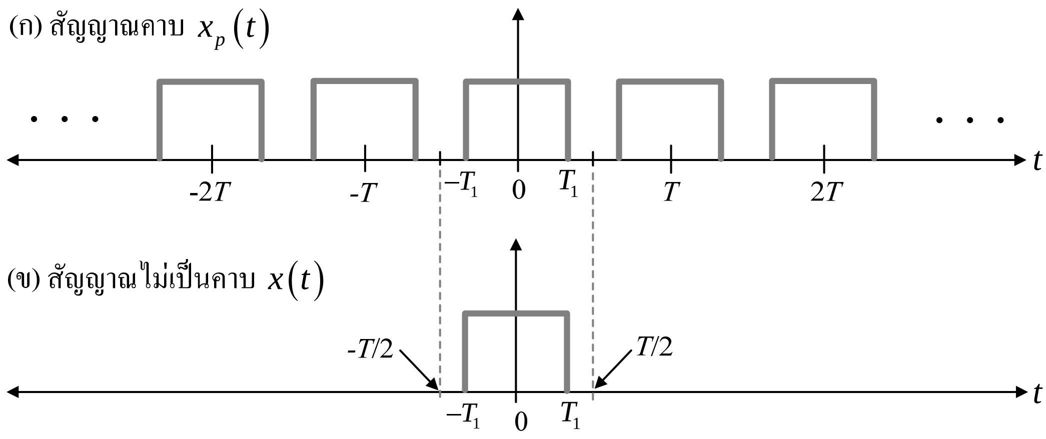
บทที่ 6
การแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแทนสัญญาณคาบ (periodic signal) ให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของเลขชี้กำลังเชิงซ้อนซึ่งมีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์สัญญาณและระบบตามที่อธิบายในบทที่ 4 และ 5 ในทำนองเดียวกันสัญญาณไม่เป็นคาบ (aperiodic signal) ก็สามารถที่จะถูกแทนด้วยผลรวมเชิงเส้นของเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้เช่นกัน โดยอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)" [1, 3 – 5, 10 – 11] ทั้งนี้เป็นเพราะว่าสัญญาณไม่เป็นคาบสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นสัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับค่าอนันต์

การแปลงฟูเรียร์ทำหน้าที่ในการแปลงสัญญาณในโดเมนเวลาหรือสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันของเวลาให้อยู่ในรูปของสัญญาณในโดเมนความถี่หรือสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ ซึ่งจะเรียกกันทั่วไปว่า "สเปกตรัม (spectrum)" สเปกตรัมของสัญญาณมีประโยชน์มากสำหรับการออกแบบอุปกรณ์ในระบบสื่อสารต่างๆ เช่น วงจรกรอง (filter) และอีควอไลเซอร์ (equalizer) เป็นต้น นอกจากนี้การวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนความถี่จะง่ายกว่าการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนเวลา รวมทั้งสัญญาณในโดเมนความถี่ยังบอกให้ทราบถึงแบนด์วิดท์ (bandwidth) และรูปร่างสเปกตรัมของสัญญาณ ซึ่งช่วยทำให้เข้าใจคุณสมบัติต่างๆ ของสัญญาณเหล่านั้นมากยิ่งขึ้น ตัวอย่างเช่นวงจรกรองแต่ละแบบจะยอมให้สัญญาณช่วงแถบความถี่หนึ่งผ่านไปได้ในขณะที่จะเกิดการลดทอน (attenuation) ในอีกช่วงแถบความถี่หนึ่ง เป็นต้น

6.1 การแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลาของสัญญาณไม่เป็นคาบ

ในส่วนนี้จะอธิบายที่มาของสูตรการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา (CtFT: continuous-time Fourier transform) พร้อมทั้งอธิบายเงื่อนไขการลู่เข้าของการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา เพื่อใช้ในการพิจารณาว่าสัญญาณไม่เป็นคาบแบบใดจึงจะสามารถหาผลการแปลงฟูเรียร์ได้



ภาพที่ 6.1 (ก) สัญญาณคาบ $x_p(t)$ และ (ข) สัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$

6.1.1 สูตรการแปลงฟูเรียร์

โดยทั่วไปสัญญาณไม่เป็นคาบสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นสัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับค่าอนันต์ ตัวอย่างเช่น ภาพที่ 6.1 แสดงสัญญาณคาบ $x_p(t)$ ที่มีคาบเวลาเท่ากับ T และสัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$ ดังนั้นถ้าพิจารณาว่าคาบเวลา T มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ จะได้ว่าสัญญาณ $x_p(t)$ และ $x(t)$ คือสัญญาณเดียวกัน

เนื่องจากสัญญาณคาบ $x_p(t)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลาได้คือ

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{6.1}$$

และ

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{6.2}$$

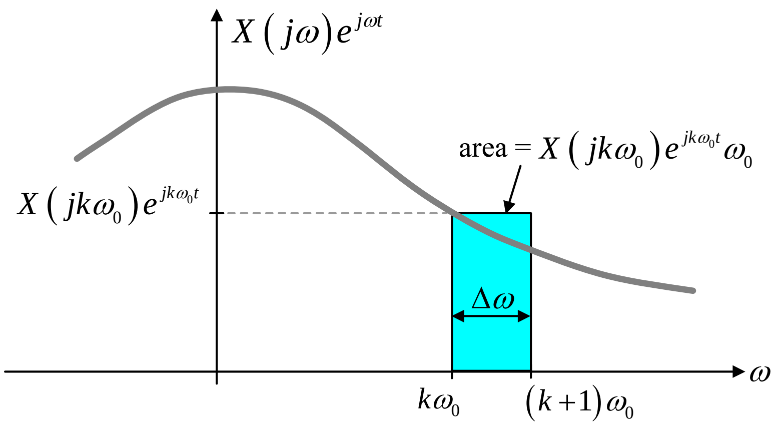
เมื่อ $\omega_0 = 2\pi / T$ จากภาพที่ 6.1 พบว่าสัญญาณ $x(t) = x_p(t)$ ในช่วงเวลา $|t| < T/2$ และ $x(t) = 0$ สำหรับ $|t| > T_1$ ดังนั้นสมการ (6.2) สามารถเขียนได้เป็น

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{6.3}$$

ถ้ากำหนดให้

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{6.4}$$

เปรียบเทียบสมการ (6.3) และ (6.4) จะได้ว่า



ภาพที่ 6.2 ภาพแสดงความหมายของสมการ (6.6)

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) \tag{6.5}$$

แทนค่า a_k จากสมการ (6.5) ลงในสมการ (6.1) จะได้

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \tag{6.6}$$

เมื่อ $T = 2\pi/\omega_0$ ภาพที่ 6.2 แสดงความหมายของสมการ (6.6) ซึ่งมีค่าเท่ากับการหาพื้นที่ใต้กราฟของสัญญาณ $X(j\omega)e^{j\omega t}$ นอกจากนี้เมื่อ $T \to \infty$ จะได้ว่า $\omega_0 \to 0$ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\omega_0 = \Delta\omega$ สมการ (6.6) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$x_p(t)\Big|_{T\to\infty} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \tag{6.7}$$

ดังนั้นเมื่อ $\Delta\omega \to 0$ เครื่องหมายผลรวม (summation) ในสมการ (6.7) จะเปลี่ยนเป็นเครื่องหมายปริพันธ์ (integral) และเป็นผลทำให้ $x_p(t) \to x(t)$ ดังนั้นสมการ (6.7) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_p(t) = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{6.8}$$

เมื่อ $\omega = 2\pi f$ คือความถี่เชิงมุมมีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที เมื่อพิจารณาสมการ (6.8) พบว่าสัญญาณ $x(t)$ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลรวมแบบต่อเนื่องของฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่มีความถี่ในช่วง $(-\infty, \infty)$ เมื่อแอมพลิจูดของแต่ละองค์ประกอบความถี่ ω มีขนาดแปรผันตามฟังก์ชัน $X(j\omega)$ ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ทำให้สามารถแปลงสัญญาณ $x(t)$ ให้อยู่ในรูปขององค์ประกอบของเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่ครอบคลุมตลอดทุกย่านความถี่ โดยที่ค่าของ $X(j\omega)$ จะเป็นตัวบอกขนาดแอมพลิจูดของแต่ละองค์ประกอบความถี่ ω

6.1.2 คู่การแปลงฟูเรียร์

สมการ (6.4) และ (6.8) จัดว่าเป็น "คู่การแปลงฟูเรียร์[1] (Fourier transform pair)" โดยที่สมการ (6.4) เรียกว่า "สมการการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform equation)" หรือสมการวิเคราะห์ ซึ่งใช้ในการแปลงสัญญาณในโดเมนเวลาให้เป็นสัญญาณในโดเมนความถี่ ในขณะที่สมการ (6.8) เรียกว่า "สมการการแปลงฟูเรียร์ผกผัน (inverse Fourier transform equation)" หรือสมการสังเคราะห์ ซึ่งใช้ในการแปลงสัญญาณในโดเมนความถี่ให้กลับมาเป็นสัญญาณในโดเมนเวลา และเพื่อให้สะดวกในการอธิบายการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลาจะใช้สัญลักษณ์

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6.9}$$

และ

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[X(j\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.10}$$

เมื่อ $\mathcal{F}[\cdot]$ คือสัญลักษณ์การแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา และ $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ คือสัญลักษณ์การแปลงฟูเรียร์ผกผันที่ต่อเนื่องทางเวลา นอกจากนี้จะใช้สัญลักษณ์

$$x(t) \xleftrightarrow{CtFT} X(j\omega) \tag{6.11}$$

เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของคู่การแปลงฟูเรียร์ระหว่าง $x(t)$ และ $X(j\omega)$

6.1.3 สเปกตรัมฟูเรียร์

โดยทั่วไปผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่เป็นฟังก์ชันของความถี่เชิงมุม ω ได้เช่นกัน นั่นคือ

$$X(j\omega) = \left|X(j\omega)\right|e^{j\angle X(j\omega)} \tag{6.12}$$

เมื่อ $\left|X(j\omega)\right|$ คือสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดแบบต่อเนื่อง (continuous amplitude spectrum) และ

---

[1] นิยามของการแปลงฟูเรียร์มีหลายรูปแบบ โดยหนังสือบางเล่ม [4] อาจใช้คู่การแปลงฟูเรียร์ที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ f นั่นคือ $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$ และ $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$

$$\angle X(j\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}}\right) \tag{6.13}$$

คือสเปกตรัมเชิงเฟสแบบต่อเนื่อง (continuous phase spectrum) ของสัญญาณ $x(t)$ เมื่อ $\mathrm{Re}\{a\}$ คือส่วนที่เป็นค่าจริง (real part) ของตัวแปร a และ $\mathrm{Im}\{a\}$ คือส่วนที่เป็นค่าจินตภาพ (imaginary part) ของตัวแปร a

ในกรณีที่สัญญาณ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงจะได้ความสัมพันธ์ต่างๆ ดังต่อไปนี้

$$X(-j\omega)=X^*(j\omega)=|X(j\omega)|e^{-j\angle X(j\omega)} \tag{6.14}$$

$$|X(-j\omega)|=|X(j\omega)| \tag{6.15}$$

$$\angle X(-j\omega)=-\angle X(j\omega) \tag{6.16}$$

โดยที่ X^* คือค่าสังยุคเชิงซ้อนของ X จากสมการ (6.15) และ (6.16) จะพบว่า $|X(j\omega)|$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $\angle X(j\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ในทางปฏิบัติสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูด $|X(j\omega)|$ และสเปกตรัมเชิงเฟส $\angle X(j\omega)$ เรียกรวมกันว่า "สเปกตรัมฟูเรียร์ (Fourier spectrum)" ของสัญญาณ $x(t)$ โดยมีลักษณะเป็นสเปกตรัมแบบต่อเนื่อง (continuous spectrum) ซึ่งแตกต่างจากอนุกรมฟูเรียร์ที่มีลักษณะเป็นสเปกตรัมแบบเส้น (line spectrum)

6.1.4 การลู่เข้าของการแปลงฟูเรียร์

ในทางปฏิบัติไม่จำเป็นที่ว่าสัญญาณไม่เป็นคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ ทุกสัญญาณจะสามารถหาผลการแปลงฟูเรียร์ได้ พิจารณาผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ ในสมการ (6.9) และกำหนดให้ $\hat{x}(t)$ คือสัญญาณที่สร้างกลับคืนมาจาก $X(j\omega)$ ตามสมการ (6.10) นั่นคือ

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.17}$$

สัญญาณ $\hat{x}(t)$ เกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ $\hat{x}(t)$ มีค่าจำกัด (finite value) ซึ่งเป็นไปได้ ก็ต่อเมื่อ $X(j\omega)$ มีค่าจำกัด[2] นอกจากนี้เงื่อนไขที่ทำให้ $\hat{x}(t)=x(t)$ สำหรับทุกค่า t ยกเว้นตำแหน่งที่เป็นจุดที่มีค่าไม่ต่อเนื่อง โดยค่าของ $\hat{x}(t)$ ณ ตำแหน่งนี้จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของสัญญาณทั้งสองข้างของจุดที่มีค่าไม่ต่อเนื่อง ซึ่งเหมือนกับเงื่อนไขดีรีเคล (Dirichlet's condition) ของอนุกรมฟูเรียร์

---

[2] $X(j\omega)$ มีค่าจำกัดก็ต่อเมื่อสัญญาณ $x(t)$ มีพลังงานจำกัด นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt<\infty$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าสัญญาณไม่เป็นคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ ใดๆ สามารถหาผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ ได้ ก็ต่อเมื่อสัญญาณ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดีรีเคลทั้งสามข้อ[3] [3, 4] ดังต่อไปนี้

1) $x(t)$ ต้องสามารถหาปริพันธ์ได้อย่างสมบูรณ์ (absolutely integrable) ได้ นั่นคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty \tag{6.18}$$

เงื่อนไขนี้ช่วยรับรองได้ว่าผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ มีค่าจำกัด

2) $x(t)$ ต้องมีจำนวนจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดเป็นจำนวนจำกัดภายในช่วงเวลาจำกัด (finite interval) ใดๆ

3) $x(t)$ ต้องมีจำนวนจุดที่มีค่าไม่ต่อเนื่อง (discontinuities) จำกัดภายในช่วงเวลาจำกัดใดๆ และทุกจุดที่มีค่าไม่ต่อเนื่องก็จะต้องมีค่าจำกัดด้วย

ตัวอย่างที่ 6.1 จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t) = e^{-at}u(t)$ เมื่อ $a > 0$ และ $u(t)$ คือฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย ตามภาพที่ 6.3 (ก)

วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t)$ หาได้จากสมการ (6.9) นั่นคือ

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \tag{6.19}$$

เพราะฉะนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเลขชี้กำลังคือ

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{CtFT} \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0 \tag{6.20}$$

เนื่องจาก $X(j\omega)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน (complex-valued function) ดังนั้นโดยทั่วไปจะแสดง $X(j\omega)$ ให้อยู่ในรูปของสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดและสเปกตรัมเชิงเฟสซึ่งหาได้จาก

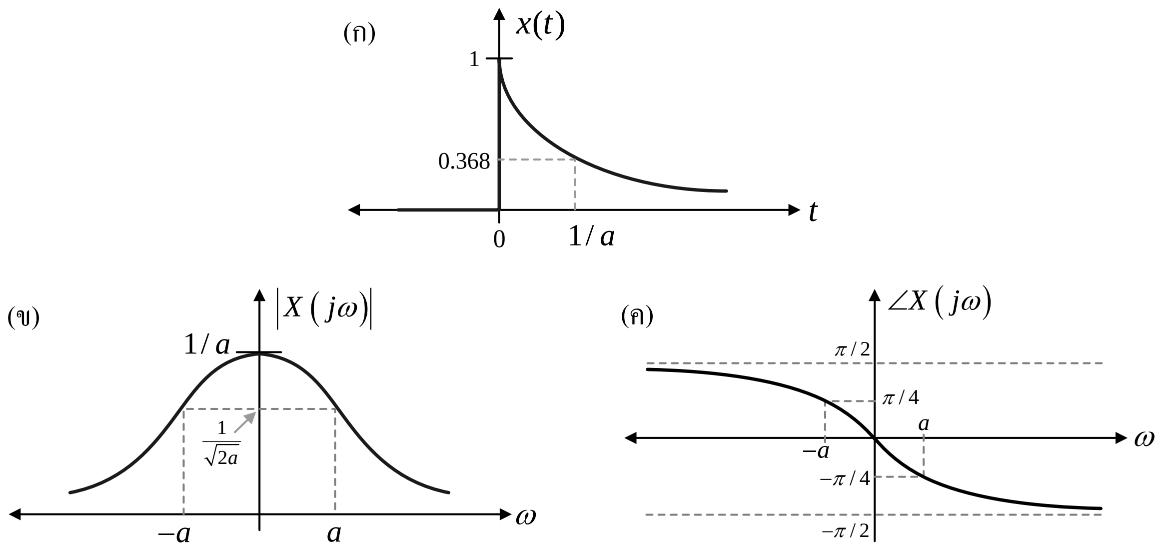
$$|X(j\omega)| = \left|\frac{1}{a+j\omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \tag{6.21}$$

$$\angle X(j\omega) = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{6.22}$$

ดังแสดงในภาพที่ 6.3 (ข) และ (ค) ตามลำดับ

---

[3] เงื่อนไขเหล่านี้เป็นเงื่อนไขพอเพียง (sufficient condition) ที่ทำให้สามารถสรุปว่า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคู่การแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ แต่ไม่ใช่เงื่อนไขจำเป็น (necessary condition) เสมอไป [3]



ภาพที่ 6.3 (ก) สัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t)$, (ข) สเปกตรัมเชิงแอมพลิจูด, และ (ค) สเปกตรัมเชิงเฟสของ $X(j\omega)$

SCILAB: (ตัวอย่างที่ 6.1)

```
-->a = 1;
-->Tmax = 10;      //ใช้แทนค่าอนันต์ สำหรับการหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ e^{-at}u(t) เนื่องจาก e^{-1(10)} ≈ 0
-->dOmega = 0.001;   Omega = -3*%pi/2:dOmega:3*%pi/2;
-->dt     = 0.001;   t = 0:dt:Tmax;
-->for w = 1:length(Omega)
-->  Xw(w) = sum( exp(-(a + %i*Omega(w))*t )*dt);      //หาผลการแปลงฟูเรียร์ตามสมการ (6.19)
-->end
-->plot(Omega, abs(Xw));                  //วาดกราฟสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูด ตามภาพที่ 6.3 (ข)
-->plot(Omega, atan(imag(Xw)./real(Xw)));      //วาดกราฟสเปกตรัมเชิงเฟส ตามภาพที่ 6.3 (ค)
```

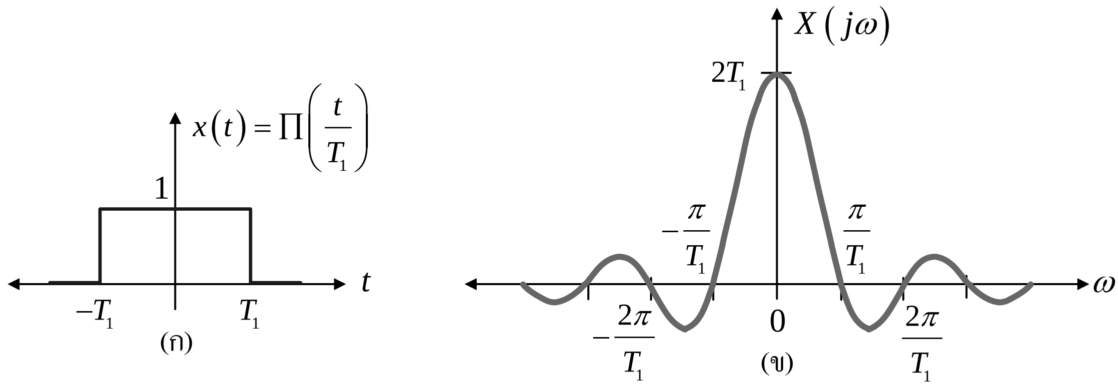
ในทางปฏิบัติสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดนิยมนำมาใช้งานมากกว่าสเปกตรัมเชิงเฟส ดังนั้นจากนี้เป็นต้นไป สเปกตรัมเชิงเฟสจะถูกละไว้ในฐานที่เข้าใจ

ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยม

$$x(t)=\Pi\left(\frac{t}{T_1}\right)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & \text{else}\end{cases} \tag{6.23}$$

ตามภาพที่ 6.4 (ก)

วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ หาได้จากสมการ (6.9) นั่นคือ



ภาพที่ 6.4 (ก) สัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยม $x(t)$ และ (ข) ผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$

$$X(j\omega)=\int_{-T_1}^{T_1}(1)e^{-j\omega t}dt \;=\left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-T_1}^{T_1} \;=\frac{1}{-j\omega}\left\{e^{-j\omega T_1}-e^{j\omega T_1}\right\}$$

$$=\frac{2}{\omega}\left\{\frac{e^{j\omega T_1}-e^{-j\omega T_1}}{2j}\right\}$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin(\omega T_1) \;=2T_1\mathrm{sinc}(\omega T_1)$$

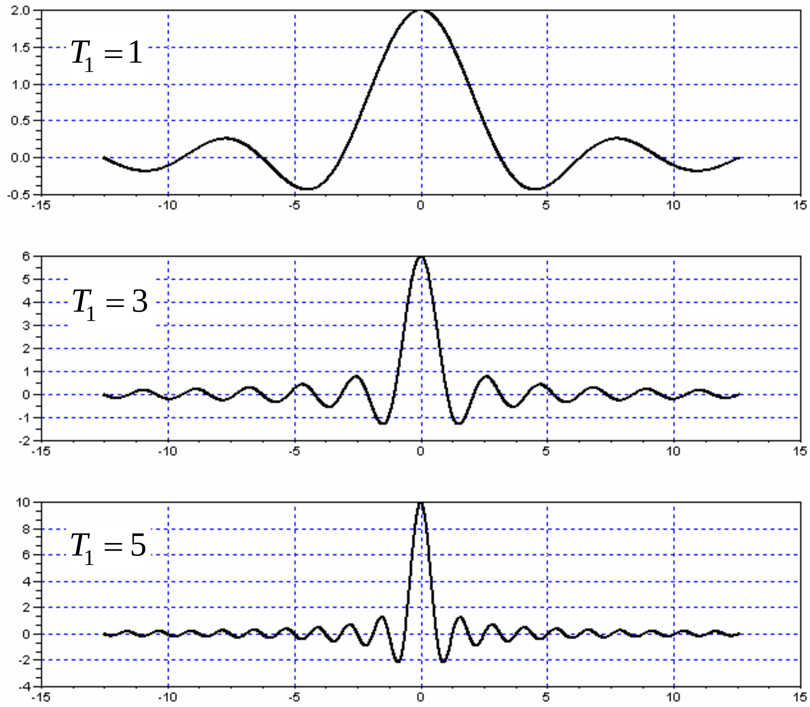
เนื่องจาก $\mathrm{sinc}(\theta)=\sin(\theta)/\theta$ ดังนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมคือ

$$\Pi\left(\frac{t}{T_1}\right)\xleftrightarrow{CtFT}2T_1\mathrm{sinc}(\omega T_1) \tag{6.24}$$

ภาพที่ 6.4 (ข) แสดงรูปร่างของสัญญาณ $X(j\omega)$ ในโดเมนความถี่

SCILAB: (ตัวอย่างที่ 6.2)

```
-->T1 = 2;
-->dOmega = 0.001;  Omega = -2*%pi:dOmega:2*%pi;
-->dt     = 0.001;  t = -T1:dt:T1;
-->for w = 1:length(Omega)
-->  Xw(w)  = sum(exp(-%i*Omega(w)*t)*dt);        //หาผลการแปลงฟูเรียร์ตามสูตรในสมการ (6.9)
-->end
-->plot(Omega, Xw);  xgrid(2);
-->mtlb_axis([-6 6 -1 4]);                       //คำสั่งปรับค่าเส้นแกน x และเส้นแกน y
-->Xw2 = 2*T1*sinc(Omega*T1);                    //ค่า X(jω) ตามสมการ (6.24)
-->plot(Omega, Xw2); xgrid(2);                   //ค่า Xw2 มีค่าเท่ากับ Xw
-->mtlb_axis([-6 6 -1 4]);
```



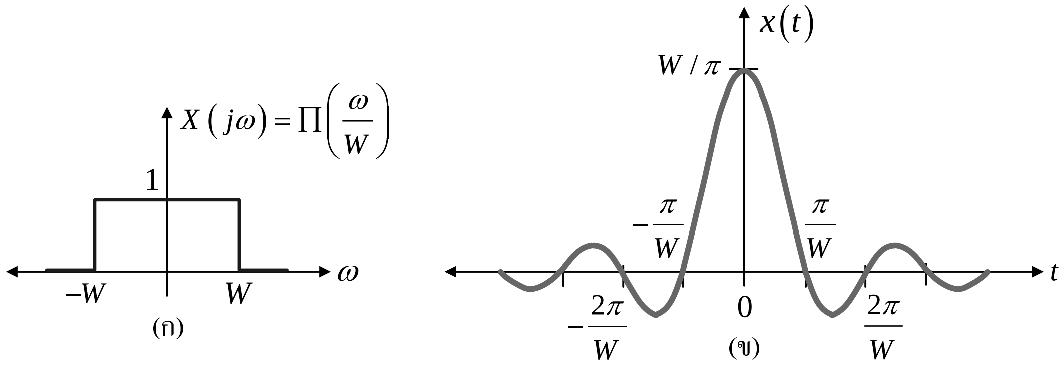
ภาพที่ 6.5 ผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ ของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยม สำหรับ $T_1 = 1$, $T_1 = 3$ และ $T_1 = 5$

SCILAB: (ภาพที่ 6.5)

```
-->w   = -4*%pi:0.01:4*%pi;
-->T1 = 1;    Xw = 2*T1*sinc(w*T1);
-->subplot(3,1,1);  plot(w, Xw);  xgrid(2);          //ภาพที่ 6.5 (บน)
-->T1 = 3;    Xw = 2*T1*sinc(w*T1);
-->subplot(3,1,2);  plot(w, Xw);  xgrid(2);          //ภาพที่ 6.5 (กลาง)
-->T1 = 5;    Xw = 2*T1*sinc(w*T1);
-->subplot(3,1,3);  plot(w, Xw);  xgrid(2);          //ภาพที่ 6.5 (ล่าง)
```

สังเกตจากสมการ (6.24) และภาพที่ 6.4 พบว่าถ้า T_1 มีค่าน้อย ความกว้างของสัญญาณ $x(t)$ จะเล็ก แต่ความกว้างของสัญญาณ $X(j\omega)$ จะใหญ่ ในทางกลับกันถ้า T_1 มีค่ามาก ความกว้างของสัญญาณ $x(t)$ จะใหญ่ แต่ความกว้างของสัญญาณ $X(j\omega)$ จะเล็ก ภาพที่ 6.5 แสดงรูปร่างของผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ ของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยม เมื่อ T_1 มีค่าเท่ากับ 1, 3, และ 5

ตัวอย่างที่ 6.2 แสดงให้เห็นว่าสัญญาณใดๆ ไม่สามารถที่จะเป็นได้ทั้งสัญญาณที่มีเวลาจำกัด (time-limited signal) และสัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัด (band-limited signal) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ในหัวข้อที่ 6.3.3 เรื่องคุณสมบัติการสเกลทางเวลา



ภาพที่ 6.6 (ก) สัญญาณในโดเมนความถี่ $X(j\omega)$ และ (ข) สัญญาณในโดเมนเวลา $x(t)$

ตัวอย่างที่ 6.3 กำหนดให้ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$ คือ

$$X(j\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{W}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & \text{else}\end{cases} \tag{6.25}$$

ตามภาพที่ 6.6 (ก) จงหาสัญญาณ $x(t)$ นี้

วิธีทำ สัญญาณในโดเมนเวลา $x(t)$ ที่สอดคล้องกับ $X(j\omega)$ หาได้จากสมการ (6.10) นั่นคือ

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}(1)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\bigg|_{-W}^{W}\right]=\frac{1}{\pi t}\left[\frac{e^{jWt}-e^{-jWt}}{2j}\right]=\frac{1}{\pi t}\sin(Wt)=\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}(Wt)$$

ดังนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์คือ

$$\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}(Wt)\xleftrightarrow{CtFT}\Pi\left(\frac{\omega}{W}\right) \tag{6.26}$$

ภาพที่ 6.6 (ข) แสดงรูปร่างของสัญญาณ $x(t)$ ในโดเมนเวลา

SCILAB: (ตัวอย่างที่ 6.3)

```
-->W = 2*%pi;   Tmax = 4;             //ใช้แทนค่าอนันต์ สำหรับการหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ X(jω)
-->dOmega = 0.001;  Omega = -W:dOmega:W;  dt = 0.001;  t = -Tmax:dt:Tmax;
-->for ii = 1:length(t)               //หาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันตามสูตรในสมการ (6.10)
-->  xt(ii) = (1/2/%pi)*sum(exp(%i*Omega*t(ii))*dOmega);
-->end
-->plot(t, xt);  xgrid(2);  mtlb_axis([-Tmax Tmax -0.5 2]);  //วาดกราฟสัญญาณ Xt
-->xt2 = W/%pi*sinc(W*t);             //ผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันตามสมการ (6.26)
-->plot(t, xt2);  xgrid(2);  mtlb_axis([-Tmax Tmax -0.5 2]);  //ค่า Xt2 มีค่าเท่ากับ Xt
```