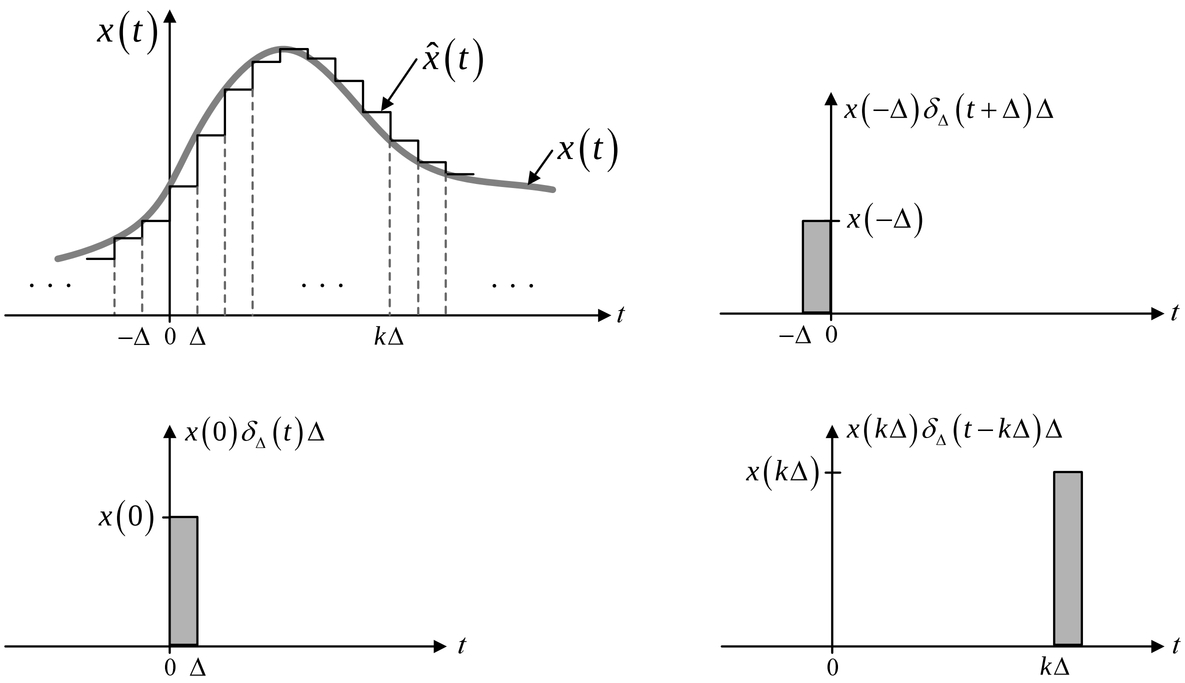
บทที่ 2
ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่ต่อเนื่องทางเวลา

ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (LTI : linear time-invariant) หรือระบบ LTI คือระบบที่มีคุณสมบัติทั้งเชิงเส้นและไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา ในทางปฏิบัติระบบ LTI นิยมนำมาใช้ในการตั้งสมมุติฐานของปรากฏการณ์ต่างๆ เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตของระบบ ดังนั้นความเข้าใจในระบบ LTI จึงช่วยทำให้สามารถวิเคราะห์สัญญาณและระบบง่ายขึ้น ทั้งนี้เป็นเพราะว่าระบบ LTI มีคุณสมบัติที่สำคัญคือ สัญญาณเอาต์พุตมีค่าเท่ากับผลลัพธ์ที่ได้จากการทำคอนโวลูชัน (convolution) ระหว่างสัญญาณอินพุตและผลตอบสนองอิมพัลส์ (impulse response) ของระบบ ดังนั้นถ้าทราบผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ LTI ก็ทำให้สามารถคำนวณหาสัญญาณเอาต์พุตของระบบเมื่อสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณใดๆ ได้โดยง่าย

ในบทนี้จะพิจารณาเฉพาะระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา (continuous-time LTI system) ซึ่งหมายถึงระบบ LTI ที่มีสัญญาณอินพุต, ผลตอบสนองอิมพัลส์, และสัญญาณเอาต์พุต เป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา โดยจะเน้นในเรื่องการอธิบายพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ที่จำเป็นสำหรับการวิเคราะห์ระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา เช่น คุณสมบัติของระบบ LTI, ผลตอบสนองอิมพัลส์, คอนโวลูชัน, และสหสัมพันธ์ เป็นต้น รวมทั้งอธิบายการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย สำหรับพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับระบบ LTI ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (discrete-time LTI system) จะอธิบายในบทที่ 3 ส่วนผู้สนใจที่ต้องการศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมของเนื้อหาในบทนี้สามารถค้นคว้าได้จาก [1, 3 – 5]



ภาพที่ 2.1 การประมาณค่าของสัญญาณ $x(t)$ ด้วยสัญญาณ $\hat{x}(t)$

2.1 การแสดงสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา

สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา (continuous-time signal) สามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ให้อยู่ในรูปของการซ้อนทับ (superposition) ของสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วยที่ถูกสเกลและถูกเลื่อนเวลาหลายๆ ตัว ในทางปฏิบัติสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วยหรือสัญญาณไดแร็กเดลตา $\delta(t)$ อาจพิจารณาได้ว่าเป็นสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมในอุดมคติ (ideal rectangular pulse) ที่มีความกว้างของสัญญาณน้อยมากและมีแอมพลิจูดของสัญญาณสูงมากตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & 0 \le t < \Delta \\ 0, & \text{else} \end{cases} \tag{2.1}$$

เมื่อ Δ คือค่าคงตัว

พิจารณาสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ ในภาพที่ 2.1 พบว่าสัญญาณ $x(t)$ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลรวมถ่วงน้ำหนักของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมในอุดมคติ $\delta_\Delta(t)$ ที่ถูกถ่วงน้ำหนักและถูกเลื่อนเวลา เนื่องจาก $\Delta\delta_\Delta(t)$ มีแอมพลิจูดเท่ากับค่า 1 ดังนั้นสัญญาณ $x(t)$ จึงสามารถประมาณค่าได้เป็น

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \tag{2.2}$$

เมื่อ $\hat{x}(t)$ คือค่าประมาณของสัญญาณ $x(t)$ สมการ (2.2) แสดงให้เห็นว่าเมื่อ Δ มีค่าเข้าใกล้ค่าศูนย์มากเท่าใด ก็จะทำให้ $\hat{x}(t)$ มีค่าใกล้เคียงกับ $x(t)$ มากขึ้นเท่านั้น เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta\right\} \tag{2.3}$$

จากทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส [4] ปริพันธ์ค่าจริง (real integral) ของฟังก์ชันจริงสามารถนิยามในรูปลิมิตของผลรวม

$$\int_a^b g(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=a/\varepsilon}^{b/\varepsilon}g(k\varepsilon)\varepsilon \tag{2.4}$$

โดยที่ ε คือส่วนที่น้อยมากๆ ของตัวแปร t ดังนั้นจากสมการ (2.3) เมื่อ $\Delta\to 0$ สัญญาณ $\delta_{\Delta}(t)$ จะเปลี่ยนเป็นสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $\delta(t)$ และเครื่องหมายผลรวมก็จะเปลี่ยนเป็นเครื่องหมายปริพันธ์ ซึ่งหมายความว่าสัญญาณ $x(t)$ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วยได้คือ

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{2.5}$$

2.2 ปริพันธ์คอนโวลูชัน

กำหนดให้ $h(t)$ คือผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วย (unit impulse response) หรือที่เรียกว่า “ผลตอบสนองอิมพัลส์” ของระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา (หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์คือ **T**) ซึ่งก็คือสัญญาณเอาต์พุตของระบบเมื่อสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $\delta(t)$ นั่นคือ

$$h(t)=\mathbf{T}\left[\delta(t)\right] \tag{2.6}$$

ดังนั้นในกรณีที่สัญญาณอินพุตคือ $x(t)$ จะได้ว่าสัญญาณเอาต์พุตหรือผลตอบสนองของระบบมีค่าเท่ากับ

$$y(t)=\mathbf{T}\left[x(t)\right] \tag{2.7}$$

แทนค่า $x(t)$ จากสมการ (2.5) ลงในสมการ (2.7) จะได้

$$y(t)=\mathbf{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathbf{T}\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau \tag{2.8}$$

เนื่องจากระบบนี้เป็นระบบ LTI ดังนั้น

$$h(t-\tau)=\mathbf{T}\left[\delta(t-\tau)\right] \tag{2.9}$$

แทนค่าสมการ (2.9) ลงในสมการ (2.8) จะได้

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.10}$$

ซึ่งเป็นการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $x(\tau)h(t-\tau)$ สำหรับทุกค่า τ โดยอาจพิจารณาว่า $h(t-\tau)$ คือสัญญาณ $h(\tau)$ ที่ทำการพับสัญญาณแล้วถูกหน่วงเวลาเป็นจำนวน t หน่วย สมการ (2.10) จะเรียกกันทั่วไปว่า "ปริพันธ์คอนโวลูชัน (convolution integral)" ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้คือ

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.11}$$

เมื่อ "$*$" คือตัวดำเนินการคอนโวลูชัน (convolution operator) จากสมการ (2.11) เห็นได้ว่าระบบ LTI สามารถถูกกำหนดได้อย่างสมบูรณ์ด้วยผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ของระบบ กล่าวคือถ้าทราบว่า $h(t)$ คืออะไร ก็สามารถหาสัญญาณเอาต์พุตของระบบเมื่อสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณใดๆ ได้โดยง่าย

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณอินพุต $x(t)$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ของระบบคือ

$$x(t)=\begin{cases}3, & -1<t<1\\ 0, & \text{else}\end{cases} \quad \text{และ} \quad h(t)=\begin{cases}2, & 0<t<4\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

วิธีทำ สัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ หาได้จากสมการ (2.11) โดยเมื่อพิจารณาสัญญาณ $x(\tau)$ และ $h(t-\tau)$ ตามภาพที่ 2.2 จะพบว่าการทำคอนโวลูชันสามารถแบ่งออกได้เป็น 5 ช่วงเวลาโดยมีรายละเอียดการคำนวณดังนี้

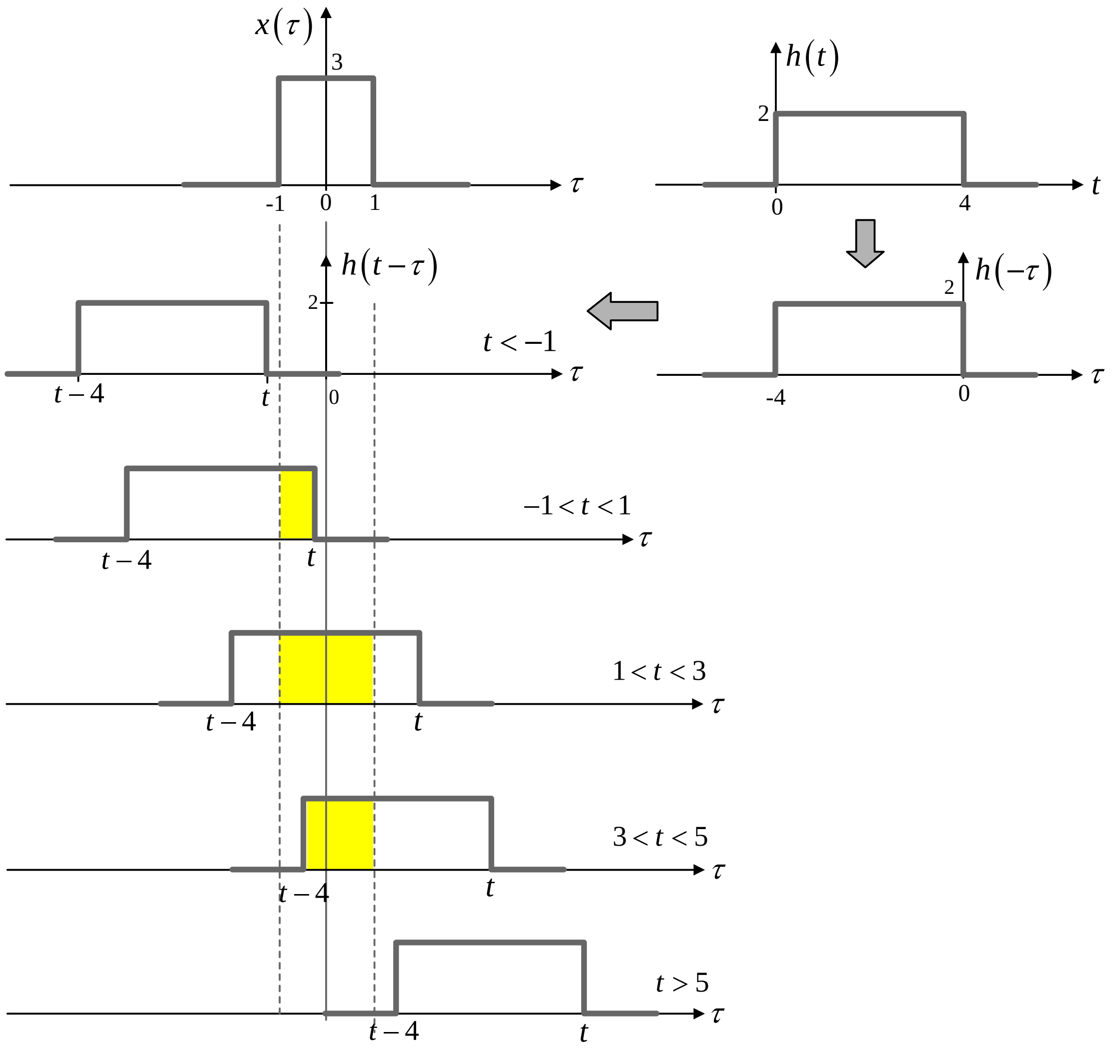
ช่วงเวลาที่ $t<-1$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $h(t-\tau)$ และ $x(\tau)$ มาทับซ้อนกัน ดังนั้น

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=0$$

ช่วงเวลาที่ $-1<t<1$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ เริ่มทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ จนถึงช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อน $x(\tau)$ ทั้งหมด ดังนั้น

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{t}(3)(2)d\tau=6\tau\Big|_{\tau=-1}^{t}=6(t+1)$$

ช่วงเวลาที่ $1<t<3$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ ทั้งหมด ดังนั้น



ภาพที่ 2.2 การกำหนดช่วงของการทำคอนโวลูชันในตัวอย่างที่ 2.1

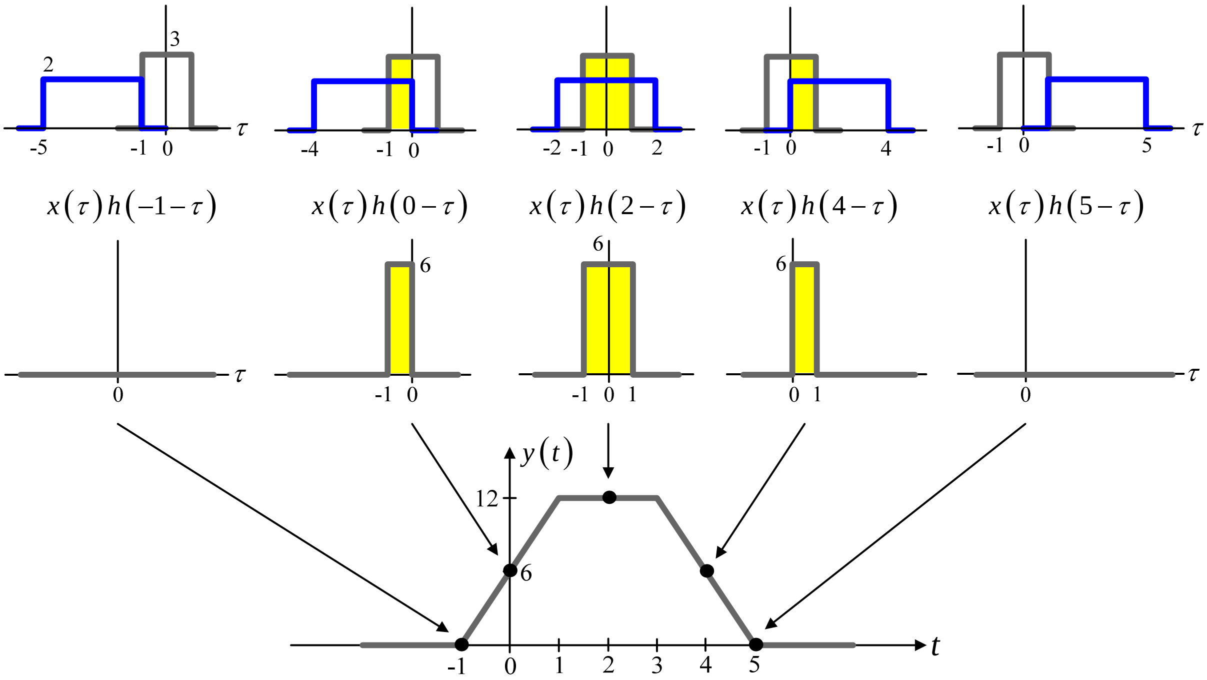
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{1}(3)(2)d\tau=6\tau\Big|_{\tau=-1}^{1}=6(1+1)=12$$

ช่วงเวลาที่ $3<t<5$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ เริ่มเคลื่อนที่ออกจากการทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ ทั้งหมด จนถึงช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับ $x(\tau)$ ตัวสุดท้าย ดังนั้น

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{t-4}^{5}(3)(2)d\tau=6\tau\Big|_{\tau=t-4}^{5}=6(5-(t-4))=6(1-t)$$

ช่วงเวลาที่ $t>5$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $h(t-\tau)$ และ $x(\tau)$ มาทับซ้อนกัน ดังนั้น

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=0$$



ภาพที่ 2.3 ตัวอย่างการทำคอนโวลูชันระหว่าง $x(\tau)$ และ $h(t-\tau)$

เพราะฉะนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI มีค่าเท่ากับ

$$y(t)=\begin{cases}0, & t<-1\\ 6(t+1), & -1<t<1\\ 12, & 1<t<3\\ 6(1-t), & 3<t<5\\ 0, & t>5\end{cases}$$

ภาพที่ 2.3 แสดงรายละเอียดการทำคอนโวลูชันระหว่าง $x(\tau)$ และ $h(t-\tau)$ เมื่อ $t=-1,0,2,4,$ และ 5

SCILAB: (ภาพที่ 2.3)

```
-->function [y] = Xt(t)                    //ฟังก์ชันย่อยสำหรับสัญญาณ x(t)
-->  y          = zeros(1,length(t));
-->  index      = find((t>-1)&(t<1));
-->  y(index)   = 3;
-->endfunction

-->function [y] = Ht(t)                    //ฟังก์ชันย่อยสำหรับสัญญาณ h(t)
-->  y          = zeros(1,length(t));
-->  index      = find((t>0)&(t<4));
-->  y(index)   = 2;
-->endfunction

-->Step = 0.01;  Range_Tau = -2:Step:5;  Range_t = -3:Step:6;
```

```
-->for i = 1:length(Range_t)
-->   t     = Range_t(i);
-->   Yt(i) = sum(Xt(Range_Tau).*Ht(t - Range_Tau))*Step;    //ปริพันธ์คอนโวลูชัน
-->end
-->plot(Range_t, Yt);
```

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณอินพุต $x(t)$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ของระบบคือ

$$x(t)=e^{-\alpha t}u(t) \quad \text{และ} \quad h(t)=u(t)$$

สำหรับ $\alpha>0$ โดยที่ $u(t)$ คือสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

วิธีทำ สัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ หาได้จากสมการ (2.11) โดยเมื่อพิจารณาสัญญาณ $x(\tau)$ และ $h(t-\tau)$ ตามภาพที่ 2.4 จะพบว่าการทำคอนโวลูชันสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ช่วงเวลา คือ เมื่อ $t>0$ และ $t<0$ โดยมีรายละเอียดการคำนวณดังนี้

ช่วงเวลาที่ $t<0$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ (ดูภาพที่ 2.5) ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากการทำคอนโวลูชันในช่วงเวลานี้จะมีค่าเป็นค่าศูนย์ นั่นคือ

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=0 \quad \text{สำหรับ } t<0$$

ช่วงเวลาที่ $t>0$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ บางส่วน (ดูภาพที่ 2.5) ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ หาได้จาก

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}d\tau=\left.\frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha}\right|_{\tau=0}^{t}=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$$

เพราะฉะนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI นี้สำหรับทุกค่า t คือ

$$y(t)=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)u(t)$$

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ T คือเลขจำนวนจริง จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณอินพุต $x(t)$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ของระบบคือ

$$x(t)=\begin{cases} t, & 0<t<2T \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad \text{และ} \quad h(t)=\begin{cases} 1, & 0<t<T \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$