บทที่ 10

การแปลงซี

ในบทที่ 9 ได้แสดงให้เห็นว่าการแปลงลาปลาซเป็นส่วนขยาย (extension) ของการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา (CtFT) ซึ่งใช้ในการแทนสัญญาณไม่เป็นคาบที่ต่อเนื่องทางเวลาที่ไม่สามารถหาผลการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลาได้ ในทำนองเดียวกัน "การแปลงซี (Z transform)" ก็มีลักษณะคล้ายกับการแปลงลาปลาซ เพียงแต่จะใช้กับสัญญาณไม่เป็นคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (discrete-time aperiodic signal) เท่านั้น

ในบทนี้จะแสดงให้เห็นว่าการแปลงซีเป็นส่วนขยายของการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (DtFT) โดยสามารถนำมาใช้วิเคราะห์สัญญาณที่ไม่สามารถหาการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาได้ เพราะฉะนั้น การแปลงซีจึงมีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ เช่น ใช้หาผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (ระบบ LTI), ใช้พิจารณาความเสถียรของระบบ LTI, และใช้วิเคราะห์พฤติกรรมของระบบป้อนกลับ (feedback system) เป็นต้น

10.1 การแปลงซี

การแปลงซีของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $x[n]$ นิยามโดย

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{10.1}$$

โดยที่ z คือตัวแปรเชิงซ้อน และเพื่อให้สะดวกต่อการอธิบายการแปลงซีจะใช้สัญลักษณ์

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} \tag{10.2}$$

และ

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \tag{10.3}$$

เมื่อ $\mathcal{Z}[\cdot]$ คือสัญลักษณ์การแปลงซี และ $\mathcal{Z}^{-1}[\cdot]$ คือสัญลักษณ์การแปลงซีผกผันซึ่งจะอธิบายในหัวข้อที่ 10.3 นอกจากนี้จะใช้สัญลักษณ์

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \tag{10.4}$$

แสดงความสัมพันธ์ของคู่การแปลงซีระหว่าง $x[n]$ และ $X(z)$

เนื่องจาก z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน จึงสามารถเขียนตัวแปร z ในรูปแบบเชิงขั้ว (polar form) ได้คือ

$$z = re^{j\omega} \tag{10.5}$$

เมื่อ r คือขนาด (magnitude) ของ z และ ω คือมุมเฟส (phase) ของ z การแปลงซีในสมการ (10.1) จะมีความสัมพันธ์กับการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาดังนี้

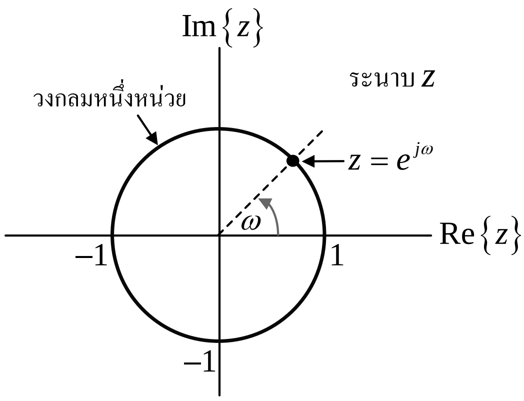
$$X(z)\big|_{z=re^{j\omega}} = X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{x[n]r^{-n}\right\}e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\} \tag{10.6}$$

นั่นคือการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ มีค่าเท่ากับการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (DtFT) ของสัญญาณ $x[n]$ หลังจากการคูณด้วยสัญญาณเลขชี้กำลังจำนวนจริง r^{-n} สำหรับในกรณีที่ $r=1$ หรือ $|z|=1$ การแปลงซีจะมีค่าเท่ากับการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา นั่นคือสมการ (10.6) สามารถลดรูปได้เป็น

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}\{x[n]\} \tag{10.7}$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นพบว่าการแปลงซีมีความสัมพันธ์กับการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาค่อนข้างมาก เช่นเดียวกับความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงลาปลาซและการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา กล่าวคือการแปลงลาปลาซมีค่าเท่ากับการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลาบนแกนจินตภาพ (นั่นคือ เมื่อตัวแปรเชิงซ้อน $s=\sigma+j\omega$ มีค่าจริงเป็นค่าศูนย์ หรือ $\sigma=0$) ในขณะที่การแปลงซีมีความสัมพันธ์มีค่าเท่ากับการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาบนเส้นรอบขอบ (contour) ที่มีรัศมีเท่ากับค่าหนึ่งบนระนาบ z โดยที่วงกลมนี้จะเรียกว่า "วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle)" ตามภาพที่ 10.1 ซึ่งมีบทบาทมากสำหรับการวิเคราะห์สัญญาณและระบบโดยใช้การแปลงซี

จากสมการ (10.6) การลู่เข้า (convergence) ของการแปลงซีจะเกิดขึ้นเมื่อพจน์ $x[n]r^{-n}$ มีค่าลู่เข้า ดังนั้นการลู่เข้าของการแปลงซีของลำดับข้อมูล $x[n]$ จะเกิดขึ้นสำหรับช่วงของค่า r ซึ่งในทางปฏิบัติจะเรียกช่วงของค่า r ที่ทำให้การแปลงซีของ $x[n]$ มีค่าลู่เข้าว่า "บริเวณการลู่เข้า (ROC: region of convergence)" โดยที่ถ้า ROC ของ $X(z)$ ครอบคลุมบริเวณของวงกลมหนึ่งหน่วยแล้ว การแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาของ $x[n]$ จะมีค่าลู่เข้าเสมอ



ภาพที่ 10.1 วงกลมหนึ่งหน่วยในระนาบ z

ตัวอย่างที่ 10.1 จงหาผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n] = a^n u[n]$

วิธีทำ ผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ หาได้จากสมการ (10.1) นั่นคือ

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{a^n u[n]\} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n \tag{10.8}$$

โดยจะมีค่าลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n < \infty$$

ซึ่งแสดงว่า ROC ของ $X(z)$ คือบริเวณที่ $\left|az^{-1}\right| < 1$ หรือ $|z| > |a|$ และเนื่องจาก

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \tag{10.9}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \tag{10.10}$$

สำหรับ $|z| > |a|$ เพราะฉะนั้นคู่การแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ คือ

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a| \tag{10.11}$$

ตัวอย่างที่ 10.2 จงหาผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n] = -a^n u[-n-1]$

วิธีทำ ผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ หาได้จากสมการ (10.1) นั่นคือ

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-a^{n}u[-n-1]\right\}z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{n}z^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n}z^{n}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^{n} \quad (10.12)$$

โดยที่ $X(z)$ จะมีค่าลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^{n}<\infty$ ซึ่งแสดงว่า ROC ของ $X(z)$ คือบริเวณที่ $\left|a^{-1}z\right|<1$ หรือ $|z|<|a|$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$X(z)=1-\frac{1}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \quad (10.13)$$

สำหรับ $|z|<|a|$ เพราะฉะนั้นคู่การแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ คือ

$$x[n]=-a^{n}u[-n-1]\xleftrightarrow{z}X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|<|a| \quad (10.14)$$

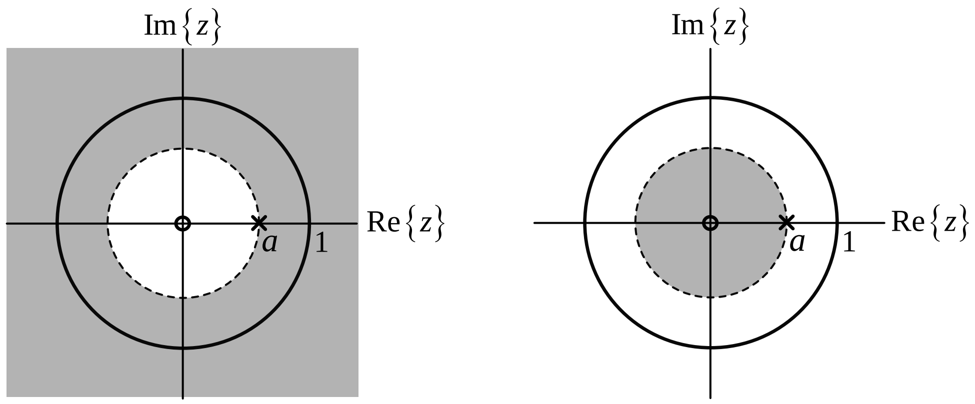
เปรียบเทียบสมการ (10.11) และ (10.14) พบว่าสัญญาณทั้งสองมีนิพจน์พีชคณิต[1] (algebraic expression) ของผลการแปลงซี $X(z)$ เหมือนกัน แต่มีค่า ROC ต่างกัน กล่าวคือ $X(z)$ ในสมการ (10.11) มี ROC คือ $|z|>|a|$ และ $X(z)$ ในสมการ (10.14) มี ROC คือ $|z|<|a|$ ดังนั้นสรุปได้ว่าการแปลงซีจะต้องถูกกำหนดด้วยนิพจน์พีชคณิตและ ROC ของผลการแปลงซี โดยทั่วไปผลการแปลงซีจะอยู่ในรูปของ “ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function)” ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร z นั่นคือ

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)} \quad (10.15)$$

เมื่อ $N(z)$ และ $D(z)$ คือพหุนามตัวเศษและพหุนามตัวส่วนของ $X(z)$ นอกจากนี้คำตอบของ $N(z)$ และ $D(z)$ ในระนาบ z สามารถนำมาใช้อธิบายผลการแปลงซีได้ โดยคำตอบของ $N(z)$ จะแสดงด้วยสัญลักษณ์ “$\bigcirc$” และคำตอบของ $D(z)$ จะแสดงด้วยสัญลักษณ์ “$\times$”

ในทางปฏิบัติคำตอบของพหุนามตัวเศษ $N(z)$ เรียกว่า “ซีโร (zero)” เพราะว่าคำตอบเหล่านี้จะทำให้ $X(z)=0$ ในทำนองเดียวกันคำตอบของพหุนามตัวส่วน $D(z)$ เรียกว่า “โพล (pole)” เพราะว่าคำตอบเหล่านี้ทำให้ $X(z)=\infty$ นอกจากนี้การแทนผลการแปลงซี $X(z)$ โดยใช้โพลและซีโรในระนาบ z จะเรียกกันว่า “แผนภาพโพลซีโร (pole–zero plot)” ของ $X(z)$ ดังนั้นโดยทั่วไปผลการแปลงซี $X(z)$ สามารถกำหนดได้ 2 รูปแบบคือ การใช้นิพจน์พีชคณิตและบริเวณการลู่เข้า หรือการใช้นิพจน์พีชคณิตและแผนภาพโพลซีโร

[1] นิพจน์พีชคณิตของผลการแปลงซี $X(z)$ หมายถึงรูปสมการคณิตศาสตร์ของ $X(z)$ นั่นเอง



(ก) ROC คือ $|z|>|a|$ **(ข)** ROC คือ $|z|<|a|$

ภาพที่ 10.2 แผนภาพโพลซีโรและ ROC ของ $X(z)$ เมื่อ $|a|\le 1$ สำหรับ (ก) ตัวอย่างที่ 10.1 และ (ข) ตัวอย่างที่ 10.2

ภาพที่ 10.2 (ก) แสดงแผนภาพโพลซีโรและ ROC ของ $X(z)=1/\left(1-az^{-1}\right)$ ในสมการ (10.11) สำหรับ $|a|\le 1$ โดยที่ ROC คือบริเวณที่แรเงาเป็นสีเทา อย่างไรก็ตามถ้า $|a|>1$ แล้ว ROC จะไม่รวมวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งหมายความว่าสัญญาณ $x[n]=a^n u[n]$ จะไม่สามารถหาผลการแปลงฟูเรียร์ได้ (แต่ยังคงหาผลการแปลงซีของ $x[n]$ ได้) ในทำนองเดียวกันภาพที่ 10.2 (ข) แสดงแผนภาพโพลซีโรและ ROC ของ $X(z)$ ในสมการ (10.14) สำหรับ $|a|\le 1$

ตัวอย่างที่ 10.3 จงหาผลการแปลงซีของสัญญาณ

$$x[n]=7(1/3)^n u[n]-6(1/2)^n u[n] \tag{10.16}$$

วิธีทำ ผลการแปลงซีของ $x[n]$ หาได้จากสมการ (10.1) นั่นคือ

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]-6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}z^{-n}$$

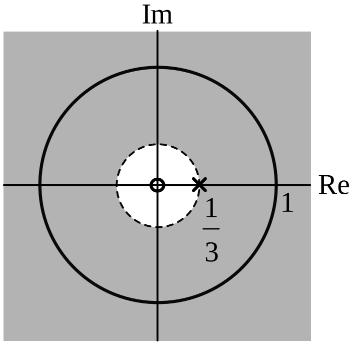
$$=7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}-6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

$$=7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n-6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \tag{10.17}$$

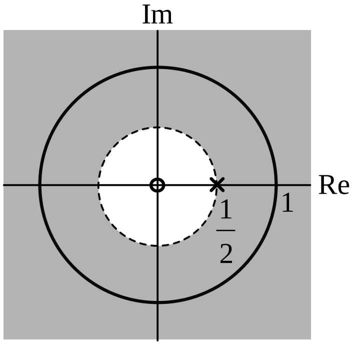
$$=\frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{10.18}$$

SCILAB: (ภาพที่ 10.3 (ค))

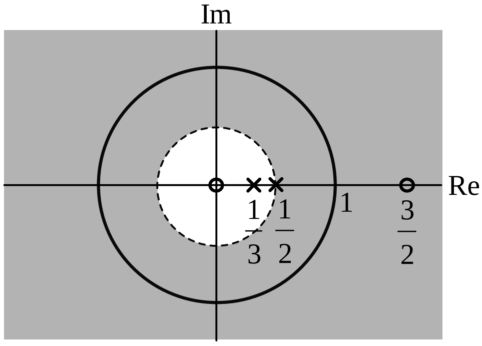
```
-->z   = poly(0, 'z');
-->num = z*(z-3/2);
-->den = (z-1/3)*(z-1/2);
-->Xz  = num/den;
-->h   = syslin('d', Xz);
-->plzr(h); //ภาพที่ 10.3 (ค)
```



(ก) $1/\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)$



(ข) $1/\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$



(ค) $7/\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)-6/\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$

ภาพที่ 10.3 แผนภาพโพลซีโรและ ROC ของ $X(z)$ ในตัวอย่างที่ 10.3

$$= \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \tag{10.19}$$

โดยที่ $X(z)$ มีค่าลู่เข้าก็ต่อเมื่อผลรวมของแต่ละพจน์ในสมการ (10.17) ลู่เข้า นั่นคือเมื่อ $\left|(1/3)z^{-1}\right|<1$ และ $\left|(1/2)z^{-1}\right|<1$ ซึ่งจะได้ว่า $|z|>1/3$ และ $|z|>1/2$ ตามลำดับ เพราะฉะนั้น ROC ของ $X(z)$ คือ $|z|>1/2$ (บริเวณที่ทับซ้อนกันของ $|z|>1/3$ และ $|z|>1/2$) ภาพที่ 10.3 แสดงแผนภาพโพลซีโรและ ROC ของ $X(z)$

นอกจากนี้ผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ ในสมการ (10.16) สามารถหาได้โดยอาศัยคุณสมบัติเชิงเส้น กล่าวคือจากสมการ (10.11) จะได้ว่า

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}, \quad |z|>\frac{1}{3} \tag{10.20}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \quad |z|>\frac{1}{2} \tag{10.21}$$

ดังนั้นผลการแปลงซีของ $x[n]$ ในสมการ (10.16) คือ

$$X(z) = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{2} \tag{10.22}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากันกับสมการ (10.18)