บทที่ 4
อนุกรมฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา

บทที่ 2 ได้แสดงให้เห็นว่าระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลาจะถูกกำหนดได้อย่างสมบูรณ์ด้วยผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วย โดยที่สัญญาณเอาต์พุตสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของสัญญาณผลตอบสนองอิมพัลส์ที่ถูกเลื่อนเวลาและถูกถ่วงน้ำหนักด้วยสัญญาณอินพุต โดยอาศัยการทำคอนโวลูชันตามสมการ (2.11) นอกจากนี้สัญญาณใดๆ สามารถถูกแทนด้วยผลรวมเชิงเส้นของ "สัญญาณพื้นฐาน (basic signal)" ซึ่งโดยทั่วไปเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ (sinusoidal wave) หรือสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อน (complex exponential)

การแทนสัญญาณให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของสัญญาณคลื่นรูปไซน์หรือสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้นำไปสู่แนวคิดทางด้านโดเมนความถี่ (frequency domain) กล่าวคือสัญญาณต้นฉบับที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจะถูกจัดรูปใหม่ให้เป็นฟังก์ชันของความถี่ โดยที่การแสดงสัญญาณในโดเมนความถี่มีประโยชน์มากสำหรับการออกแบบและการวิเคราะห์ระบบ นอกจากนี้ยังช่วยทำให้การแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ง่ายขึ้น เช่น การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) เป็นต้น

ในบทนี้จะอธิบายการแทนสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลาให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่ต่อเนื่องทางเวลา ซึ่งวิธีการนี้เรียกกันว่า "อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series)" [3, 4]

4.1 ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา

สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนมีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์ระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา เพราะว่าสัญญาณเอาต์พุตหรือผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนจะมีค่าเท่ากับสัญญาณอินพุตเดิม แต่อาจมีแอมพลิจูดของสัญญาณเปลี่ยนไปก็ได้ ดังแสดงต่อไปนี้

พิจารณาระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลาที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์คือ $h(t)$ ถ้ากำหนดให้สัญญาณอินพุต $x(t)=e^{st}$ เป็นสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อน ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบหาได้จาก

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}\left[x(t)\right] = h(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \ = e^{st}H(s) \end{aligned} \tag{4.1}$$

เมื่อ $H(s)$ เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อนที่ขึ้นกับตัวแปร s ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{4.2}$$

สมการ (4.1) สามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้คือ

$$y(t) = \mathbf{T}\left[e^{st}\right] = e^{st}H(s) \tag{4.3}$$

ซึ่งหมายความว่าเมื่อป้อนสัญญาณอินพุต e^{st} เข้าไปในระบบ LTI จะได้สัญญาณเอาต์พุตเป็น $e^{st}H(s)$

โดยทั่วไปจะเรียกสัญญาณอินพุตที่ทำให้สัญญาณเอาต์พุตมีค่าเท่ากับค่าคงตัวคูณกับสัญญาณอินพุตนั้นว่า “ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (eigenfunction)” และเรียกค่าคงตัวนั้นว่า “ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue)” ดังนั้นจากสมการ (4.1) จะได้ว่าฟังก์ชันลักษณะเฉพาะคือ e^{st} และค่าลักษณะเฉพาะคือ $H(s)$ นอกจากนี้ถ้ากำหนดให้สัญญาณอินพุตของระบบ LTI มีค่าเท่ากับผลรวมเชิงเส้นของสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนคือ

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{s_k t} = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \ldots + a_n e^{s_n t} \tag{4.4}$$

สัญญาณเอาต์พุตของระบบก็สามารถหาได้จาก

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k H(s_k) e^{s_k t} = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + \ldots + a_n H(s_n) e^{s_n t} \tag{4.5}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าสำหรับระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา ถ้าสัญญาณอินพุตของระบบคือผลรวมเชิงเส้นของสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อน จะได้ว่าสัญญาณเอาต์พุตของระบบจะอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่มีแอมพลิจูดเปลี่ยนไปตามสมการ (4.5)

ตัวอย่างที่ 4.1 พิจารณาระบบ LTI ที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์คือ $h(t)=\delta(t-2)$ จงหาสัญญาณเอาต์พุตของระบบเมื่อสัญญาณอินพุตคือ $x(t)=\cos(2t)-\cos(5t)$

วิธีทำ สัญญาณเอาต์พุตของระบบหาได้จาก

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\{\cos(2\tau)-\cos(5\tau)\}\delta(t-\tau-2)d\tau=\cos(2(t-2))-\cos(5(t-2))$$

หรือสามารถหาสัญญาณเอาต์พุตได้จากสมการ (4.3) ดังนี้ เนื่องจากสัญญาณอินพุต $x(t)$ สามารถจัดให้อยู่ในรูปของสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนโดยอาศัยความสัมพันธ์ออยเลอร์ (Euler's relation) คือ

$$x(t)=\cos(2t)-\cos(5t)=\left(\frac{1}{2}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{-j2t}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{j5t}+\frac{1}{2}e^{-j5t}\right)$$

ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุตสามารถหาได้จากสมการ (4.5) โดยที่ $H(s)=e^{-2s}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}y(t)=\sum_{k=1}^{n}a_kH(s_k)e^{s_kt}&=\frac{1}{2}H(j2)e^{j2t}+\frac{1}{2}H(-j2)e^{-j2t}-\frac{1}{2}H(j5)e^{j5t}-\frac{1}{2}H(-j5)e^{-j5t}\\&=\frac{1}{2}e^{-2(j2)}e^{j2t}+\frac{1}{2}e^{-2(-j2)}e^{-j2t}-\frac{1}{2}e^{-2(j5)}e^{j5t}-\frac{1}{2}e^{-2(-j5)}e^{-j5t}\\&=\frac{1}{2}e^{j2(t-2)}+\frac{1}{2}e^{-j2(t-2)}-\frac{1}{2}e^{j5(t-2)}-\frac{1}{2}e^{-j5(t-2)}\\&=\cos(2(t-2))-\cos(5(t-2))\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 สัญญาณ $\psi_m(t)$ และ $\psi_k(t)$ จะถูกเรียกว่าเป็นสัญญาณที่ตั้งฉากกัน (orthogonal) ในช่วงเวลา a ถึง b ก็ต่อเมื่อสัญญาณทั้งสองนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\int_a^b\psi_m(t)\psi_k^*(t)dt=\begin{cases}0, & m\neq k\\ \alpha, & m=k\end{cases}\tag{4.6}$$

เมื่อ $\psi^*(t)$ คือสังยุคเชิงซ้อนของสัญญาณ $\psi(t)$ และ $\alpha\neq 0$ จงพิสูจน์ว่าสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อน $\{e^{jk\omega_0t}\}$ เมื่อ $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ แต่ละสัญญาณเป็นสัญญาณที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันภายในช่วงคาบเวลา $T_0=2\pi/\omega_0$

วิธีทำ สำหรับเวลา t_0 ใดๆ จะได้ว่า

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}dt = \frac{1}{jm\omega_0}e^{jm\omega_0 t}\Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = \frac{1}{jm\omega_0}\left\{e^{jm\omega_0(t_0+T_0)} - e^{jm\omega_0 t_0}\right\}$$

$$= \frac{1}{jm\omega_0}e^{jm\omega_0 t_0}\left\{e^{jm2\pi} - 1\right\} = 0\,, \quad m \neq 0 \tag{4.7}$$

เพราะว่า $e^{jm2\pi} = 1$ สำหรับ $m = 0$ จะได้ว่า $e^{jm\omega_0 t}\Big|_{m=0} = 1$ และ

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = T_0\,, \quad m = 0 \tag{4.8}$$

ดังนั้นจากสมการ (4.7) และ (4.8) สรุปได้ว่า

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}\left(e^{jk\omega_0 t}\right)^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(m-k)\omega_0 t}dt = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ T_0, & m = k \end{cases} \tag{4.9}$$

ซึ่งหมายความว่าสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนแต่ละสัญญาณเป็นสัญญาณที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันภายในช่วงคาบเวลา T_0

4.2 อนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา

อนุกรมฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา (CtFS: continuous-time Fourier series) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแปลงสัญญาณในโดเมนเวลา (หรือสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันของเวลา) ให้อยู่ในรูปของสัญญาณในโดเมนความถี่ (หรือสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันของความถี่) โดยที่การแสดงสัญญาณในโดเมนความถี่จะช่วยทำให้การวิเคราะห์สัญญาณและระบบมีความง่ายขึ้น

4.2.1 สัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา

สัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา (continuous-time periodic signal) คือสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาซึ่งสามารถหาคาบเวลา T (ที่เป็นค่าบวก) ที่ทำให้

$$x(t) = x(t + mT) \tag{4.10}$$

สำหรับทุกค่า t เมื่อ m เป็นเลขจำนวนเต็ม โดยค่า T ที่น้อยสุดที่ยังคงทำให้สมการ (4.10) เป็นจริงจะเรียกว่า "คาบมูลฐาน (fundamental period)" และ $\omega_0 = 2\pi / T = 2\pi f$ คือความถี่เชิงมุมมูลฐานมีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที (radian per second) เมื่อ $f = 1/T$ คือความถี่มีหน่วยเป็นเฮิรตซ์ (Hz: hertz)

นอกจากนี้สัญญาณคาบที่พบเห็นทั่วไปจะอยู่ในรูปของสัญญาณโคไซน์

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \tag{4.11}$$

หรือสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อน

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \tag{4.12}$$

เมื่อสัญญาณทั้งสองนี้เป็นสัญญาณคาบที่มีคาบมูลฐานคือ $T = 2\pi / \omega_0$ ในทางปฏิบัติสัญญาณที่อยู่ในรูปของ

$$\psi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.13}$$

ถือว่าเป็นสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่มีความสัมพันธ์กันทางฮาร์มอนิก (harmonic) กล่าวคือสัญญาณในสมการ (4.13) แต่ละสัญญาณจะมีความถี่เชิงมุมเป็นพหุคูณ (multiple) ของความถี่เชิงมุมมูลฐาน $\omega_k = k\omega_0$

4.2.2 อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของเลขชี้กำลังเชิงซ้อน

สัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ในรูปของเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้คือ

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \psi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{4.14}$$

เมื่อ a_k คือสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series coefficients) หรือสัมประสิทธิ์สเปกตรัม (spectral coefficients) ของสัญญาณคาบ $x(t)$ ซึ่งหาได้จาก

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{4.15}$$

เมื่อ $\int_T$ คือการหาปริพันธ์ภายในหนึ่งคาบเวลา โดยทั่วไปค่า a_k จะใช้เป็นตัววัดสัดส่วนของสัญญาณ $x(t)$ ในแต่ละฮาร์มอนิกหรือความถี่ และค่า a_0 คือองค์ประกอบไฟฟ้ากระแสตรง (d.c. component) ของสัญญาณ $x(t)$ ซึ่งหาได้จากการแทนค่า $k = 0$ ลงในสมการ (4.15) นั่นคือ

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t) dt \tag{4.16}$$

โดยทั่วไปสมการ (4.14) เรียกว่า “สมการสังเคราะห์ (synthesis equation)” และสมการ (4.15) เรียกว่า “สมการวิเคราะห์ (analysis equation)”

สัญญาณในสมการ (4.14) เป็นสัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับ T โดยที่องค์ประกอบของสัญญาณเมื่อ $k=\pm 1$ ถือว่าเป็นองค์ประกอบฮาร์มอนิกอันดับหนึ่ง (first harmonic) หรือองค์ประกอบมูลฐานและองค์ประกอบของสัญญาณเมื่อ $k=\pm N$ ถือว่าเป็นองค์ประกอบฮาร์มอนิกอันดับ N เมื่อ $N\geq 2$ เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นการแทนสัญญาณคาบ $x(t)$ ด้วยผลรวมเชิงเส้นของสัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่ต่อเนื่องทางเวลาตามสมการ (4.14) จะเรียกว่าอนุกรมฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา (CtFS)

ในกรณีที่สัญญาณคาบ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง นั่นคือ $x(t)=x^*(t)$ ดังนั้นสมการ (4.14) สามารถจัดรูปได้เป็น

$$x(t)=x^*(t)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \tag{4.17}$$

แทนค่า $k=-k$ จะได้

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \tag{4.18}$$

เปรียบเทียบสมการ (4.14) และ (4.18) จะได้ว่า

$$a_{-k}^* = a_k \tag{4.19}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงพิสูจน์ว่าสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ a_k ในสมการ (4.15) หาได้จากสมการ (4.14)

วิธีทำ สัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ a_k หาได้จากการคูณทั้งสองข้างของสมการ (4.14) ด้วย $e^{-jn\omega_0 t}$ จะได้

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right)e^{-jn\omega_0 t} \tag{4.20}$$

จากนั้นทำการหาค่าปริพันธ์ของสมการ (4.20) จากเวลาที่ $t=0$ ถึง $t=T=2\pi/\omega_0$ นั่นคือ

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right] \tag{4.21}$$

จากสมการ (4.9) จะได้ว่า

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\begin{cases} T, & k=n \\ 0, & k\neq n \end{cases} \tag{4.22}$$

ดังนั้นสมการ (4.21) สามารถลดรูปได้เป็น

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

ซึ่งตรงกับสมการ (4.15) ตามต้องการ

4.2.3 อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของฮาร์มอนิก

ในกรณีที่สัญญาณคาบ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง อนุกรมฟูเรียร์เลขชี้กำลังเชิงซ้อนในสมการ (4.14) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบใหม่ได้คือ

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k}e^{-jk\omega_0 t}\right\} \tag{4.23}$$

เมื่อ a_0 หาได้จากสมการ (4.16) แทนค่า $a_{-k}^* = a_k$ ตามสมการ (4.19) ลงในสมการ (4.23) จะได้

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{jk\omega_0 t}\right\} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[a_k e^{jk\omega_0 t}\right] \tag{4.24}$$

ดังนั้นถ้าจัดค่า a_k ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว (polar form) นั่นคือ

$$a_k = A_k e^{j\theta_k} \tag{4.25}$$

แทนค่า a_k จากสมการ (4.25) ลงในสมการ (4.24) จะได้อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของฮาร์มอนิกคือ

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left[A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\right] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \tag{4.26}$$

โดยที่พจน์ $2A_k\cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ คือองค์ประกอบฮาร์มอนิกอันดับ k, A_k คือแอมพลิจูดของฮาร์มอนิก (harmonic amplitude), และ θ_k เรียกว่ามุมเฟส (phase angle)

4.2.4 อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของตรีโกณมิติ

อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของตรีโกณมิติสามารถหาได้โดยการจัดค่า a_k ในสมการ (4.25) ให้อยู่ในรูปแบบเชิงตั้งฉาก (rectangular form) นั่นคือ

$$a_k = B_k + jC_k \tag{4.27}$$

เมื่อ $B_k = A_k\cos(\theta_k)$ และ $C_k = A_k\sin(\theta_k)$ เป็นค่าจริง แทนค่า a_k จากสมการ (4.27) ลงในสมการ (4.24) จะได้อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของตรีโกณมิติคือ

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left[\left(B_k+jC_k\right)\left(\cos\left(k\omega_0 t\right)+j\sin\left(k\omega_0 t\right)\right)\right]$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\cos\left(k\omega_0 t\right)-C_k\sin\left(k\omega_0 t\right)\right] \qquad (4.28)$$

เนื่องจาก $e^{j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$

อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของฮาร์มอนิกและอนุกรมฟูเรียร์ในรูปของตรีโกณมิติมีความสัมพันธ์กันโดยเมื่อทำการเปรียบเทียบค่า a_k ในสมการ (4.25) และ (4.27) จะได้ว่า

$$A_k=\sqrt{B_k^2+C_k^2} \quad \text{และ} \quad \theta_k=\tan^{-1}\left(\frac{C_k}{B_k}\right) \qquad (4.29)$$

นอกจากนี้อนุกรมฟูเรียร์ในรูปของตรีโกณมิติยังมีความสัมพันธ์กับอนุกรมฟูเรียร์ในรูปของเลขชี้กำลังเชิงซ้อน กล่าวคือจากสมการ (4.23) โดยอาศัยความสัมพันธ์ออยเลอร์จะได้

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\left(\cos\left(k\omega_0 t\right)+j\sin\left(k\omega_0 t\right)\right)+a_{-k}\left(\cos\left(k\omega_0 t\right)-j\sin\left(k\omega_0 t\right)\right)\right\}$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(a_k+a_{-k}\right)\cos\left(k\omega_0 t\right)+j\left(a_k-a_{-k}\right)\sin\left(k\omega_0 t\right)\right\} \qquad (4.30)$$

เปรียบเทียบสมการ (4.28) และ (4.30) จะได้ว่า

$$B_k=a_k+a_{-k} \quad \text{และ} \quad C_k=-j\left(a_k-a_{-k}\right) \qquad (4.31)$$

4.2.4.1 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

ในกรณีที่สัญญาณคาบ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงและเป็นฟังก์ชันคู่ (even function) ดังนั้นจากสมการ (4.28) จะได้ว่า $C_k=0$ และอนุกรมฟูเรียร์ในรูปของตรีโกณมิติสามารถลดรูปได้เป็น

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cos\left(k\omega_0 t\right) \qquad (4.32)$$

เช่นเดียวกันถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงและเป็นฟังก์ชันคี่ (odd function) ดังนั้นจากสมการ (4.28) จะได้ว่า $B_k=0$ และอนุกรมฟูเรียร์ในรูปของตรีโกณมิติสามารถลดรูปได้เป็น

$$x(t)=-2\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\left(k\omega_0 t\right) \qquad (4.33)$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณคาบที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบต่างๆ ได้ตามสมการ (4.14), (4.26), หรือ (4.28) ดังนั้นการตัดสินใจว่าจะนำอนุกรมฟูเรียร์รูปแบบใดมาใช้งานจึงขึ้นอยู่กับลักษณะของงานประยุกต์แต่ละประเภท

4.2.5 ตัวอย่างการหาอนุกรมฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา

จากสมการ (4.14) และ (4.15) ทำให้ทราบว่าสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ ใดๆ สามารถที่จะถูกกำหนดได้ใน 2 โดเมนคือ

- โดเมนเวลา (time domain) ซึ่งสัญญาณคาบ $x(t)$ จะแสดงอยู่ในรูปฟังก์ชันของเวลาตามสมการ (4.14)
- โดเมนความถี่ (frequency domain) ซึ่งจะถูกกำหนดด้วยองค์ประกอบของความถี่ต่างๆ ผ่านทางค่าสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ตามสมการ (4.15)

ดังนั้นถ้าทราบสัญญาณคาบ $x(t)$ ก็สามารถหาสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ได้ตามสมการ (4.15) ในทางกลับกันถ้าทราบสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ก็สามารถหาสัญญาณคาบ $x(t)$ ได้ตามสมการ (4.14) ในส่วนต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างการหาอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา

ตัวอย่างที่ 4.4 พิจารณาสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา

$$x(t) = 1 + \sin(2\pi t) + 3\cos(2\pi t) + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ที่มีคาบเวลา $T = 1$ จงหาสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณคาบนี้

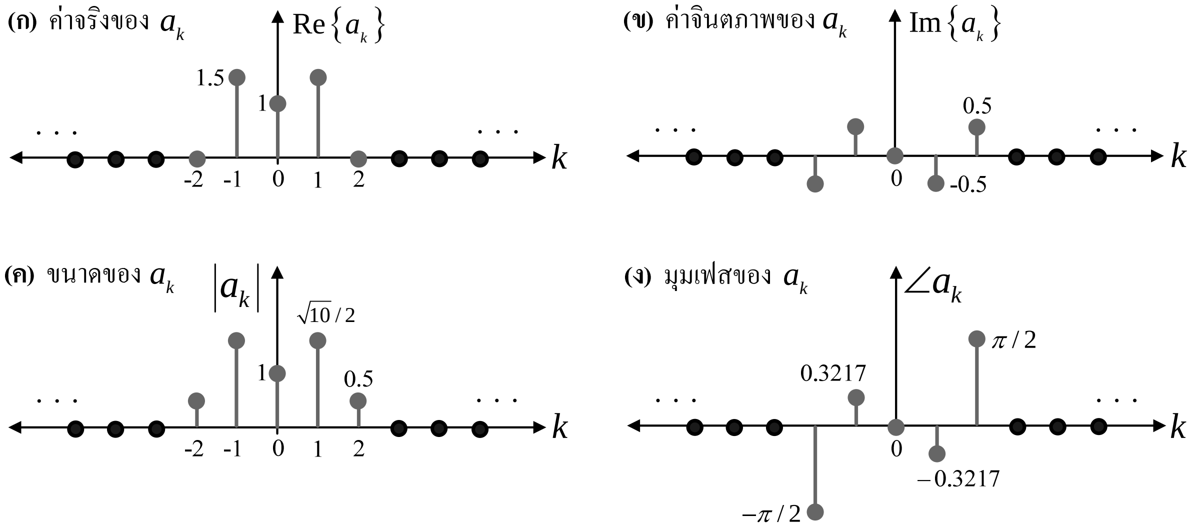
วิธีทำ อาศัยความสัมพันธ์ของออยเลอร์จะได้ว่า

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t + j\pi/2} + e^{-j4\pi t - j\pi/2}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)e^{j2\pi t} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j4\pi t}$$

$$= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j2\omega_0 t}$$

เมื่อ $\omega_0 = 2\pi$ เรเดียนต่อวินาที เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับสมการ (4.14) จะพบว่าสัญญาณคาบ $x(t)$ มีค่าสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์คือ



ภาพที่ 4.1 ค่าส่วนจริง, ค่าส่วนจินตภาพ, ขนาด, และมุมเฟส ของสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์

$$a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad |a_0| = 1 \quad \text{และ} \quad \angle a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j \quad \Rightarrow \quad |a_1| = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{และ} \quad \angle a_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right) = -0.3217$$

$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j \quad \Rightarrow \quad |a_{-1}| = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{และ} \quad \angle a_{-1} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.3217$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}j \quad \Rightarrow \quad |a_2| = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad \angle a_2 = \frac{\pi}{2} = 1.5708$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}j \quad \Rightarrow \quad |a_{-2}| = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad \angle a_{-2} = -\frac{\pi}{2} = -1.5708$$

และ $a_k = 0$ สำหรับ $|k| > 2$ ภาพที่ 4.1 แสดงค่าส่วนจริง (real part), ค่าส่วนจินตภาพ (imaginary part), ขนาด (magnitude), และมุมเฟส (phase) ของสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ จะเห็นได้ว่ารูปกราฟในภาพที่ 4.1 (ค) และ 4.1 (ง) มีลักษณะเป็นเส้น ดังนั้นโดยทั่วไปจึงเรียกรูปกราฟที่แสดงค่าขนาดและมุมเฟสของสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์นี้ว่า “สเปกตรัมแบบเส้น (line spectrum)”

หมายเหตุ โดยทั่วไปสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ a_k บ่งบอกถึงองค์ประกอบของสัญญาณคาบ $x(t)$ ในแต่ละความถี่ เช่น a_0 อยู่ในความถี่เชิงมุมค่าศูนย์ และ a_k อยู่ในความถี่เชิงมุม $\omega_k = k\omega_0$ ดังนั้นจากภาพที่ 4.1 ค่า k ในเส้นแกน x นอกจากจะหมายถึงลำดับของ a_k แล้ว ยังหมายถึงความถี่เชิงมุมที่ $\omega_k = k\omega_0$ ด้วย