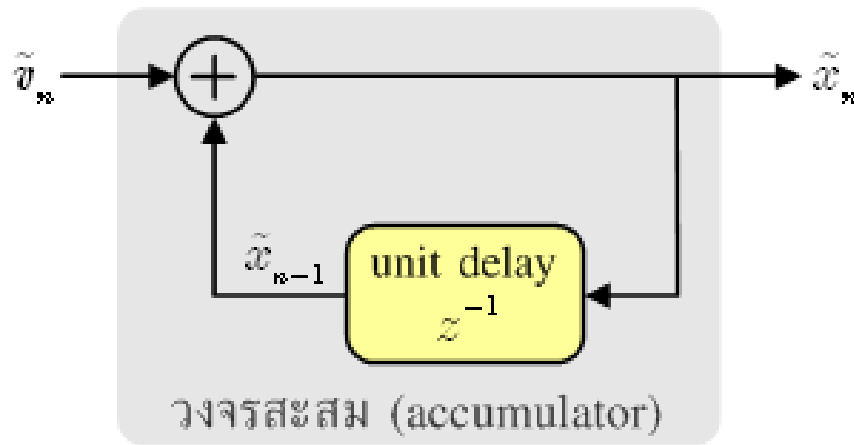
$\Delta = 2\delta$  ขนาดขั้นบันไดของระบบ DM





□ เนื่องจาก  $\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} + \tilde{v}_n$

□ วงจรถอดรหัส DM ใช้ความสัมพันธ์นี้สร้างข้อมูลแซมเปิลต้นฉบับ  $\tilde{x}_n$  ดังนี้



$$\tilde{x}_n = \delta \sum_{i=1}^n \text{sgn } v_i = \sum_{i=1}^n \text{sgn } \tilde{v}_i$$

วงจรถอดรหัส DM

โดยทั่วไปอาจกล่าวได้ว่าระบบ DM จะประมาณค่าสัญญาณ  $x(t)$  ด้วยฟังก์ชันขั้นบันได ซึ่งการประมาณค่านี้มีคุณภาพดี ก็ต่อเมื่อสัญญาณ  $x(t)$  มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ เมื่อเทียบกับอัตราการซีกตัวอย่าง (เช่น มากกว่าอัตราไนควิสต์ 5 เท่า)





# การเข้ารหัสพีซีเอ็ม

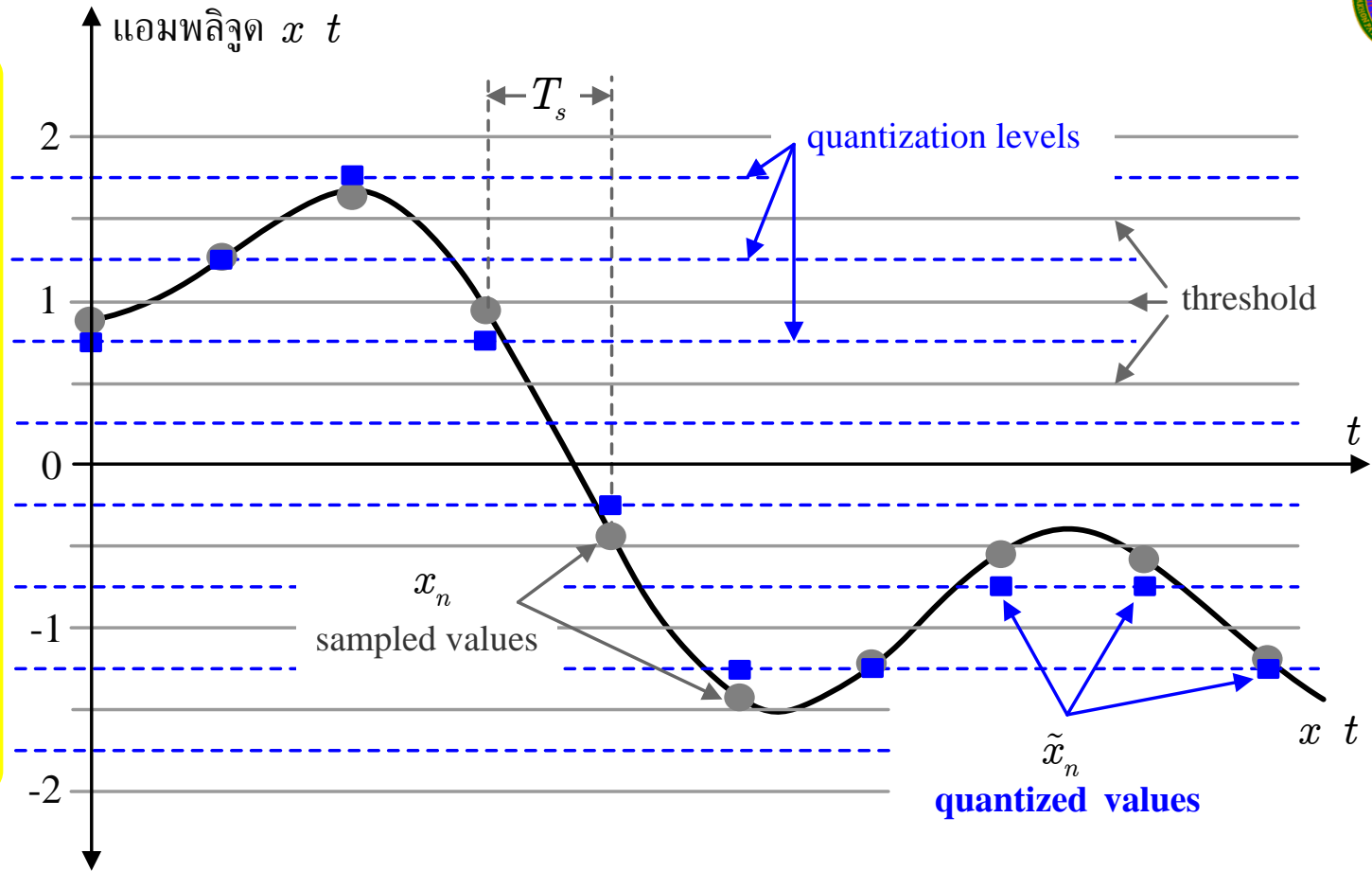
- หลังจากผ่านขั้นตอนการแจกแจงหน่วยแล้ว ข้อมูลแซมเปิลที่ถูกแจกแจงหน่วย  $\tilde{x}_n$  แต่ละแซมเปิลจะถูกนำไปเข้ารหัสเพื่อแปลงให้เป็นบิตข้อมูล โดยหนึ่งแซมเปิลจะถูกแทนด้วย  $m$  บิต เมื่อ  $m = \lceil \log_2(L) \rceil$  และ  $L$  คือระดับการแจกแจงหน่วยที่ใช้ในวงจรแจกแจงหน่วย
- บิตข้อมูลทั้งหมดที่ได้เรียกว่าลำดับพีซีเอ็ม (PCM sequence) โดยมีอัตราบิต  $R_b = \frac{1}{T_b} = mf_s$
- รหัสที่ใช้ในการเข้ารหัสข้อมูลแซมเปิลที่ถูกแจกแจงหน่วย  $\tilde{x}_n$  มีหลายแบบ เช่น รหัสเกรย์ (Gray code), รหัส FBC (foldover binary coding), และรหัส NBC (natural binary code)





### coding rule

Gray	FBC	NBC
100	111	111
101	110	110
111	101	101
110	100	100
010	000	011
011	001	010
001	010	001
000	011	000



ลำดับพีซีเอ็มที่ใช้รหัสเกรย์ 111 101 100 111 010 001 001 011 011 001

รหัสเกรย์นิยมนำมาใช้กับการแยกสัญญาณ (demodulation) เพราะข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นหนึ่งบิตในลำดับข้อมูลที่ถูกเข้ารหัสด้วยรหัสเกรย์มีผลทำให้ระดับการแจกหน่วยคลาดเคลื่อนไปจากระดับเดิมเพียงระดับเดียว (ที่อยู่ติดกัน) เท่านั้น ซึ่งทำให้ง่ายต่อการแยกสัญญาณ





# Example

การส่งสัญญาณเสียงในรูปลำดับพีซีเอ็มด้วยอัตราบิต  $R_b = 36000$  บิตต่อวินาที จงหาความถี่การซีกตัวอย่างที่เป็นไปได้ จำนวนระดับของการแจกหน่วย และจำนวนบิตต่อการซีกตัวอย่างหนึ่งครั้ง ถ้ากำหนดให้สัญญาณเสียงนี้มีความถี่สูงสุดเท่ากับ 3200 เฮิรตซ์

วิธีทำ จากทฤษฎีบทการซีกตัวอย่าง ความถี่การซีกตัวอย่างมีค่าเท่ากับ  $f_s \geq 2f_{\max} = 2(3200) = 6400$  Hz ถ้าให้  $m$  คือจำนวนบิตต่อการซีกตัวอย่างหนึ่งครั้งจะได้ว่า  $mf_s \leq R_b = 36000$  บิตต่อวินาที ดังนั้นจำนวนบิตต่อการซีกตัวอย่างหนึ่งครั้งมีค่าเท่ากับ

$$m \leq \frac{R_b}{f_s} = \frac{36000}{6400} = 5.6 \text{ บิต}$$

สมมติว่าระบบใช้  $m = 5$  บิตต่อการซีกตัวอย่างหนึ่งครั้ง เพราะฉะนั้นจำนวนระดับของการแจกหน่วยจะมีค่าเท่ากับ  $L = 2^m = 2^5 = 32$  ระดับ และความถี่การซีกตัวอย่าง  $f_s$  เพื่อให้ได้ 5 บิตต่อการซีกตัวอย่างหนึ่งครั้งคือ  $f_s = 36000 / 5 = 7200$  Hz

\*\*\* END

