บทที่ 1

การวิเคราะห์เชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน (complex number) เป็นจำนวนที่ไม่มีอยู่จริงในธรรมชาติ แต่ได้ถูกกำหนดขึ้นมาเพื่อใช้ในการแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์ เช่น การแก้สมการ $x^2 + n = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อนจึงมีประโยชน์มาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งทางด้านวิศวกรรมที่ต้องหาผลเฉลยด้วยวิธีที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงซ้อนและฟังก์ชันเชิงซ้อน ได้แก่ แบบจำลองของวงจรไฟฟ้า, ระบบกลศาสตร์ของการสั่นสะเทือน, ทฤษฎีของความร้อน, พลศาสตร์ของไหล, และไฟฟ้าสถิตย์ เป็นต้น ดังนั้นในบทนี้จะอธิบายจำนวนเชิงซ้อนและคุณสมบัติต่างๆ ที่จำเป็นสำหรับการนำไปใช้ในการแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่จะศึกษาในบทต่อไป

1.1 จำนวนจินตภาพ

โดยทั่วไปการแก้สมการ $x^2 + n = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะไม่สามารถหาค่าของตัวแปร x ที่เป็นเลขจำนวนจริงได้ เนื่องจากไม่มีจำนวนจริง x ใดที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าเท่ากับค่า $-n$ ดังนั้นจึงได้มีการสร้างสัญลักษณ์ใหม่เพื่อใช้หาคำตอบของสมการดังกล่าว นั่นคือถ้า $x^2 + n = 0$ แล้ว จะได้ว่าคำตอบของสมการนี้คือ $x = \sqrt{-n}$ เช่น ถ้า $x^2 + 2 = 0$ จะได้ว่า $x = \sqrt{-2}$ เป็นต้น ในทางปฏิบัติค่า $\sqrt{-n}$ จะถูกเรียกว่า "จำนวนจินตภาพ (imaginary number)" และเรียกค่า $\sqrt{-1}$ ว่า "หน่วยจินตภาพ (imaginary unit)" ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้สัญลักษณ์ $i = \sqrt{-1}$ แทนหน่วยจินตภาพ ตัวอย่างเช่น $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$, $\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$, และ $\sqrt{-9} = i\sqrt{9} = 3i$ เป็นต้น

ค่าของหน่วยจินตภาพ i ยกกำลังด้วยจำนวนเต็มบวกที่สำคัญมีดังนี้

1) $i = \sqrt{-1}$

2) $i^2 = -1$

3) $i^3 = i^2 i^1 = -i$

4) $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$

5) $i^5 = i^4 i^1 = i$

6) $i^6 = i^4 i^2 = i^2 = -1$

7) $i^7 = i^4 i^3 = i^3 = i^2 i = -i$

8) $i^8 = i^4 i^4 = 1$

สรุปเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$i^{4n} = 1$$
$$i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = i^2 = -1$$
$$i^{4n+3} = i^3 = -i$$

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาค่าของ $i^{57}, i^{83}, i^{100},$ และ i^{250}

วิธีทำ $i^{57} = i^{4(14)+1} = i$

$i^{83} = i^{4(20)+3} = i^3 = -i$

$i^{100} = i^{4(25)} = 1$

$i^{1250} = i^{4(312)+2} = i^2 = -1$

SCILAB:
```
-->[(%i)^57, (%i)^83, (%i)^100, (%i)^1250]
 ans  =
    i     - i       1.   - 1.
```

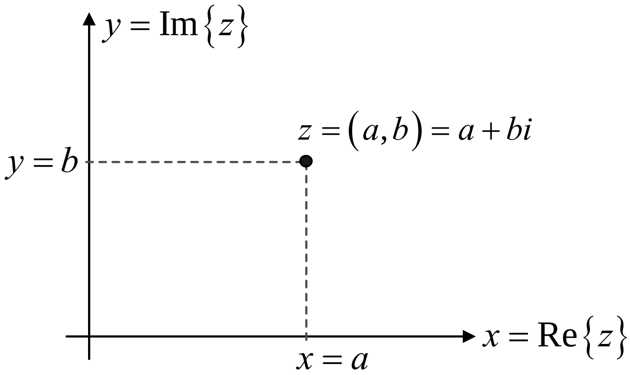
1.2 จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนคือจำนวนที่สามารถเขียนอยู่ในรูปของ $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นเลขจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ ดังนั้นถ้ากำหนดให้

$$z = a + bi \tag{1.1}$$

โดยที่ a เรียกว่าส่วนจริง (real part) ของ z ซึ่งเขียนแทนด้วย $\mathrm{Re}\{z\} = a$ ในขณะที่ b เรียกว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z ซึ่งเขียนแทนด้วย $\mathrm{Im}\{z\} = b$ ตัวอย่างเช่นถ้า $z = 2 - 4i$ จะได้ว่า $\mathrm{Re}\{z\} = 2$ และ $\mathrm{Im}\{z\} = -4$

นอกจากนี้จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ สามารถที่จะแสดงให้อยู่ในรูปของจุดพิกัด $z = (a, b)$ ในระนาบพิกัดฉาก xy ดังแสดงในภาพที่ 1.1 โดยที่แกน x เรียกว่าแกนจริง (real axis), แกน y เรียกว่าแกนจินตภาพ (imaginary axis), และระนาบ xy เรียกว่าระนาบเชิงซ้อน (complex plane)



ภาพที่ 1.1 จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ ในระนาบพิกัดฉาก

1.2.1 การเท่ากัน การบวก และการลบ

กำหนดให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ เมื่อ $a, b, c,$ และ d เป็นเลขจำนวนจริง ดังนั้น

1) การเท่ากัน

$$z_1 = z_2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d \tag{1.2}$$

2) การบวก

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \tag{1.3}$$

3) การลบ

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \tag{1.4}$$

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $z_1 = 2 + 3i$ และ $z_2 = -3 + 2i$ จงหาค่าของ $z_1 + z_2$ และ $z_1 - z_2$

วิธีทำ ค่า $z_1 + z_2$ หาได้โดย

$$z_1 + z_2 = \left(2 + (-3)\right) + (3 + 2)i$$

$$= -1 + 5i$$

และค่า $z_1 - z_2$ หาได้จาก

$$z_1 - z_2 = \left(2 - (-3)\right) + (3 - 2)i$$

$$= 5 + i$$

SCILAB:

```
-->z1 = 2 + 3*%i;
-->z2 = -3 + 2*%i;
-->z1 + z2
 ans  =
  - 1. + 5.i
-->z1 - z2
 ans  =
    5. + i
```

1.2.2 เอกลักษณ์และอินเวอร์สการบวก

เอกลักษณ์การบวก (additive identity) คือจำนวนที่นำมาบวกกับจำนวน z แล้วได้ผลลัพธ์เป็นจำนวน z เหมือนเดิม ในขณะที่อินเวอร์สการบวก (additive inverse) คือจำนวนที่นำมาบวกกับจำนวน z แล้วได้ผลลัพธ์เป็นค่า 0 หรือ $(0,0)$

ถ้ากำหนดให้ $z=a+bi$ ซึ่งเขียนแทนด้วยจุดพิกัด (a,b) จะได้ว่าจำนวนเชิงซ้อน $(0,0)$ เป็นเอกลักษณ์การบวก เนื่องจาก

$$(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b) \tag{1.5}$$

และอินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a,b) คือ $(-a,-b)$ เพราะว่า

$$(a,b)+(-a,-b)=(a-a,b-b)=(0,0)=0 \tag{1.6}$$

เช่นอินเวอร์สการบวกของ $(3,2)$ คือ $(-3,-2)$ และอินเวอร์สการบวกของ $2-3i$ คือ $-2+3i$

1.2.3 การคูณ

กำหนดให้ $z_1=a+bi$ และ $z_2=c+di$ เมื่อ $a,b,c,$ และ d เป็นเลขจำนวนจริง ดังนั้นผลคูณของ z_1 และ z_2 มีค่าเท่ากับ

$$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i \tag{1.7}$$

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาผลคูณ $3+4i$ กับ $2+i$

วิธีทำ $(3+4i)(2+i)=6+3i+8i+4i^2$

$$=6+11i+4(-1)=2+11i$$

SCILAB:

```
-->(3+4*%i)*(2+%i)
 ans  =
     2. + 11.i
```

1.2.4 เอกลักษณ์และอินเวอร์สการคูณ

เอกลักษณ์การคูณ (multiplicative identity) คือจำนวนที่นำมาคูณกับจำนวน z แล้วได้ผลลัพธ์เป็น z เหมือนเดิม ในขณะที่อินเวอร์สการคูณ (multiplicative inverse) คือจำนวนที่นำมาคูณกับจำนวน z (เมื่อ $z\neq 0$) แล้วได้ผลลัพธ์เป็นค่า 1 หรือ $(1,0)$

ถ้ากำหนดให้ $z = a + bi$ หรือเขียนแทนด้วยจุดพิกัด (a,b) จะได้ว่า $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณ เนื่องจาก

$$(a,b)(1,0) = \big(a(1) - b(0), a(0) + b(1)\big) = (a,b) \tag{1.8}$$

สำหรับอินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อน (a,b) หาได้ดังนี้ ถ้าให้จำนวนเชิงซ้อน (x,y) เป็นอินเวอร์สการคูณของ (a,b) โดยที่ $(a,b) \neq (0,0)$ จะได้ว่า

$$(a,b)(x,y) = (1,0)$$

$$(ax - by, ay + bx) = (1,0)$$

นั่นคือ $ax - by = 1$ และ $ay + bx = 0$ ซึ่งจะได้

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{และ} \quad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

ดังนั้นอินเวอร์สการคูณของ (a,b) หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $(a,b)^{-1}$ คือ

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \tag{1.9}$$

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาค่าอินเวอร์สการคูณของ $2 + 3i$ และ $-3 + 4i$

วิธีทำ อินเวอร์สการคูณของ $2 + 3i$ หรือ $(2,3)$ คือ

$$(2,3)^{-1} = \left(\frac{2}{(2)^2 + (3)^2}, -\frac{3}{(2^2) + (3^2)}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right) = 0.1538462 - 0.2307692i$$

ในขณะที่อินเวอร์สการคูณของ $-3 + 4i$ หรือ $(-3,4)$ คือ

$$(-3,4)^{-1} = \left(\frac{-3}{(-3)^2 + 4^2}, -\frac{4}{(-3)^2 + 4^2}\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right) = -0.12 - 0.16i$$

SCILAB:

```
-->inv(2+3*%i)
 ans  =
    0.1538462 - 0.2307692i
-->(2/13)+(-3/13)*%i
 ans  =
    0.1538462 - 0.2307692i
-->inv(-3+4*%i)
 ans  =
  - 0.12 - 0.16i
```

1.2.5 การหาร

การหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนจะอาศัยคุณสมบัติการคูณจำนวนเชิงซ้อนเข้ามาช่วย เพราะว่าการหารจำนวนเชิงซ้อนก็คือการคูณด้วยอินเวอร์สการคูณของตัวหารนั่นเอง ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ หารด้วย $c+di$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=(a,b)(c,d)^{-1}=(a,b)\left(\frac{c}{c^2+d^2},-\frac{d}{c^2+d^2}\right)$$

$$=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \qquad (1.10)$$

ตัวอย่างเช่น

ก) $\dfrac{(3,4)}{(2,3)}=(3,4)\left(\dfrac{2}{13},-\dfrac{3}{13}\right)=\left(\dfrac{18}{13},-\dfrac{1}{13}\right)$

$=1.3846-0.0769i$

ข) $\dfrac{2-i}{1-3i}=(2-i)\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}i\right)$

$=0.5+0.5i$

SCILAB:

```
-->(3+4*%i)/(2+3*%i)
 ans  =
    1.3846154 - 0.0769231i
-->(2-%i)/(1-3*%i)
 ans  =
    0.5 + 0.5i
```

1.3 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ คือจำนวนเชิงซ้อน $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$ เช่น สังยุคของ $2+3i$ คือ $2-3i$ หรือสังยุคของ $-2-3i$ คือ $-2+3i$ เป็นต้น ดังนั้นการหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนทำได้ง่ายโดยการเปลี่ยนเครื่องหมาย (จากบวกเป็นลบ หรือจากลบเป็นบวก) ของจำนวนจินตภาพเท่านั้น

1.3.1 คุณสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

1) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\bar{z}=z$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง

2) ถ้า z เป็นจำนวนจินตภาพแท้ แล้ว $\bar{z}=-z$

3) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\bar{\bar{z}}=z$

4) ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

4.1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

4.2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$

4.3) $\overline{z_1 z_2} = (\overline{z}_1)(\overline{z}_2)$

5) ถ้ากำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ โดยที่ a และ b เป็นเลขจำนวนจริง จะได้ว่า

$$a = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{และ} \quad b = \frac{z - \overline{z}}{2i} \tag{1.11}$$

นอกจากนี้การหารจำนวนเชิงซ้อนสามารถใช้คุณสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนเข้ามาช่วยในการหารจำนวนเชิงซ้อนได้โดยการนำสังยุคของตัวหารมาคูณทั้งตัวตั้งและตัวหาร ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาค่าของ $\dfrac{1+i}{1-i}$ และ $\dfrac{3+4i}{1+2i}$

วิธีทำ ค่าของ $\dfrac{1+i}{1-i}$ หาได้จาก

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\left(\frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

และค่าของ $\dfrac{3+4i}{1+2i}$ หาได้จาก

$$\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{3+4i}{1+2i}\left(\frac{1-2i}{1-2i}\right) = \frac{3-2i-8i^2}{1+4} = \frac{11-2i}{5} = 2.2 - 0.4i$$

SCILAB:

```
-->(1+%i)/(1-%i)
 ans  =
     i

-->(3+4*%i)/(1+2*%i)
 ans  =
     2.2 - 0.4i
```

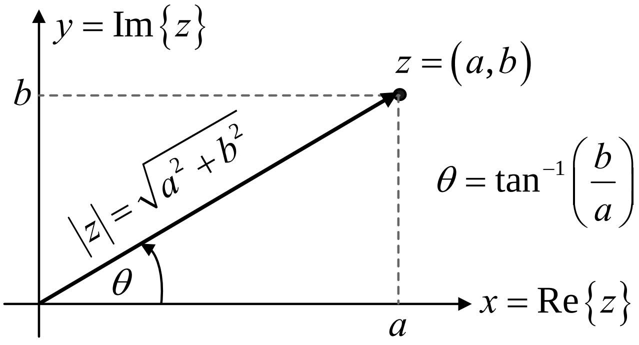
ตัวอย่างที่ 1.6 ถ้า $z = x + yi$ และ $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$ จงเขียนฟังก์ชัน $f(z)$ ให้อยู่ในรูปตัวแปร z

วิธีทำ เนื่องจาก $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ และ $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ ดังนั้นแทนค่า x และ y ลงใน $f(z)$ จะได้

$$f(z) = \left[\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2\right] + 2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)i$$

$$= \left(\frac{z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2}{4}\right) + \left(\frac{z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2}{4}\right) + \frac{z^2 - \overline{z}^2}{2}$$

$$= \frac{2z^2 + 2\overline{z}^2 + 2z^2 - 2\overline{z}^2}{4} = z^2$$



ภาพที่ 1.2 ค่าสัมบูรณ์และมุมเฟสของจำนวนเชิงซ้อน z

1.4 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ หาได้โดย

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.12}$$

ตามที่แสดงในภาพที่ 1.2 ซึ่งเห็นได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = (a,b)$ ก็คือระยะทางจากจุด $(0,0)$ ไปยังจุด (a,b) นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $3+4i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, และ $3i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ $3+4i$ คือ

$$|3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ คือ

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

และค่าสัมบูรณ์ของ $3i$ คือ

$$|3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

SCILAB:

```
-->abs(3+4*%i)
 ans  =
     5.
-->abs(sqrt(3)/2 - %i/2)
 ans  =
     1.
-->abs(3*%i)
 ans
     3.
```

1.4.1 คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนที่สำคัญมีดังนี้

1) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

2) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ หรือ $|z|^2 = z\overline{z}$

3) ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

พิสูจน์ ถ้ากำหนดให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ จะได้ว่า

$$z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{(a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)} \\
&= \sqrt{(a^2c^2 + a^2d^2) + (b^2d^2 + b^2c^2)} \\
&= \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |z_1||z_2|
\end{aligned}$$
ซ.ต.พ.

4) ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $z_2 \neq 0$ แล้ว $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

พิสูจน์ ถ้ากำหนดให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} &= (a+bi)(c+di)^{-1} \\
&= (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i
\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}{(c^2+d^2)^2}}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}{\left(c^2+d^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)}{\left(c^2+d^2\right)}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$ **ซ.ต.พ.**

5) ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\mathrm{Re}\{z_1\bar{z}_2\} \le |z_1\bar{z}_2|$

พิสูจน์ กำหนดให้ $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ จะได้ว่า $\bar{z}_2 = c-di$ และ

$$z_1\bar{z}_2 = (a+bi)(c-di) = (ac+bd)+(bc-ad)i$$

ดังนั้น $\mathrm{Re}\{z_1\bar{z}_2\} = (ac+bd)$ และ $|z_1\bar{z}_2| = \sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}$

จากข้อกำหนด $\mathrm{Re}\{z_1\bar{z}_2\} \le |z_1\bar{z}_2|$ ซึ่งหมายความว่า

$$(ac+bd) \le \sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการนี้จะได้

$$(ac+bd)^2 \le (ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

$$0 \le (bc-ad)^2$$

ซึ่งเป็นจริงเสมอ ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า $\mathrm{Re}\{z_1\bar{z}_2\} \le |z_1\bar{z}_2|$ **ซ.ต.พ.**

6) ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

พิสูจน์ เนื่องจาก $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)$ (จากคุณสมบัติข้อ 2 ที่ว่า $|z|^2 = z\bar{z}$)

$$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$

ถ้ากำหนดให้ $z_1 = x_1+iy_1$ และ $z_2 = x_2+iy_2$ จะได้ว่า

$$z_1\bar{z}_2 = (x_1+iy_1)(x_2-iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + i(-x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\bar{z}_1 z_2 = (x_1-iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_1y_2 - x_2y_1)$$

ดังนั้น $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2(x_1x_2+y_1y_2)=2\operatorname{Re}\{z_1\bar{z}_2\}\le 2|z_1\bar{z}_2|$ และเนื่องจาก $|z_1\bar{z}_2|=|z_1||\bar{z}_2|=|z_1||z_2|$ จะได้ว่า

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\le 2|z_1||z_2|$$

เพราะฉะนั้น

$$|z_1+z_2|^2\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

$$|z_1+z_2|^2\le(|z_1|+|z_2|)^2$$

นั่นคือ $|z_1+z_2|\ \le\ |z_1|+|z_2|$ **ซ.ต.พ.**

7) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$

พิสูจน์ ถ้ากำหนดให้ $z=a+bi$ แล้วจะได้ว่า

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\left(\frac{a-bi}{a-bi}\right)=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

ดังนั้น $$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{|a-bi|}{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{|z|}$$ **ซ.ต.พ.**

1.5 จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

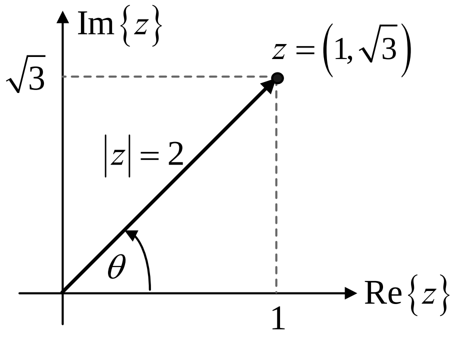
จากภาพที่ 1.2 จำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ สามารถเขียนแทนได้ด้วยจุดพิกัด (a,b) ในระนาบเชิงซ้อน โดยที่เส้นแกน x แสดงค่าจำนวนจริง และเส้นแกน y แสดงค่าจำนวนจินตภาพ นอกจากนี้ยังสามารถแสดงจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ (vector) ได้โดยมีจุด $(0,0)$ เป็นจุดตั้งต้น และจุด (a,b) เป็นจุดสุดท้าย เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ที่เขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ กับแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกามีหน่วยเป็นเรเดียน (radian) ซึ่งหาได้จาก

$$\tan(\theta)=\frac{b}{a}\quad\text{หรือ}\quad\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\tag{1.13}$$

เมื่อ $a\ne 0$ โดยที่ค่า a และ b หาได้จาก

$$a=|z|\cos(\theta)\tag{1.14}$$

$$b=|z|\sin(\theta)\tag{1.15}$$



ภาพที่ 1.3 จำนวน $z=1+\sqrt{3}i$ ในระนาบเชิงซ้อน

เมื่อ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ คือค่าสัมบูรณ์หรือขนาดของ z ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) ได้ดังนี้

$$z=a+bi=|z|\{\cos(\theta)+i\sin(\theta)\}=|z|e^{i\theta} \tag{1.16}$$

เนื่องจาก

$$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta) \tag{1.17}$$

ตามความสัมพันธ์ของออยเลอร์ (Euler's relation) [1]

ตัวอย่างที่ 1.8 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z=1+\sqrt{3}i$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ การเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z=1+\sqrt{3}i=(1,\sqrt{3})$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วตามสมการ (1.16) จะต้องทราบขนาด $|z|$ และมุม θ ของ z ก่อน จากภาพที่ 1.3 มุมของ z หาได้จากสมการ (1.13) นั่นคือ

$$\tan(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{1}=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ซึ่งจะได้ว่า $\theta=\frac{\pi}{3}=1.047$ เรเดียน และ

ขนาดของ z หาได้จากสมการ (1.12) นั่นคือ

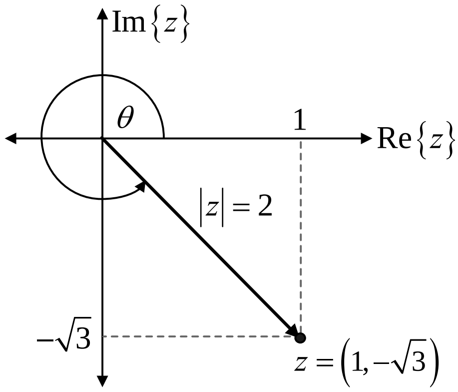
$$|z|=\left|1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{1+3}=2$$

ดังนั้นจากสมการ (1.16) จะได้ว่า

$$z=1+\sqrt{3}i=|z|e^{i\theta}=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

SCILAB:

```
-->[r,theta]=polar(1+sqrt(3)*%i)
 theta  =
    1.0471976 + 5.551D-17i
 r  =
    2.
-->clean(theta)
 ans  =
    1.0471976
```



ภาพที่ 1.4 จำนวน $z = 1 - \sqrt{3}i$ ในระนาบเชิงซ้อน

ตัวอย่างที่ 1.9 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 1 - \sqrt{3}i$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ จำนวนเชิงซ้อน $z = 1 - \sqrt{3}i$ อยู่ในระบบเชิงซ้อนตามภาพที่ 1.4 เนื่องจาก $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ อยู่ในจตุภาคที่ 4 จะได้ว่ามุมของ z คือ

$$\tan(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

ซึ่งจะได้ว่า $\theta = \frac{5\pi}{3} = -1.047$ เรเดียน และ

ขนาดของ z คือ

$$|z| = \left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1+3} = 2$$

ดังนั้นจากสมการ (1.16) จะได้ว่า

$$z = 1 - \sqrt{3}i = |z|e^{i\theta} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$$

SCILAB:

```
-->[r,theta] = polar(1-sqrt(3)*%i)
 theta  =
  - 1.0471976 + 5.551D-17i
 r  =
    2.
-->clean(theta)
 ans  =
  - 1.0471976
```

1.5.1 การคูณจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ และ $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ ผลคูณของ z_1 และ z_2 จะมีค่าเท่ากับ

$$z_1 z_2 = \left(|z_1|e^{i\theta_1}\right)\left(|z_2|e^{i\theta_2}\right) = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= |z_1||z_2|\left\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\} \qquad (1.18)$$

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดให้ $z_1 = 2e^{i(\pi/3)}$ และ $z_2 = 3e^{i(\pi/4)}$ จงหาค่าของ $z_1 z_2$

วิธีทำ

$$z_1 z_2 = \left(2e^{i(\pi/3)}\right)\left(3e^{i(\pi/4)}\right) = 6e^{i(\pi/3+\pi/4)}$$

$$= 6e^{i(7\pi/12)}$$

$$= 6\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right\}$$

$$= -1.553 + 5.796i$$

SCILAB:

```
-->z1 = 2 * exp(%i * %pi/3);
-->z2 = 3 * exp(%i * %pi/4);
-->z1 * z2
 ans  =
  - 1.5529143 + 5.795555i
```

1.5.2 การหารจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ และ $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$ ผลลัพธ์ของ z_1 / z_2 จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right\} \tag{1.19}$$

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดให้ $z_1 = 4e^{i(7\pi/4)}$ และ $z_2 = 2e^{i(\pi/4)}$ จงหาค่าของ z_1 / z_2

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i(7\pi/4)}}{2e^{i(\pi/4)}} = 2e^{i(7\pi/4-\pi/4)}$$

$$= 2e^{i(3\pi/2)}$$

$$= 2\left\{\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)\right\}$$

$$= -2i$$

SCILAB:

```
-->z1 = 4*exp(%i*7*%pi/4);
-->z2 = 2*exp(%i*%pi/4);
-->clean(z1/z2)
 ans  =
  - 2.i
```

1.5.3 จำนวนเชิงซ้อนยกกำลัง *n*

กำหนดให้ $z = |z| e^{i\theta}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$z^n = \left(|z| e^{i\theta}\right)^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n \left\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right\} \tag{1.20}$$

ตามทฤษฎีบทเดอมัวฟวร์ (De Moivre's theorem) [1]

ตัวอย่างที่ 1.12 จงเขียน $\left(1+\sqrt{3}i\right)^5$ ในรูป $a+bi$

วิธีทำ จัด $z=1+\sqrt{3}i$ ให้อยู่ในรูปของพิกัดเชิงขั้ว $z=|z|e^{i\theta}$ โดยที่

$$|z|=\sqrt{1+3}=2 \quad \text{และ} \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\frac{\pi}{3}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $z=1+\sqrt{3}i=2e^{i(\pi/3)}$ และ

$$z^5=\left(2e^{i(\pi/3)}\right)^5=2^5e^{i(5\pi/3)}$$

$$=32\left\{\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right\}=16-27.712813i$$

SCILAB:

```
-->z = 1 + sqrt(3)*%i;
-->z^5
 ans  =
    16. - 27.712813i
```

1.5.4 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $z=|z|e^{i\theta}=|z|e^{i(\theta+2\pi k)}$ เมื่อ k คือจำนวนเต็ม และ n คือจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\sqrt[n]{z}=|z|^{\frac{1}{n}}\left(e^{i(\theta+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}}=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{(\theta+2\pi k)}{n}}$$

$$=|z|^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right\} \tag{1.21}$$

เมื่อ $k=0,1,2,\ldots,n-1$ นั่นคือรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนจะมีจำนวนคำตอบมากที่สุด n คำตอบ โดยที่แต่ละคำตอบสามารถหาได้โดยการแทนค่า $k=0,1,2,\ldots,n-1$

ตัวอย่างที่ 1.13 จงหารากที่ 2 ของ $z=2+2\sqrt{3}i$

วิธีทำ จัด $z=2+2\sqrt{3}i$ ให้อยู่ในรูปของพิกัดเชิงขั้ว $z=|z|e^{i\theta}$ โดยที่

$$|z|=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=4 \quad \text{และ} \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

ดังนั้น $z=2+2\sqrt{3}i=4e^{i(\pi/3)}$ และ

$$\sqrt{z}=(4)^{1/2}\left\{\cos\left(\frac{(\pi/3)+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(\pi/3)+2\pi k}{2}\right)\right\}$$

สำหรับ $k=0$ และ 1 โดยที่เมื่อ $k=0$ จะได้

$$\sqrt{z}=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\sqrt{3}+i$$

และเมื่อ $k=1$ จะได้

$$\sqrt{z}=2\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right\}=-\sqrt{3}-i$$

เพราะฉะนั้นรากที่ 2 ของ $z=2+2\sqrt{3}i$ คือ $\sqrt{3}+i$ และ $-\sqrt{3}-i$

SCILAB:

```
-->z = 2 + 2*sqrt(3)*%i
 z  =
     2. + 3.4641016i
-->(sqrt(3)+%i)^2
 ans   =
     2. + 3.4641016i
-->(-sqrt(3)-%i)^2
 ans   =
     2. + 3.4641016i
```

1.6 ฟังก์ชันพื้นฐานของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้ากำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน

$$z=a+bi=re^{i\theta} \tag{1.22}$$

โดยที่

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{และ} \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{1.23}$$

เมื่อ a และ b เป็นเลขจำนวนจริง ดังนั้นฟังก์ชันพื้นฐานต่างๆ ของจำนวนเชิงซ้อนมีดังต่อไปนี้

1.6.1 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function) ของ $z=a+bi$ หาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$e^z=e^{a+bi}=e^ae^{bi}=e^a\{\cos(b)+i\sin(b)\}=e^a\cos(b)+ie^a\sin(b) \tag{1.24}$$

เมื่อ b เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน ตัวอย่างเช่นถ้า $z=2+3i$ จะได้ว่า

$$e^{2+3i}=e^2\{\cos(3)+i\sin(3)\}=-7.32+1.04i$$

นอกจากนี้ค่าของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่พบมากในการคำนวณมีดังนี้

- $e^{\pm i(n\pi)}=-1$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มคี่
- $e^{\pm i(2n\pi)}=1$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มใดๆ

- $e^{\pm i(n\pi/2)} = \pm i$ เมื่อ $n = 1, 5, 9, 13, \ldots$
- $e^{\pm i(n\pi/2)} = \mp i$ เมื่อ $n = 3, 7, 11, 15, \ldots$

ในทางปฏิบัติฟังก์ชันเลขชี้กำลังของจำนวนเชิงซ้อนสามารถแบ่งออกเป็นได้หลายกรณีดังนี้

1) ตัวฐาน (base) เป็นจำนวนจริง x และเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ จะได้ว่า

$$x^z = x^{a+bi} = x^a x^{bi} = x^a\left(e^{\ln(x)}\right)^{ib} = x^a e^{ib\ln(x)} = x^a\left\{\cos\left(b\ln(x)\right) + i\sin\left(b\ln(x)\right)\right\}$$

$$= x^a\cos\left(b\ln(x)\right) + ix^a\sin\left(b\ln(x)\right) \tag{1.25}$$

เมื่อ $\ln(x)$ คือลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm) ของ x

2) ตัวฐานเป็นจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi = re^{i\theta}$ และเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริง x จะได้ว่า

$$z^x = (a+bi)^x = \left(re^{i\theta}\right)^x = r^x\left\{\cos(x\theta) + i\sin(x\theta)\right\}$$

$$= r^x\cos(x\theta) + ir^x\sin(x\theta) \tag{1.26}$$

เมื่อ $r = \sqrt{a^2+b^2}$ และ $\theta = \tan^{-1}(b/a)$

3) ตัวฐานเป็นจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a_1 + b_1 i = r_1 e^{i\theta_1}$ และเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเชิงซ้อน $z_2 = a_2 + b_2 i$ $= r_2 e^{i\theta_2}$ จะได้ว่า

$$(z_1)^{z_2} = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)^{a_2+ib_2} = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)^{a_2}\left(r_1 e^{i\theta_1}\right)^{ib_2} = \left(r_1\cos(\theta_1) + ir_1\sin(\theta_1)\right)^{a_2}\left(r_1^{ib_2}e^{-\theta_1 b_2}\right)$$

เนื่องจาก

$$r_1^{ib_2} = \left(e^{\ln(r_1)}\right)^{ib_2} = e^{ib_2\ln(r_1)} = \cos\left(b_2\ln(r_1)\right) + i\sin\left(b_2\ln(r_1)\right)$$

ดังนั้น

$$(z_1)^{z_2} = e^{-\theta_1 b_2}\left(r_1\cos(\theta_1) + ir_1\sin(\theta_1)\right)^{a_2}\left(\cos\left(b_2\ln(r_1)\right) + i\sin\left(b_2\ln(r_1)\right)\right) \tag{1.27}$$

ตัวอย่างที่ 1.14 จงหาค่า z จากสมการ

$$\cos(z) - 5 = 0 \tag{1.28}$$

วิธีทำ แทนค่า $\cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ ในสมการ (1.28) จะได้

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}-5=0 \qquad (1.29)$$

คูณทั้งสองข้างของสมการ (1.29) ด้วย $2e^{iz}$ จะได้

$$e^{i2z}+1-10e^{iz}=0$$

$$\left(e^{iz}\right)^2-10\left(e^{iz}\right)+1=0 \qquad (1.30)$$

ผลเฉลยของสมการ (1.30) คือ

$$e^{zi}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{96}}{2}=5\pm\sqrt{24}$$

ดังนั้น $zi=\ln\left(5\pm\sqrt{24}\right)$ นั่นคือ $z=-i\ln\left(5+\sqrt{24}\right)$ หรือ $-i\ln\left(5-\sqrt{24}\right)$

1.6.2 ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ

ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm function) ของเลขจำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi=re^{i\theta}$ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\ln(z)=\ln\left(re^{i\theta}\right)=\ln(r)+\ln\left(e^{i\theta}\right)=\ln(r)+i\theta \qquad (1.31)$$

ตัวอย่างที่ 1.15 จงหาค่าของ $\ln(3+4i)$

วิธีทำ เนื่องจาก $z=3+4i=5e^{0.9273i}$ ดังนั้น

$$\ln(3+4i)=\ln\left(5e^{0.9273i}\right)$$

$$=\ln(5)+\ln\left(e^{0.9273i}\right)=1.61+0.93i$$

SCILAB:

```
-->log(3 + 4*%i)
 ans  =
     1.6094379 + 0.9272952i
```

1.7 ปริพันธ์เชิงซ้อน

การหาปริพันธ์เชิงซ้อน (complex integration) มีประโยชน์มากสำหรับการแก้ไขปัญหาทางด้านวิศวกรรม เนื่องจากปัญหาส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงซ้อน โดยทั่วไปการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันจริง (real function) สามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1) การหาปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral) หรือปริพันธ์แบบกำหนดลิมิต

2) การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) หรือปริพันธ์แบบไม่กำหนดลิมิต

ในส่วนนี้จะอธิบายเฉพาะการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ เมื่อ $z=x+yi$ เป็นจุดในระนาบเชิงซ้อน ถ้ากำหนดให้ $z(t)=x(t)+iy(t)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนในช่วงค่าจริง $D=[\alpha,\beta]$ เมื่อ $x(t)$ และ $y(t)$ เป็นฟังก์ชันจริง และ α และ β เป็นเลขจำนวนจริง ดังนั้นปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันเชิงซ้อน $z(t)$ บนช่วง $[\alpha,\beta]$ หาได้จาก

$$\int_{\alpha}^{\beta} z(t)\,dt=\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt+i\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,dt \tag{1.32}$$

ตัวอย่างที่ 1.16 จงหาค่าของ $\int_0^2\left[(t+2)+it^2\right]dt$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\int_0^2\left[(t+2)+it^2\right]dt=\int_0^2(t+2)\,dt+i\int_0^2 t^2dt$$

$$=\left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{2}+\left.2t\right|_{t=0}^{2}+i\left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{2}$$

$$=\left(\frac{4}{2}-0\right)+2(2-0)+i\left(\frac{8}{3}-0\right)=6+\frac{8}{3}i$$

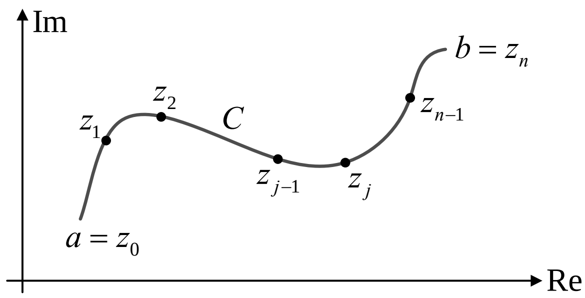
SCILAB:

```
-->function y=f(t), y=(t+2)+...
-->%i*t^2, endfunction
-->y = intc(0, 2, f)
 y  =
    6. + 2.6666667i
```

อย่างไรก็ตามถ้าช่วง $D=[\alpha,\beta]$ เป็นเซตย่อย (subset) ในระนาบเชิงซ้อนแล้ว การหาปริพันธ์จำกัดเขตจะแตกต่างจากที่กล่าวมาข้างต้น กล่าวคือถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนที่นิยามบนเซตย่อยของระนาบเชิงซ้อน และ a และ b เป็นเลขจำนวนเชิงซ้อนภายในโดเมน f การหาปริพันธ์ของ f ต้องกำหนด “เส้นทาง (path)” ที่จะทำการหาปริพันธ์ในระนาบเชิงซ้อนก่อน นั่นคือถ้ากำหนดให้ C เป็นเส้นทางจากจุด a ไปยังจุด b โดยที่ a ไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากับ b แล้ว C จะต้องเป็นเซตย่อยภายในโดเมน f ด้วย

ถ้าให้ P เป็นการแบ่งส่วนของเส้นโค้ง C นั่นคือ $P=\{z_0,z_1,\ldots,z_n\}$ เป็นเซตย่อยของ C โดยที่ $z_0=a$, $z_n=b$, และ z_j มาหลังจาก z_{j-1} ทันทีในระหว่างเส้นทางเดินบนเส้นโค้ง C จากจุด a ไปจุด b ตามภาพที่ 1.5 ดังนั้นผลรวมรีมันน์ (Reimann sum) [2] ที่สอดคล้องกับการแบ่งส่วน P คือ

$$S(P)=\sum_{j=1}^{n} f(\tilde{z}_j)\Delta z_j \tag{1.33}$$



ภาพที่ 1.5 ภาพแสดงเส้นทางเดินบนเส้นโค้ง C จาก a และ b

เมื่อ $\tilde{z}_j$ คือจุดใดๆ บนเส้นโค้งระหว่าง z_{j-1} และ z_j และ $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ ถ้าความยาวของเส้น Δz_j มีค่าเข้าใกล้ค่า 0 จะได้ว่า n มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ เพราะฉะนั้นสมการ (1.33) สามารถเขียนได้เป็น

$$\lim_{n\to\infty} S(P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(z_j)\Delta z_j = \int_C f(z)\,dz \tag{1.34}$$

ซึ่งเรียกว่าปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ $f(z)$ ตามเส้นโค้ง C โดยคุณสมบัติที่สำคัญของปริพันธ์ตามเส้นมีดังนี้

1) $\int_C \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz$ เมื่อ α คือค่าคงตัว

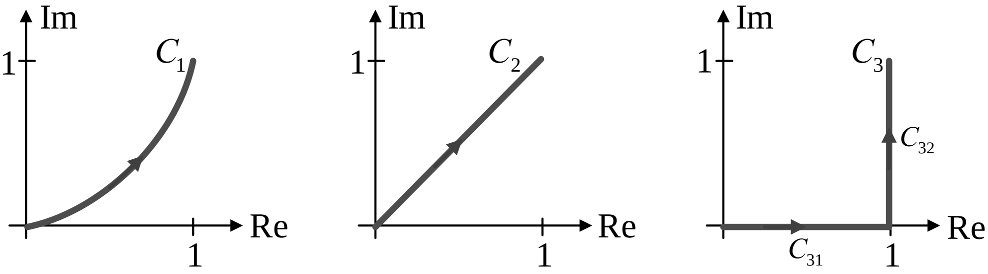
2) $\int_C \{f(z)+g(z)\}\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

หมายเหตุ ในกรณีที่เส้นโค้ง C เป็นเส้นโค้งปิด นั่นคือเมื่อ $a=b$ จะเรียกการหาปริพันธ์ตามเส้นโค้งปิดนี้ว่าการหาปริพันธ์ครบรอบทางเดินปิด หรือปริพันธ์คอนทัวร์ (contour integral) และใช้สัญลักษณ์ $\oint_C f(z)\,dz$ โดยที่เส้นทางในการหาปริพันธ์มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

1.7.1 วิธีการหาปริพันธ์เชิงซ้อน

ถ้ากำหนดให้ γ คือฟังก์ชันเชิงซ้อนที่นิยามบนเส้นโค้ง C จากจุด a ไปจุด b ซึ่งถูกแบ่งส่วนออกเป็น $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ ดังนั้น $\{a=\gamma(\alpha),\gamma(t_1),\ldots,\gamma(t_{n-1}),\gamma(\beta)=b\}$ คือการแบ่งส่วนของเส้นโค้ง C โดยที่อนุพันธ์ของ γ จะต้องไม่เท่ากับค่าศูนย์ นั่นคือ $\gamma'(t)\neq 0$ สำหรับทุกค่า t ดังนั้นผลรวมรีมันน์ตามสมการ (1.33) สามารถเขียนได้เป็น [2]

$$S(P) = \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(\tilde{t}_j))\{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\} = \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(\tilde{t}_j))\left\{\frac{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right\}\{t_j - t_{j-1}\} \tag{1.35}$$



ภาพที่ 1.6 เส้นทางปริพันธ์ที่แตกต่างกันจาก $a=0$ ไปยัง $b=1+i$

เมื่อ $\tilde{z}_j=\gamma(\tilde{t}_j)$ คือจุดใดๆ บนเส้นโค้ง C สำหรับ $t_{j-1}\le\tilde{t}_j\le t_j$ และเมื่อ n เข้าใกล้ค่าอนันต์ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}S(P)=\int_C f(z)\,dz=\int_{\alpha}^{\beta}f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \tag{1.36}$$

ดังนั้นการหาปริพันธ์เชิงซ้อนตามเส้นโค้ง C สามารถทำตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1) หาสมการของเส้นโค้ง C ที่ใช้ในการหาปริพันธ์จากจุด a ไปยังจุด b โดยจัดให้อยู่ในรูป $z=\gamma(t)$ เมื่อ $a\le t\le b$
2) หาอนุพันธ์ $\gamma'(t)=\dfrac{d\gamma(t)}{dt}$
3) แทนค่า $z=\gamma(t)$ ในฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$
4) คำนวณหาปริพันธ์ของ $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ เทียบกับ t จาก a ถึง b

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้จะได้เข้าใจวิธีการหาปริพันธ์เชิงซ้อนมากขึ้น

ตัวอย่างที่ 1.17 จงหาปริพันธ์ของ $f(z)=(x^2+y)+i(xy)$ จากจุด $a=(0,0)$ ไปยังจุด $b=(1,1)$ ตามเส้นทางปริพันธ์ C_1, C_2, และ C_3 ที่แสดงในภาพที่ 1.6

วิธีทำ วิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ ตามเส้นทางปริพันธ์ต่างๆ สามารถทำได้ดังนี้

เส้นทางที่ 1: กำหนดให้ C_1 เป็นส่วนของเส้นพาราโบลา $y=x^2$ ที่เชื่อมระหว่างจุด a และ b ดังนั้นถ้าให้ $x=t$ จะได้ $y=t^2$ และฟังก์ชันเชิงซ้อนของเส้นโค้ง C_1 คือ $\gamma_1(t)=t+it^2$ (จาก $z=x+iy$) สำหรับ $0\le t\le 1$ เพราะฉะนั้น

$$f(\gamma_1(t))=(t^2+t^2)+i(t^2t)=2t^2+it^3 \quad \text{และ} \quad \gamma_1'(t)=1+2ti$$

จากสมการ (1.36) ปริพันธ์ของ $f(z)$ ตามเส้นทาง C_1 หาได้โดย

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 \left(2t^2 + it^3\right)(1+2ti)\,dt$$
$$= \int_0^1 \left(2t^2 - 2t^4 + 5t^3 i\right)dt$$
$$= \frac{4}{15} + \frac{5}{4}i$$

SCILAB:

```
-->function y=f(t), y=2*t^2 - ...
-->2*t^4 + 5*t^3*%i, endfunction
-->y = intc(0, 1, f)
 y  =
    0.2666667 + 1.25i
```

เส้นทางที่ 2: กำหนดให้ C_2 เป็นส่วนของเส้นตรง $y = x$ ที่เชื่อมระหว่างจุด a และ b ดังนั้นถ้าให้ $x = t$ จะได้ $y = t$ และฟังก์ชันเชิงซ้อนของเส้นโค้ง C_2 คือ $\gamma_2(t) = t + it$ เมื่อ $0 \le t \le 1$ เพราะฉะนั้น

$$f(\gamma_2(t)) = \left(t^2 + t\right) + i(tt) = t^2 + t + it^2 \quad \text{และ} \quad \gamma_2'(t) = 1 + i$$

จากสมการ (1.36) ปริพันธ์ของ $f(z)$ ตามเส้นทาง C_2 หาได้โดย

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^1 \left(t^2 + t + it^2\right)(1+2ti)\,dt$$
$$= \int_0^1 \left(t + i\left(t + 2t^2\right)\right)dt$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{6}i$$

SCILAB:

```
-->function y=f(t), y = t + ...
-->%i*(t + 2*t^2), endfunction
-->y = intc(0, 1, f)
 y  =
    0.5 + 1.1666667i
```

เส้นทางที่ 3: กำหนดให้ C_3 เป็นเส้นทางจากจุด a ไปยังจุด b ซึ่งประกอบไปด้วยส่วนของเส้นตรง 2 ส่วน คือเส้นตรง C_{31} เชื่อมต่อจุด $(0,0)$ ไปยังจุด $(1,0)$ และเส้นตรง C_{32} เชื่อมต่อจุด $(1,0)$ ไปยังจุด $(1,1)$ ดังนั้น ปริพันธ์ของ $f(z)$ ตามเส้นทาง C_3 มีค่าเท่ากับผลรวมของปริพันธ์ตามเส้นทาง C_{31} และ C_{32} นั่นคือ

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_{C_{31}} f(z)\,dz + \int_{C_{32}} f(z)\,dz \qquad (1.37)$$

- สำหรับเส้นทาง C_{31} ถ้าให้ $x = t$ และ $y = 0$ จะได้ $\gamma_{31}(t) = t$ เมื่อ $0 \le t \le 1$ เพราะฉะนั้น $f(\gamma_{31}(t)) = t^2$ และ $\gamma_{31}'(t) = 1$ จากสมการ (1.36) จะได้ว่า

$$\int_{C_{31}} f(z)\,dz = \int_0^1 \left(t^2\right)(1)\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{1} = \frac{1}{3} \qquad (1.38)$$

- สำหรับเส้นทาง C_{32} ถ้าให้ $x = 1$ และ $y = t$ จะได้ $\gamma_{32}(t) = 1 + ti$ เมื่อ $0 \le t \le 1$ เพราะฉะนั้น $f(\gamma_{32}(t)) = \left(1^2 + t\right) + i(1)(t) = t + 1 + it$ และ $\gamma_{32}'(t) = i$ จากสมการ (1.36) จะได้ว่า

$$\int_{C_{32}} f(z)\,dz = \int_0^1 (t+1+it)(i)\,dt$$

$$= \int_0^1 (it+i-t)\,dt = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \qquad (1.39)$$

แทนค่าสมการ (1.38) และ (1.39) ลงในสมการ (1.37) จะได้ว่าปริพันธ์ของ $f(z)$ ตามเส้นทาง C_3 มีค่าเท่ากับ

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right) = -\frac{1}{6}+\frac{3}{2}i$$

จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ ตามเส้นทางปริพันธ์ที่แตกต่างกันจะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต่างกันด้วย

ตัวอย่างที่ 1.18 จงแสดงว่าปริพันธ์คอนทัวร์ $\oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

วิธีทำ เนื่องจากเส้นรอบวง C สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันเชิงซ้อน $\gamma(t)=\cos(t)+i\sin(t)$ เมื่อ $0\le t\le 2\pi$ ซึ่งจะได้ว่า

$$f(\gamma(t)) = \frac{1}{\cos(t)+i\sin(t)} \quad \text{และ} \quad \gamma'(t) = -\sin(t)+i\cos(t)$$

ดังนั้น

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\cos(t)+i\sin(t)}\right)\left(-\sin(t)+i\cos(t)\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin(t)+i\cos(t)}{\cos(t)+i\sin(t)}\right)\left(\frac{\cos(t)-i\sin(t)}{\cos(t)-i\sin(t)}\right)dt$$

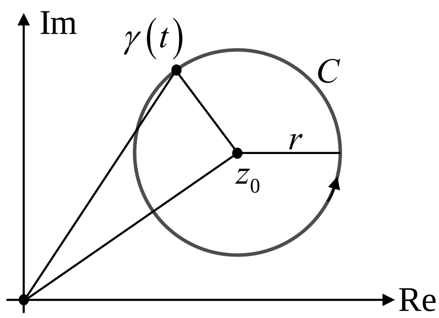
$$= \int_0^{2\pi} i\,dt$$

$$= 2\pi i$$

$$= 6.2831853i$$

SCILAB:

```
-->function y = f(z), y = 1/z, ...
-->endfunction
-->y = clean(intl(0,2*%pi,0,1,f))
 y  =
    6.2831853i
```



ภาพที่ 1.7 เส้นทางปริพันธ์ในตัวอย่างที่ 1.19

ตัวอย่างที่ 1.19 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ เมื่อ n คือจำนวนเต็ม, z_0 คือค่าคงตัว, และ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ r และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ z_0 ดังแสดงในภาพที่ 1.7

วิธีทำ ฟังก์ชันเชิงซ้อนของเส้นโค้ง C หาได้จาก

$$\gamma(t)-z_0=r\left(\cos(t)+i\sin(t)\right) \text{ สำหรับ } 0\le t\le 2\pi \tag{1.40}$$

จากความสัมพันธ์ของออยเลอร์ $e^{it}=\cos(t)+i\sin(t)$ สมการ (1.40) สามารถเขียนได้เป็น

$$\gamma(t)=z_0+re^{it} \tag{1.41}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$f(\gamma(t))=\frac{1}{\left(z_0+re^{it}-z_0\right)^{n+1}}=\frac{1}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}}$$

และ $\gamma'(t)=ire^{it}$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}}\right)\left(ire^{it}\right)dt\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n e^{nti}}dt\\ &= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}e^{-nti}dt \end{aligned} \tag{1.42}$$

โดยที่ถ้า $n=0$ จะได้

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)}dz = i\int_0^{2\pi}(1)dt \;\; = 2\pi i = 6.283i$$

และถ้า $n \neq 0$ จะได้

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}\left(\cos(nt) - i\sin(nt)\right)dt$$

$$= \frac{i}{r^n}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\bigg|_{t=0}^{2\pi} + i\frac{\cos(nt)}{n}\bigg|_{t=0}^{2\pi}\right]$$

$$= 0$$

SCILAB:

```
-->function y=f(z,z0,n), ...
-->y=1/(z-z0)^n, endfunction
-->z0=2;
-->r=1;
-->n=1;
-->y=clean(intl(0,2*%pi,z0,r,f))
 y  =
     6.2831853i
-->n=3;
-->y=lean(intl(0,2*%pi,z0,r,f))
 y  =
     0
```

ดังนั้นสรุปได้ว่า

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases} \tag{1.43}$$

1.7.2 การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันวิเคราะห์

กำหนดให้ฟังก์ชันจริง $F(x)$ เป็นปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ นั่นคือ

$$F(x) = \int f(x)dx \tag{1.44}$$

ดังนั้นถ้ากำหนดลิมิตของการหาปริพันธ์จาก a ไปหา b ให้กับสมการ (1.44) จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{1.45}$$

วิธีการนี้สามารถนำมาใช้ในการปริพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อนได้เช่นกันตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท การหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันวิเคราะห์[1]

กำหนดให้ฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ เป็น "ฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function)" [2] ภายในโดเมน D และมีปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $f(z)$ คือ $F(z)$ เกิดขึ้นภายในโดเมน D และตลอดทางเดินทั้งหมดที่เชื่อมระหว่างจุด z_0 และจุด z_1 ภายใน D ดังนั้น

[1] ฟังก์ชันวิเคราะห์ $f(z)$ คือฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้สำหรับทุกค่า z

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) \tag{1.46}$$

สมการ (1.46) แสดงให้เห็นว่าปริพันธ์ของ $f(z)$ สำหรับทุกเส้นทางปริพันธ์จากจุด z_0 ไปยังจุด z_1 มีค่าเท่ากัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือผลลัพธ์จากการหาปริพันธ์ของ $f(z)$ จะไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทางปริพันธ์ แต่จะขึ้นกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของเส้นทางปริพันธ์ ดังนั้นวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ $f(z)$ ให้ทำตามขั้นตอนดังนี้

1) หาฟังก์ชัน $F(z)$ ที่มีอนุพันธ์เท่ากับ $f(z)$ นั่นคือ $F'(z) = f(z)$
2) หาปริพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ ตามสมการ (1.46)

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้จะได้เข้าใจการหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 1.20 จงหาค่าของ $\int_0^{2+i} z\,dz$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน $f(z) = z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เพราะว่า $f'(z) = 1$ สำหรับทุกค่า z ดังนั้นค่าปริพันธ์ที่โจทย์กำหนดจึงสามารถคำนวณหาได้โดยใช้สมการ (1.46) จากสูตรการหาปริพันธ์

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

ถ้ากำหนดให้ $c = 0$ จะได้ว่า $F(z) = \frac{z^2}{2}$ เพราะฉะนั้น

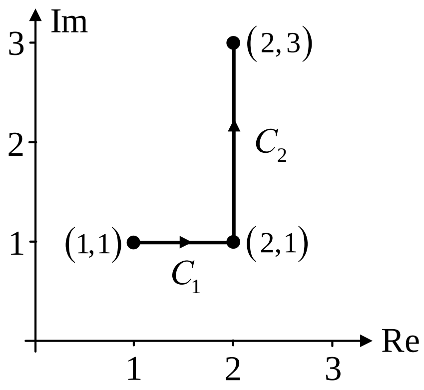
$$\int_0^{2+i} z\,dz = \left.\left(\frac{z^2}{2}\right)\right|_0^{2+i} = \frac{1}{2}\left((2+i)^2 - 0^2\right) = \frac{3}{2} + 2i$$

SCILAB:

```
-->function y=f(z), y=z, endfunction
-->y = intc(0, 2+%i, f)
 y  =
     1.5 + 2.i
```

ตัวอย่างที่ 1.21 จงหาค่าของ $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos(z)\,dz$

วิธีทำ ในที่นี้ $f(z) = \cos(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เพราะว่า $f'(z) = -\sin(z)$ สำหรับทุกค่า z ดังนั้นค่าปริพันธ์ที่โจทย์กำหนดจึงสามารถคำนวณหาได้จากสมการ (1.46) นั่นคือ



ภาพที่ 1.8 เส้นทางปริพันธ์ในตัวอย่างที่ 1.22

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos(z)\,dz = \sin(z)\Big|_{-\pi i}^{\pi i} = \sin(\pi i) - \sin(-\pi i)$$

$$= 2\sin(\pi i) \qquad \because \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$= 2\left(\frac{e^{(\pi i)i} - e^{-(\pi i)i}}{2i}\right)$$

$$= 2i\left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}\right)$$

$$= 2i\sinh(\pi) = 23.097i$$

SCILAB:

```
-->function y=f(z), y=cos(z), ...
-->endfunction
-->y = intc(-%pi*%i, %pi*%i, f)
 y  =
    23.097479i
```

ตัวอย่างที่ 1.22 จงหาค่าของ $\int_C (3z^2 - iz)\,dz$ เมื่อ C คือเส้นทางปริพันธ์ที่เชื่อมระหว่างจุด $(1,1)$ และ $(2,3)$ โดยวิธีการดังต่อไปนี้

ก) การหาปริพันธ์ตามเส้นทางปริพันธ์ C ในภาพที่ 1.8

ข) การหาปริพันธ์ตามเส้นทางปริพันธ์ C ที่กำหนดโดยสมการ $y = x^2 - x + 1$

ค) การหาปริพันธ์จำกัดเขต

วิธีทำ

ก) การหาปริพันธ์ตามเส้นทางปริพันธ์ C ในภาพที่ 1.8

เส้นทางปริพันธ์ในภาพที่ 1.8 ประกอบไปด้วยส่วนของเส้นตรง 2 เส้นที่เชื่อมต่อกัน นั่นคือเส้นตรง C_1 ที่เชื่อมจุด $(1,1)$ และ $(2,1)$ และเส้นตรง C_2 ที่เชื่อมจุด $(2,1)$ และ $(2,3)$

- เส้นทาง C_1 สามารถกำหนดได้ด้วยสมการ $\gamma_1(t) = t + i$ เมื่อ $1 \le t \le 2$ และ $\gamma_1'(t) = 1$ ดังนั้น

$$\int_{C_1}\left(3z^2-iz\right)dz=\int_1^2\left\{3\left(t+i\right)^2-i\left(t+i\right)\right\}\left(1\right)dt=\int_1^2\left\{3t^2+5it-2\right\}dt$$

$$=3\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2+5i\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2-2\left(t\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(2^3-1^3\right)+\frac{5}{2}i\left(2^2-1^2\right)-2\left(2-1\right)$$

$$=5+\frac{15}{2}i$$

SCILAB:

```
-->function y=f(t),y=3*t^2+...
-->5*%i*t-2, endfunction
-->y = intc(1, 2, f)
 y  =
    5. + 7.5i
```

- เส้นทาง C_2 ที่เชื่อมระหว่างจุด $(2,1)$ และ $(2,3)$ สามารถกำหนดได้ด้วยสมการ $\gamma_2\left(t\right)=2+it$ เมื่อ $1\le t\le 3$ และ $\gamma_2'\left(t\right)=i$ เพราะฉะนั้น

$$\int_{C_2}\left(3z^2-iz\right)dz=\int_1^3\left\{3\left(2+it\right)^2-i\left(2+it\right)\right\}\left(i\right)dt$$

$$=\int_1^3\left\{-3it^2+\left(i-12\right)t+12i+2\right\}dt$$

$$=-3i\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^3+\left(i-12\right)\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^3+\left(12i+2\right)\left(t\right)\Big|_1^3$$

$$=-i\left(3^3-1^3\right)+\left(\frac{i-12}{2}\right)\left(3^2-1^2\right)+\left(12i+2\right)\left(3-1\right)$$

$$=-44+2i$$

SCILAB:

```
-->function y=f(t),y = ...
-->-3*%i*t^2+(%i-12)*t+...
-->12*%i+2, endfunction
-->y = intc(1, 3, f)
 y  =
  - 44. + 2.i
```

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_C\left(z^2-iz\right)dz=\int_{C_1}\left(z^2-iz\right)dz+\int_{C_2}\left(z^2-iz\right)dz$$

$$=\left(5+\frac{15}{2}i\right)+\left(-44+2i\right)=-39+9.5i$$

ข) การหาปริพันธ์ตามเส้นทางปริพันธ์ เมื่อ C คือ $y=x^2-x+1$

ถ้าให้ $x=t$ จะได้ $y=t^2-t+1$ ดังนั้นฟังก์ชันเชิงซ้อนของเส้นโค้ง C คือ

$$z=\gamma\left(t\right)=x+yi=t+\left(t^2-t+1\right)i$$

สำหรับ $1 \le t \le 2$ ดังนั้น $\gamma'(t) = 1 + (2t-1)i$ และจาก $f(z) = 3z^2 - iz$ จะได้ว่า

$$f(z) = f(\gamma(t)) = 3\left(t + \left(t^2 - t + 1\right)i\right)^2 - i\left(t + \left(t^2 - t + 1\right)i\right)$$

$$= \left(-3t^4 + 6t^3 - 5t^2 + 5t - 2\right) + \left(6t^3 - 6t^2 + 5t\right)i$$

จากสมการ (1.36) ปริพันธ์ของ $f(z)$ ตามเส้นทาง C หาได้โดย

$$\int_C f(z)\,dz = \int_1^2 \left[\left(-3t^4 + 6t^3 - 5t^2 + 5t - 2\right) + \left(6t^3 - 6t^2 + 5t\right)i\right]\left[1 + (2t-1)i\right] dt$$

$$= \int_1^2 \left(-15t^4 + 24t^3 - 21t^2 + 10t - 2\right) dt + i\int_1^2 \left(-6t^5 + 15t^4 - 10t^3 + 9t^2 - 4t + 2\right) dt$$

$$= -39 + 9.5i$$

SCILAB: (ตัวอย่างที่ 1.22)

```
-->t = poly(0,'t');
-->fz = 3*(t+(t^2-t+1)*%i)^2 - %i*(t+(t^2-t+1)*%i)
 fz  =
real part
                 2     3     4
  - 2 + 5t - 5t + 6t - 3t
imaginary part
             2     3
    5t - 6t + 6t
-->A  = fz*(1+(2*t-1)*%i)
 A  =
real part
                   2      3      4
  - 2 + 10t - 21t + 24t - 15t
imaginary part
                 2      3      4     5
    2 - 4t + 9t - 10t + 15t - 6t
-->RealPart  = integrate('-15*t^4+24*t^3-21*t^2+10*t-2', 't', 1, 2)
 RealPart  =
  - 39.
-->ImagePart = integrate('-6*t^5+15*t^4-10*t^3+9*t^2-4*t+2','t',1, 2)
 ImagePart  =
    9.5
```

ค) การหาปริพันธ์จำกัดเขต

การหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันวิเคราะห์ $f(z)$ ตามเส้นทางจากจุด $(1,1)$ ไปยังจุด $(2,3)$ ทำได้โดยใช้สมการ (1.46) เมื่อจุด $(1,1)$ ก็คือค่าขอบเขตล่าง $1+i$ และจุด $(2,3)$ ก็คือค่าขอบเขตบน $2+3i$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_C \left(3z^2-iz\right)dz &= \int_{1+i}^{2+3i}\left(3z^2-iz\right)dz \\ &= 3\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{1+i}^{2+3i} - i\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{1+i}^{2+3i} \\ &= \left\{(2+3i)^3-(1+i)^3\right\}-\frac{i}{2}\left\{(2+3i)^2-(1+i)^2\right\} \\ &= -39+9.5i\end{aligned}$$

SCILAB:

```
-->function y = f(z), y = ...
-->3*z^2-%i*z, endfunction
-->y = intc(1+%i, 2+3*%i, f)
 y  =
  - 39. + 9.5i
```

จากผลลัพธ์ที่ได้ในข้อ (ก) – (ค) พบว่ามีค่าเท่ากัน ทั้งนี้เป็นเพราะว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เนื่องจาก $f'(z)=6z-i$ สำหรับทุกค่า z ภายในบริเวณที่หาปริพันธ์ ดังนั้นตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์จากการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์จะไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทางปริพันธ์ แต่จะขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของการหาปริพันธ์

หมายเหตุ ฟังก์ชัน $f(z)=\left(x^2+y\right)+i(xy)$ ในตัวอย่างที่ 1.17 ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในช่วง $[0,1+i]$ [3] จึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการหาปริพันธ์ตามเส้นทางปริพันธ์ที่ไม่เหมือนกันมีค่าต่างกัน

1.7.3 ทฤษฎีปริพันธ์ของโคชี

ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว[2] D ดังนั้นทฤษฎีปริพันธ์ของโคชี (Cauchy's integral theorem) [2] กล่าวว่าสำหรับทางเดินปิดเชิงเดียว[3] C ทุกๆ แบบที่อยู่ภายในโดเมน D จะได้ว่า

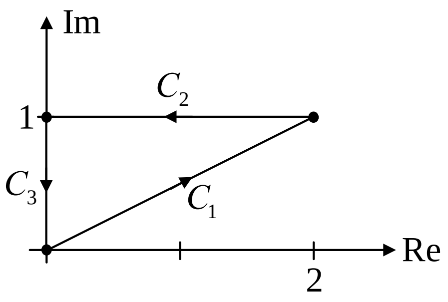
$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \qquad (1.47)$$

ตัวอย่างที่ 1.23 กำหนดให้ $f(z)=z^2$ จงแสดงว่า $\oint_C z^2 dz = 0$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามด้านคือ C_1, C_2, และ C_3 ตามภาพที่ 1.9 โดยใช้

---

[2] โดเมน D จะเรียกว่าเป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว (simple connected domain) ถ้าทางเดินปิดเชิงเดียวทุกรูปแบบที่อยู่ภายใน D ล้อมรอบจุดต่างๆ ของ D

[3] เส้นโค้ง C ถูกเรียกว่าเป็นทางเดินปิดเชิงเดียว (simple closed curve) ถ้าเส้นโค้ง C ไม่ตัดกันหรือสัมผัสกับตัวมันเอง



ภาพที่ 1.9 เส้นทางปริพันธ์ในตัวอย่างที่ 1.23

ก) วิธีการหาปริพันธ์ตามเส้นทางปริพันธ์

ข) ทฤษฎีของโคชี

วิธีทำ

ก) วิธีการหาปริพันธ์ตามเส้นทางปริพันธ์

จากโจทย์จะได้ว่า

$$\oint_C z^2 dz = \oint_{C_1} z^2 dz + \oint_{C_2} z^2 dz + \oint_{C_3} z^2 dz \tag{1.48}$$

โดยที่เส้นทาง C_1 สามารถแทนได้ด้วยสมการ $\gamma_1(t) = 2t + it$ เมื่อ $0 \le t \le 1$ และ $\gamma_1'(t) = 2 + i$ จากสมการ (1.36) นั่นคือ $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(z)dz &= \int_0^1 (2t+it)^2 (2+i)dt \\ &= \int_0^1 \left(2t^2 + 11it^2\right)dt \\ &= (2+11i)\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i \;= 0.667 + 3.667i\end{aligned}$$

SCILAB:

```
-->function y = f(t), y = ...
-->2*t^2+11*%i*t^2, endfunction
-->y = intc(0, 1, f)
 y  =
    0.6666667 + 3.6666667i
```

สำหรับเส้นทาง C_2 สามารถแทนได้ด้วยสมการ $\gamma_2(t) = 2t + i$ เมื่อ $0 \le t \le 1$ และ $\gamma_2'(t) = 2$ ดังนั้น

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_1^0 (2t+i)^2 (2)dt = \int_1^0 \left(8t^2 + 8ti - 2\right)dt$$

$$= 8\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^0 + 8i\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^0 - 2(t)\Big|_1^0$$

$$= \frac{8}{3}(0-1) + 4i(0-1) - 2(0-1)$$

$$= -\frac{2}{3} - 4i \;= -0.667 - 4i$$

SCILAB:

```
-->function y = f(t), y = ...
-->8*t^2+8*%i*t-2, endfunction
-->y = intc(1, 0, f)
 y  =
  - 0.6666667 - 4.i
```

และเส้นทาง C_3 สามารถแทนได้ด้วยสมการ $\gamma_3(t) = 0 + ti$ เมื่อ $0 \le t \le 1$ และ $\gamma_3'(t) = i$ ดังนั้น

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_1^0 (ti)^2 (i)\,dt = -\int_1^0 t^2 i\,dt$$

$$= -i\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^0$$

$$= \frac{1}{3}i \;= 0.333i$$

SCILAB:

```
-->function y = f(t), y = ...
-->-%i*t^2, endfunction
-->y = intc(1, 0, f)
 y  =
    0.3333333i
```

เพราะฉะนั้นจากสมการ (1.48) จะได้ว่า

$$\oint_C z^2 dz = \left(\frac{2}{3} + \frac{11}{3}i\right) + \left(-\frac{2}{3} - 4i\right) + \left(\frac{1}{3}i\right) = 0$$

ข) ทฤษฎีของโคชี

เนื่องจากฟังก์ชัน $f(z) = z^2$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดบนระนาบเชิงซ้อน และ $C = C_1 + C_2 + C_3$ เป็นทางเดินปิดเชิงเดียว ดังนั้นจากทฤษฎีปริพันธ์ของโคชีจะได้ว่า

$$\oint_C z^2 dz = 0$$

เช่นเดียวกับคำตอบที่ได้ในข้อ (ก)

1.7.4 สูตรปริพันธ์ของโคชี

ถ้ากำหนดให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว D [2] ดังนั้นสำหรับจุด z_0 ที่อยู่ภายใน D และมีทางเดินปิดเชิงเดียว C ที่อยู่ภายใน D ล้อมรอบอยู่ จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = (2\pi i)\,f(z_0) \tag{1.49}$$

สูตรปริพันธ์ของโคชีมีประโยชน์มากในการหาค่าปริพันธ์ต่างๆ นอกจากนี้ยังสามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ต่างๆ ได้ เช่น การพิสูจน์ว่าฟังก์ชันวิเคราะห์มีอนุพันธ์ทุกๆ อันดับหรือไม่ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1.24 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{1}{z\left(z^2-1\right)}dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $z=0$ และมีรัศมี 0.25 หน่วย

วิธีทำ เนื่องจาก $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของทุกจุดภายในวงกลม C ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $z=0$ และมีรัศมี 0.25 หน่วย ดังนั้นจากสูตรปริพันธ์ของโคชีจะได้ว่า

$$\oint_C \frac{1}{z-0}\left(\frac{1}{z^2-1}\right)dz=(2\pi i)f(0)$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{0^2-1}\right)$$

$$=-6.2832i$$

SCILAB:

```
-->function y=f(z),...
-->y=1/z/(z^2-1),endfunction
-->y = clean(intl(0,2*%pi,0,0.25,f))
 y  =
  - 6.2831853i
```

ตัวอย่างที่ 1.25 จงหาค่าของ $\oint_C g(z)dz=\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$ ตามเส้นทางทวนเข็มนาฬิการอบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด

ก) $z=1$ ข) $z=0.5$ ค) $z=-1+0.5i$ ง) $z=i$

ตามที่แสดงในภาพที่ 1.10

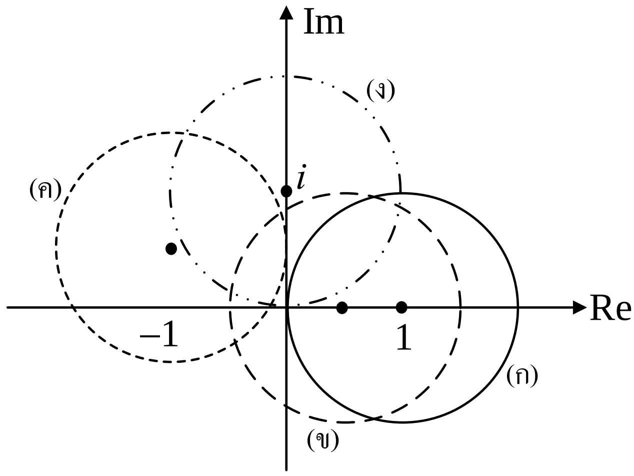
วิธีทำ จากโจทย์พบว่า $g(z)=\frac{z^2+1}{z^2-1}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=1$ และ $z=-1$

ก) เมื่อ C เป็นเส้นทางทวนเข็มนาฬิการอบวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=1$ แสดงว่ามีจุด $z=1$ เท่านั้นที่อยู่ภายในวงกลมที่หาปริพันธ์ ดังนั้น

$$g(z)=\frac{z^2+1}{z^2-1}=\frac{1}{z-1}\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)=\frac{1}{z-1}f(z)$$

จากสูตรปริพันธ์ของโคชีจะได้ว่า

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-1}dz=(2\pi i)f(1)=(2\pi i)\left(\frac{1^2+1}{1+1}\right)=2\pi i=6.2832i$$



ภาพที่ 1.10 เส้นทางปริพันธ์แบบต่างๆ ในตัวอย่างที่ 1.25

ข) เมื่อ C เป็นเส้นทางทวนเข็มนาฬิการอบวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=0.5$ แสดงว่ามีจุด $z=1$ เท่านั้นที่อยู่ภายในวงกลมที่หาปริพันธ์ ดังนั้นการหาปริพันธ์จะมีลักษณะเหมือนกับข้อ (ก) นั่นคือ

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_C \frac{1}{z-1}\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)dz = (2\pi i)\left(\frac{1^2+1}{1+1}\right) = 2\pi i = 6.2832i$$

ค) เมื่อ C เป็นเส้นทางทวนเข็มนาฬิการอบวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=-1+0.5i$ แสดงว่ามีจุด $z=-1$ เท่านั้นที่อยู่ภายในวงกลมที่หาปริพันธ์ ดังนั้นจะได้ว่า

$$g(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1} = \frac{1}{z+1}\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right) = \frac{1}{z+1}f(z)$$

จากสูตรปริพันธ์ของโคชี

$$\oint_C \frac{f(z)}{z+1}dz = (2\pi i)f(-1) = (2\pi i)\left(\frac{(-1)^2+1}{(-1)-1}\right) = -2\pi i$$

ง) เมื่อ C เป็นเส้นทางทวนเข็มนาฬิการอบวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=i$ จากภาพที่ 1.10 พบว่าในกรณีนี้ฟังก์ชัน $g(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของทุกจุดภายในวงกลม ดังนั้นจากทฤษฎีปริพันธ์ของโคชีจะได้ว่า

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 0$$

SCILAB: (ตัวอย่าง 1.25)

```
-->function y = f(z), y = (z^2 + 1)/(z^2 - 1), endfunction
-->y1 = clean(intl(0, 2*%pi, 1, 1, f))                //สำหรับข้อ (ก)
 y1  =
    6.2831853i
-->y2 = clean(intl(0, 2*%pi, 0.5, 1, f))              //สำหรับข้อ (ข)
 y2  =
    6.2831853i
-->y3 = clean(intl(0, 2*%pi, -1 + 0.5*%i, 1, f))      //สำหรับข้อ (ค)
 y3  =
  - 6.2831853i
-->y4 = clean(intl(0, 2*%pi, %i, 1, f))               //สำหรับข้อ (ง)
 y4  =
    0
```

1.7.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์

ในบางครั้งฟังก์ชันจริงที่สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ อาจไม่สามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงได้ อย่างไรก็ตาม สำหรับฟังก์ชันเชิงซ้อนแล้ว ถ้าฟังก์ชันเชิงซ้อนใดสามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งภายในโดเมน D ได้ ฟังก์ชันเชิงซ้อนนั้นก็จะยังคงสามารถหาอนุพันธ์ทุกๆ อันดับภายใน D ได้

ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมน D แล้ว $f(z)$ จะมีอนุพันธ์ได้ทุกๆ อันดับภายใน D โดยที่อนุพันธ์อันดับ n ณ จุด z_0 ซึ่งอยู่ภายใน D สามารถหาได้จาก [2]

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \tag{1.50}$$

เมื่อ C เป็นทางเดินปิดเชิงเดียวที่อยู่ภายใน D และล้อมรอบจุด z_0

ตัวอย่างที่ 1.26 จงหาค่าของ $\oint_C g(z)dz = \oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$ เมื่อ C คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=0$ และมีรัศมี 1.5 หน่วย

วิธีทำ เนื่องจาก $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=1$ และ $z=\pm 2i$ เพราะว่า วงกลม C จะมีเพียงจุด $z=1$ เท่านั้นที่อยู่ภายในวงกลมที่หาปริพันธ์ ดังนั้น

$$g(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{e^z}{(z^2+4)}=\frac{1}{(z-1)^2}f(z)$$

จากสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ (สำหรับ $n=1$) ในสมการ (1.50) จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2}f(z)dz=\frac{2\pi i}{1!}f'(1) \tag{1.51}$$

โดยที่ $f'(z)$ มีค่าเท่ากับ

$$f'(z)=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2+4}\right)=\frac{(z^2+4)e^z-e^z(2z)}{(z^2+4)^2}=\frac{z^2e^z+4e^z-2ze^z}{(z^2+4)^2} \tag{1.52}$$

แทนค่า $z=1$ ลงในสมการ (1.52) จะได้

$$f'(1)=\frac{(1)^2e^1+4e^1-2(1)e^1}{(1^2+4)^2}=\frac{3e}{25}$$

แทนค่า $f'(1)$ ลงในสมการ (1.51) จะได้

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2}\frac{e^z}{(z^2+4)}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{3e}{25}\right)=\frac{6\pi ei}{25}=2.05i$$

SCILAB:

```
-->function y = f(z), y = ...
-->exp(z)/(z-1)^2/(z^2+4), ...
-->endfunction
-->y=clean(intl(0,2*%pi,0,1.5,f))
 y  =
    2.04953621i
```

ตัวอย่างที่ 1.27 จงหาค่า $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^3}dz$ เมื่อ C คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z=0$ และมีรัศมี 3 หน่วย

วิธีทำ เนื่องจาก $f(z)=e^{2z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และจุด $z=-1$ เป็นจุดที่อยู่ภายใน C จากสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์จะได้

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}f(z)dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

เมื่อ $z_0=-1$, $n=2$, และ $f''(z)=4e^{2z}$ ดังนั้น

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^3}f(z)dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(-1)$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left(4e^{2(-1)}\right)$$

$$=1.7007i$$

SCILAB:

```
-->function y = f(z), y = ...
-->exp(2*z)/(z+1)^3, endfunction
-->y = clean(intl(0, 2*%pi, 0, 3, f))
 y  =
    1.7006733i
```