บทที่ 8

กระบวนการชักตัวอย่าง

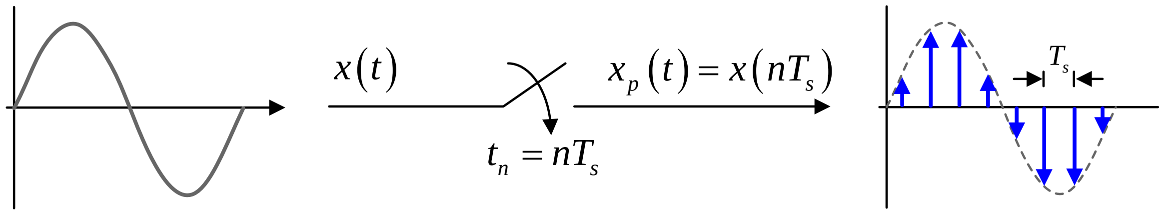
ในปัจจุบันนี้การวิเคราะห์และประมวลผลสัญญาณต่างๆ นิยมทำในรูปของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา หรือสัญญาณดิจิทัล (digital signal) ทั้งนี้เป็นเพราะว่าเทคโนโลยีทางด้านดิจิทัลได้ก้าวหน้าไปมาก จึงทำให้สามารถประมวลผลข้อมูลได้อย่างรวดเร็วโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ นอกจากนี้ข้อมูลในรูปของสัญญาณดิจิทัลมีความสะดวกในการจัดเก็บมากกว่าข้อมูลในรูปของสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาหรือสัญญาณแอนะล็อก (analog signal) เช่น การจัดเก็บข้อมูลดิจิทัลในอุปกรณ์ฮาร์ดดิสก์ไดรฟ์, แผ่นซีดี, และแผ่นดีวีดี เป็นต้น

อย่างไรก็ตามสัญญาณที่ใช้งานส่วนมากจะอยู่ในรูปของสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา ดังนั้นกระบวนการแปลงสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาให้อยู่ในรูปของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาโดยไม่มีความผิดเพี้ยน (distortion) หรือที่รู้จักกันทั่วไปว่า “กระบวนการชักตัวอย่าง (sampling process)” จึงเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับระบบสื่อสารต่างๆ ตัวอย่างเช่น ในระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่ สัญญาณเสียงพูดที่เครื่องโทรศัพท์เคลื่อนที่ ณ ต้นทางจะถูกแปลงเป็นสัญญาณดิจิทัลเพื่อทำการประมวลผลบางอย่างก่อนที่จะส่งผ่านอากาศไปยังเครื่องโทรศัพท์เคลื่อนที่ปลายทาง จากนั้นสัญญาณที่ได้รับก็จะถูกแปลงกลับให้เป็นสัญญาณเสียงพูดเหมือนเดิม ดังนั้นในบทนี้จะอธิบายถึงหลักการของกระบวนการชักตัวอย่างที่ใช้กับสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาและสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

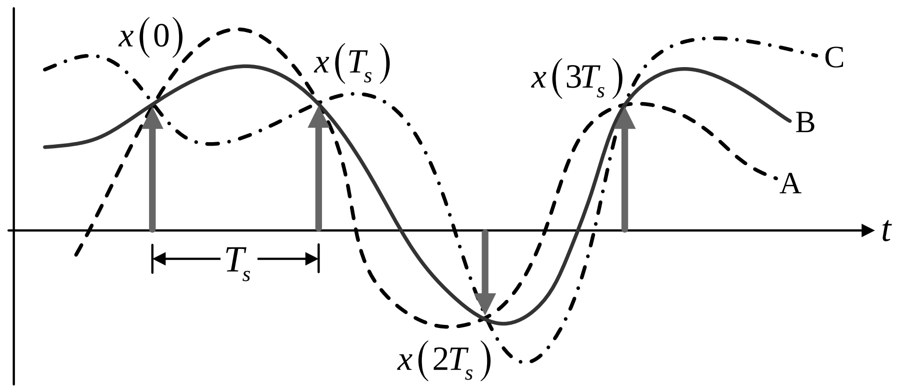
8.1 ทฤษฎีบทการชักตัวอย่าง

พิจารณาภาพที่ 8.1 กระบวนการชักตัวอย่างจะทำการชักตัวอย่างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ ทุกๆ ช่วงเวลา $t_n = nT_s$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็ม และ T_s คือคาบการชักตัวอย่าง (sampling period) ให้อยู่ในรูปของสัญญาณ $x_p(t)$ โดยที่

$$x_p(t) = x(t)\Big|_{t=nT_s} = x(nT_s) \tag{8.1}$$



ภาพที่ 8.1 กระบวนการชักตัวอย่างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$



ภาพที่ 8.2 สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา 3 สัญญาณที่ทำการชักตัวอย่าง ณ เวลา $t_n = nT_s$ แล้วได้ลำดับข้อมูล $\{x(0), x(T_s), x(2T_s), x(3T_s)\}$ เหมือนกัน

โดยทั่วไปข้อมูลแต่ละตัวของ $x(nT_s)$ จะเรียกว่า "แซมเปิล (sample)" และในหนังสือเล่มนี้จะใช้สัญลักษณ์ $\{x(nT_s)\}$ แทนชุดข้อมูลของ $x(nT_s)$ หรือที่เรียกว่า "ลำดับข้อมูล (data sequence)" เช่น $\{x(nT_s)\}$ $= \{x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x(nT_s)\}$

ในทางปฏิบัติสิ่งที่ต้องการจากกระบวนการชักตัวอย่างคือ ต้องการให้ลำดับข้อมูล $\{x(nT_s)\}$ ที่ได้จากการชักตัวอย่างเป็นตัวแทนหนึ่งเดียว (uniqueness) ของสัญญาณ $x(t)$ โดยไม่มีการสูญเสียข่าวสารใดๆ เพื่อที่ว่าจะได้สามารถนำลำดับข้อมูล $\{x(nT_s)\}$ นี้มาสร้างสัญญาณ $x(t)$ ให้กลับคืนมา (signal reconstruction) เหมือนเดิมได้อย่างสมบูรณ์ อย่างไรก็ตามข้อกำหนดนี้เป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อกระบวนการชักตัวอย่างสอดคล้องกับทฤษฎีบทการชักตัวอย่างของไนควิสต์ (Nyquist's sampling theorem) [3, 12 – 13] มิฉะนั้นแล้วสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาหลายสัญญาณเมื่อทำการชักตัวอย่างแล้วอาจทำให้ได้ลำดับข้อมูลเหมือนกันตามที่แสดงในภาพที่ 8.2 ซึ่งจะพบว่าสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาสามสัญญาณคือ A, B, และ C เมื่อทำการชักตัวอย่างสัญญาณทั้งสามนี้ ณ เวลา $t_n = nT_s$ เมื่อ $n = 0, 1, 2,$ และ 3 แล้ว จะได้ลำดับข้อมูลออกมา 4 แซมเปิล คือ $x(0)$, $x(T_s)$, $x(2T_s)$, และ $x(3T_s)$ เหมือนกัน

ทฤษฎีบทการชักตัวอย่างของไนควิสต์จะกล่าวถึงเงื่อนไขที่ทำให้ข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการชักตัวอย่างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาโดยไม่มีการสูญเสียข่าวสาร ฉะนั้นข้อมูลแซมเปิลนี้จึงสามารถนำมาใช้

ในการสร้างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาให้กลับคืนมาเหมือนเดิมได้โดยไม่มีความผิดเพี้ยนเกิดขึ้น ซึ่งการที่จะทำเช่นนี้ได้นั้นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาต้องเป็น "สัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัด (band-limited signal)" และความถี่การชักตัวอย่าง**ต้องมากกว่าหรือเท่ากับสองเท่า**ของความถี่สูงสุดของสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลานั้น

นอกจากนี้เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายเนื้อหาในบทนี้ ความถี่เชิงมุม $\omega = 2\pi f$ (มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที) จะถูกเรียกสั้นๆ ว่า "**ความถี่**"

8.2 การชักตัวอย่างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา

ถ้ากำหนดให้ $x(t)$ คือสัญญาณไม่เป็นคาบที่ต่อเนื่องทางเวลาและเป็นฟังก์ชันค่าจริง โดยมีผลการแปลงฟูเรียร์เท่ากับ $X(j\omega)$ เพราะฉะนั้นสัญญาณ $x(t)$ จะเรียกว่าเป็นสัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัด ก็ต่อเมื่อ

$$X(j\omega) = 0 , \quad \text{สำหรับ } |\omega| > \omega_m \tag{8.2}$$

เมื่อ ω_m คือความถี่สูงสุดของสัญญาณ $x(t)$ มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาทีตามภาพที่ 8.3 ดังนั้นถ้าต้องการให้ข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการชักตัวอย่างเป็นตัวแทนหนึ่งเดียวของสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาโดยไม่มีการสูญเสียข่าวสาร ก็จะต้องทำการชักตัวอย่างสัญญาณ $x(t)$ ด้วยความถี่

$$\omega_s \geq 2\omega_m \tag{8.3}$$

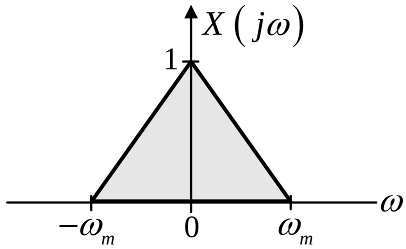
เมื่อ $\omega_s = 2\pi / T_s$ คือความถี่การชักตัวอย่าง โดยที่ความถี่การชักตัวอย่างต่ำสุด $\omega_s = 2\omega_m$ จะเรียกว่า "อัตราไนควิสต์[1] (Nyquist rate)" แต่ถ้าทำการชักตัวอย่างสัญญาณ $x(t)$ ด้วยความถี่ $\omega_s < 2\omega_m$ ก็จะก่อให้เกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า "ความผิดเพี้ยนภาพ (aliasing)" ซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ต้องการในทุกงานประยุกต์ เนื่องจากข้อมูลแซมเปิลที่ได้มีการสูญเสียข่าวสาร กล่าวคือเมื่อนำข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการชักตัวอย่างที่ความถี่ $\omega_s < 2\omega_m$ มาสร้างสัญญาณ $x(t)$ ให้กลับคืนมา สัญญาณ $x(t)$ ที่ได้จะมีรูปร่างผิดเพี้ยนไปจากของเดิม (ศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้ในหัวข้อที่ 8.2.4)

ทฤษฎีบทการชักตัวอย่างถูกนำมาใช้งานในหลายๆ งานประยุกต์ ตัวอย่างเช่น

1) ระบบเสียงดิจิทัลของแผ่นซีดี (CD: compact disc) ความถี่สูงสุดของสัญญาณที่ต้องการจะบันทึกลงไปในแผ่นซีดีเพลงมีค่าเท่ากับ 20 กิโลเฮิรตซ์ (kHz) แต่ระบบใช้ความถี่การชักตัวอย่างเท่ากับ 44.1 kHz เนื่องจากอัตราไนควิสต์คือ $2 \times 20 = 40$ kHz แสดงว่าระบบจะสำรองแบนด์วิดท์ (bandwidth) ไว้ 4.1 kHz สำหรับทำหน้าที่เป็นแถบป้องกัน (guard band)

---

[1] ความถี่ ω_m ที่เป็นครึ่งหนึ่งของอัตราไนควิสต์ เรียกว่า "ความถี่ไนควิสต์ (Nyquist frequency)"



ภาพที่ 8.3 ตัวอย่างสเปกตรัมความถี่ของสัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัด

2) ระบบโทรศัพท์ (telephone system) สัญญาณเสียง (speech signal) มีแบนด์วิดท์เท่ากับ 3.4 kHz และระบบโทรศัพท์ใช้ความถี่การชักตัวอย่างเท่ากับ 8 kHz เนื่องจากอัตราการชักตัวอย่างไนควิสต์คือ $2\times3.4=6.8$ kHz แสดงว่าระบบจะสำรองแบนด์วิดท์ไว้ 1.2 kHz สำหรับทำหน้าที่เป็นแถบป้องกัน

ตัวอย่างที่ 8.1 กำหนดให้สัญญาณ $x(t)=10\cos(2000\pi t)\cos(8000\pi t)$ จงหาความถี่การชักตัวอย่างต่ำสุดที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทการชักตัวอย่าง

วิธีทำ จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ว่า $\cos(\alpha)\cos(\beta)=\{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\}/2$ ดังนั้นสัญญาณ $x(t)$ สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$x(t)=10\cos(2000\pi t)\cos(8000\pi t)=5\cos(6000\pi t)+5\cos(10000\pi t)$$

ซึ่งแสดงว่าความถี่สูงสุดของสัญญาณ $x(t)$ คือ $\omega_m=10000\pi$ เรเดียนต่อวินาที ดังนั้นความถี่การชักตัวอย่างต่ำสุดหรืออัตราไนควิสต์จึงมีค่าเท่ากับ $\omega_s=2\omega_m=2\times10000\pi=20000\pi$ เรเดียนต่อวินาที

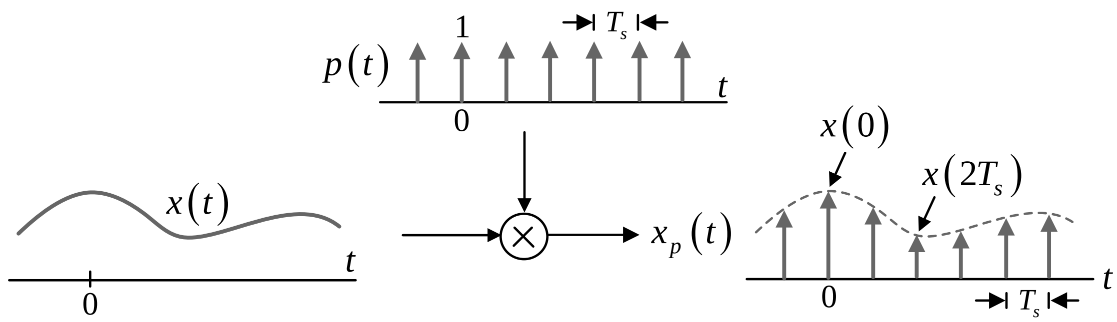
8.2.1 กระบวนการชักตัวอย่าง

พิจารณาภาพที่ 8.1 พบว่าหลักการทำงานของกระบวนการชักตัวอย่างสามารถอธิบายได้โดยอาศัยสมการคณิตศาสตร์ดังนี้ ข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการชักตัวอย่างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลคูณระหว่างสัญญาณ $x(t)$ และขบวนสัญญาณอิมพัลส์ไดแร็กเดลตา (Dirac delta impulse train) หรือที่เรียกกันว่า “ฟังก์ชันการชักตัวอย่าง (sampling function)” $p(t)$ นั่นคือ

$$x_p(t)=x(t)\,p(t) \tag{8.4}$$

โดยที่

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \tag{8.5}$$



ภาพที่ 8.4 กระบวนการชักตัวอย่างโดยใช้ขบวนสัญญาณอิมพัลส์ไดแร็กเดลตา

อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันไดแร็กเดลตาที่ว่า $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$ ดังนั้นสมการ (8.4) สามารถเขียนได้เป็น

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s) \tag{8.6}$$

นั่นคือสัญญาณ $x_p(t)$ จะมีลักษณะเป็นขบวนสัญญาณอิมพัลส์ที่มีแอมพลิจูดของแต่ละอิมพัลส์เท่ากับค่า $x(nT_s)$ โดยมีระยะห่างของแต่ละสัญญาณอิมพัลส์เป็นระยะเวลา T_s ดังแสดงในภาพที่ 8.4

เนื่องการคู่การแปลงฟูเรียร์ของขบวนสัญญาณอิมพัลส์ไดแร็กเดลตาคือ

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\xleftrightarrow{CtFT}P(j\omega)=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s) \tag{8.7}$$

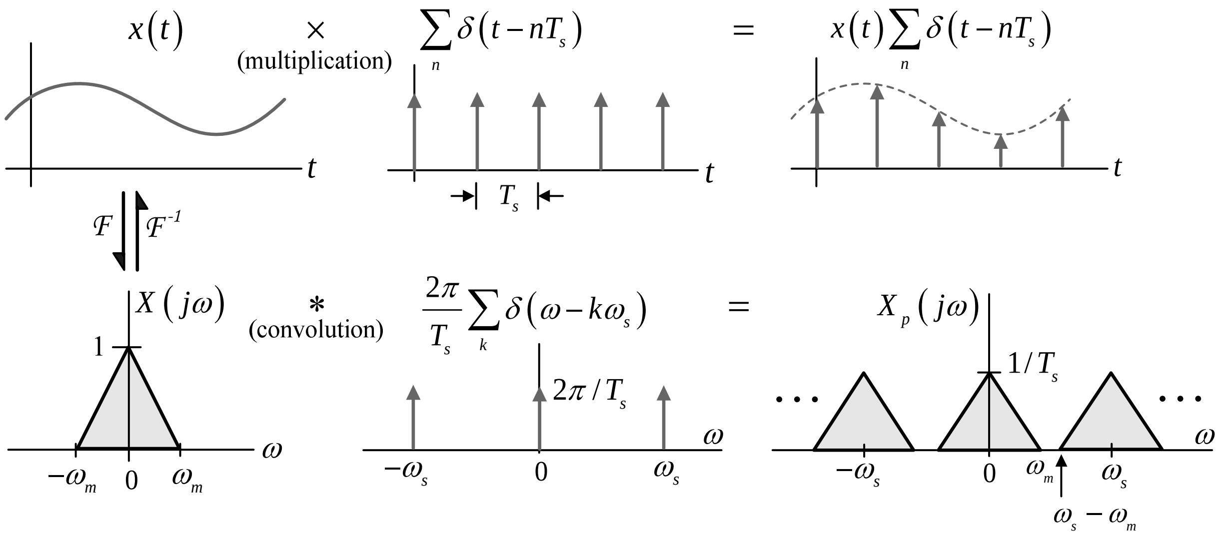
และอาศัยคุณสมบัติการคูณของการแปลงฟูเรียร์ที่ว่า

$$\mathcal{F}\left[x(t)\,p(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\theta)P\left(j(\omega-\theta)\right)d\theta \tag{8.8}$$

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์ของสมการ (8.6) คือ

$$X_p(j\omega)=\mathcal{F}\left[x_p(t)\right]=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(j(\omega-k\omega_s)\right) \tag{8.9}$$

ซึ่งหมายความว่าสเปกตรัมความถี่ $X_p(j\omega)$ ที่ได้จากการชักตัวอย่างจะมีลักษณะเป็นสัญญาณคาบโดยมีค่าเท่ากับสเปกตรัมความถี่ $X(j\omega)$ ที่ถูกถ่วงน้ำหนักด้วยตัวประกอบการคูณเท่ากับ $1/T_s$ ที่ซ้ำกันไปเรื่อยๆ โดยที่แต่ละตัวมีระยะห่างกันเท่ากับ ω_s เพราะฉะนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์ของกระบวนการชักตัวอย่างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาคือ



ภาพที่ 8.5 กระบวนการชักตัวอย่าง (บน) ในโดเมนเวลา และ (ล่าง) โดเมนความถี่

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) \xleftrightarrow{CtFT} X_p(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j(\omega-k\omega_s)\right) \quad (8.10)$$

ภาพที่ 8.5 เปรียบเทียบขั้นตอนการชักตัวอย่างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาในโดเมนเวลาและในโดเมนความถี่

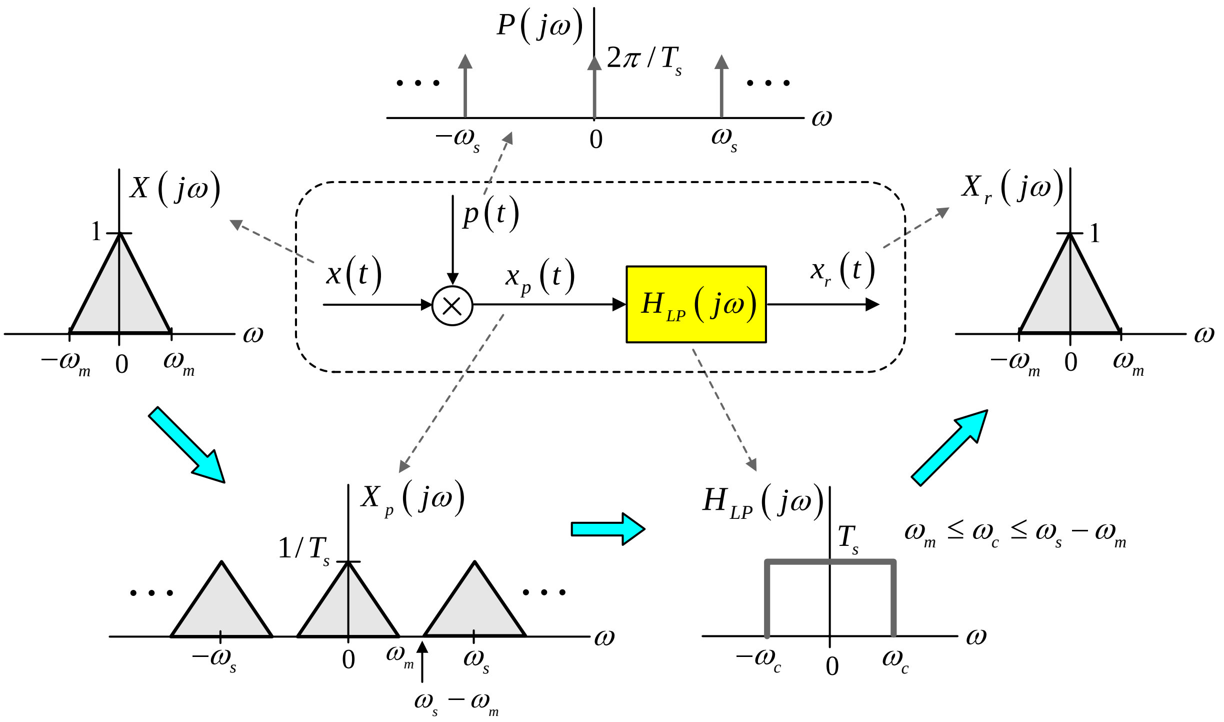
ถ้าความถี่ที่ใช้ในการชักตัวอย่างสัญญาณ $\omega_s \geq 2\omega_m$ แล้ว สัญญาณ $x(t)$ สามารถที่จะถูกสร้างให้กลับคืนมาเหมือนเดิมได้จากลำดับข้อมูล $\{x(nT_s)\}$ โดยการนำลำดับข้อมูลนี้ไปผ่านวงจรกรองผ่านต่ำอุดมคติ (ideal low-pass filter) ที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_{LP}(t)$ ซึ่งมีอัตราขยาย (gain) เท่ากับ T_s และมีความถี่ตัด (cutoff frequency) เท่ากับ $\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$ นั่นคือ

$$h_{LP}(t)=\frac{T_s \sin(\omega_c t)}{\pi t}=\frac{T_s\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}(\omega_c t) \quad (8.11)$$

ซึ่งมีผลการแปลงฟูเรียร์คือ

$$H_{LP}(j\omega)=\begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (8.12)$$

ดังแสดงในภาพที่ 8.6 เมื่อ $x_r(t)$ คือสัญญาณที่ถูกสร้างให้กลับคืนมา (reconstructed signal) ดังนั้นเมื่อการชักตัวอย่างสัญญาณเป็นไปตามทฤษฎีบทการชักตัวอย่างจะได้ว่าสเปกตรัมความถี่ $X_r(j\omega)=X(j\omega)$ ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า $x_r(t)=x(t)$ เช่นกัน



ภาพที่ 8.6 การสร้างสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา $x_r(t)$ ให้กลับคืนมาจากข้อมูลแซมเปิล $\{x_p(t)\}$

8.2.2 การชักตัวอย่างด้วยวงจรกรองค้างอันดับศูนย์

จากภาพที่ 8.4 สัญญาณ $x_p(t)$ ที่ได้จากการชักตัวอย่างด้วยขบวนสัญญาณอิมพัลส์ไดแร็กเดลตาจะมีลักษณะเป็นสัญญาณพัลส์ที่มีความกว้างของสัญญาณแคบและมีแอมพลิจูดสูงมาก ซึ่งในทางปฏิบัติการสร้างและส่งสัญญาณ $x_p(t)$ ไปยังปลายทางทำได้ยาก ดังนั้นโดยทั่วไปสัญญาณที่ผ่านการชักตัวอย่าง (sampled signal) จะถูกทำให้อยู่ในรูปของสัญญาณค้างอันดับศูนย์ (zero-order hold) โดยการส่งสัญญาณ $x_p(t)$ ผ่านเข้าไปในวงจรกรองค้างอันดับศูนย์ที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_0(t)$ ตามภาพที่ 8.7 เมื่อ

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & \text{else} \end{cases} \tag{8.13}$$

และผลการแปลงฟูเรียร์ของ $h_0(t)$ คือ

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega T_s/2}\left[\frac{2\sin(\omega T_s/2)}{\omega}\right] \tag{8.14}$$

ซึ่งหมายความว่าระบบทำการชักตัวอย่างสัญญาณ $x(t)$ ณ เวลาที่กำหนด แล้วทำการค้างค่าของผลลัพธ์ที่ได้จนกระทั่งถึงเวลาที่จะทำการชักตัวอย่างถัดไป ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จึงเรียกว่าสัญญาณค้างอันดับศูนย์ $x_0(t)$