สัญญาณและระบบ

การแปลงซี (13-14)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

http://home.npru.ac.th/piya

Outline

- การแปลงซี
- บริเวณการลู่เข้าของการแปลงซี
- การแปลงซีผกผัน
- คุณสมบัติการแปลงซี
- การวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา
- ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนและแผนภาพบล็อก
- การแปลงซีแบบด้านเดียว

บทนำ

- LT เป็นส่วนขยายของ CtFT $\Longrightarrow$ ใช้แทนสัญญาณไม่เป็นคาบที่ต่อเนื่องทางเวลาที่ไม่สามารถหา CtFT
- **การแปลงซี** (Z transform) คล้ายกับ LT เพียงแต่ใช้กับสัญญาณไม่เป็นคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา
  - เป็นส่วนขยายของ DtFT โดยสามารถใช้วิเคราะห์สัญญาณที่ไม่สามารถหา DtFT ได้
  - มีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ เช่น ใช้หาผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ LTI, ใช้พิจารณาความเสถียรของระบบ LTI, และใช้วิเคราะห์พฤติกรรมของระบบป้อนกลับ

การแปลงซี (ZT)

การแปลงซี (ZT) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $x[n]$ นิยามโดย

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$ เมื่อ z คือตัวแปรเชิงซ้อน

ใช้สัญลักษณ์ $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ และ $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$

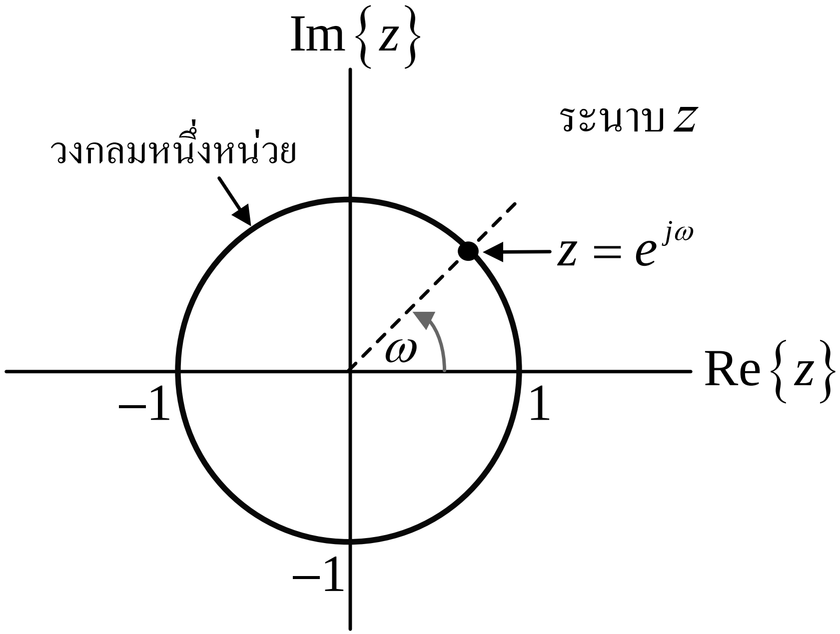
เนื่องจาก $z = re^{j\omega}$ เมื่อ r คือขนาดของ z และ ω คือมุมเฟสของ z $\Rightarrow$ ZT มีความสัมพันธ์กับ DtFT ดังนี้

$$X(z)\big|_{z=re^{j\omega}} = X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{x[n]r^{-n}\right\} e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}$$

$\Rightarrow$ ZT ของสัญญาณ $x[n]$ มีค่าเท่ากับ DtFT ของ $x[n]$ หลังจากการคูณด้วย r^{-n}

$\Rightarrow$ ถ้า $r = 1$ หรือ $|z| = 1$ $\Rightarrow$ ZT = DtFT นั่นคือ $X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}\{x[n]\}$

- ZT มีความสัมพันธ์มีค่าเท่ากับ DtFT บนเส้นรอบขอบ (contour) ที่มีรัศมีเท่ากับ 1 บนระนาบ z โดยวงกลมนี้เรียกว่าวงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle)
- การลู่เข้าของการแปลงซีจะเกิดขึ้นเมื่อพจน์ $x[n]r^{-n}$ มีค่าลู่เข้า
- การลู่เข้าของ ZT ของ $x[n]$ จะเกิดขึ้นสำหรับช่วงของค่า $r \Rightarrow$ ช่วงของค่า r ที่ทำให้ ZT ของ $x[n]$ มีค่าลู่เข้าว่า**บริเวณการลู่เข้า** (ROC)
    - ถ้า ROC ของ $X(z)$ ครอบคลุมบริเวณของวงกลม 1 หน่วย $\Rightarrow$ DtFT ของ $x[n]$ มีค่าลู่เข้าเสมอ



Example 1

จงหาผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n] = a^n u[n]$

วิธีทำ ผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ หาได้จาก $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{a^n u[n]\} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$

โดยมีค่าลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n < \infty \Rightarrow$ แสดงว่า ROC ของ $X(z)$ คือบริเวณที่ $|az^{-1}| < 1$

หรือ $|z| > |a|$ และเนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad \text{สำหรับ } |z| > |a|$$

เพราะฉะนั้นคู่การแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ คือ

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

Example 2

จงหาผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n] = -a^n u[-n-1]$

วิธีทำ ผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ หาได้จาก

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{-a^n u[-n-1]\} z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

โดย $X(z)$ มีค่าลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n < \infty$ ซึ่งแสดงว่า ROC ของ $X(z)$ คือบริเวณที่ $|a^{-1}z| < 1$ หรือ $|z| < |a|$ ดังนั้นจะได้

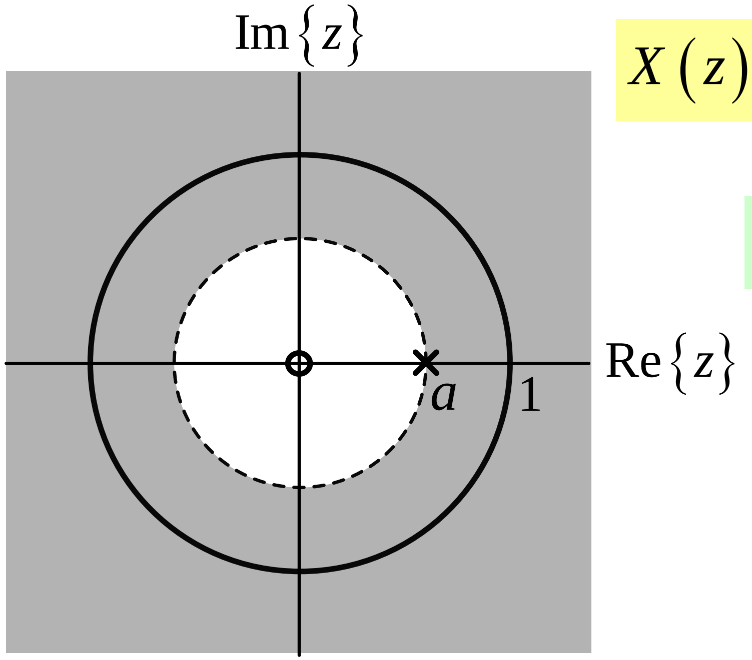
$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

สำหรับ $|z| < |a|$ เพราะฉะนั้นคู่การแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ คือ

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

- ใน Example 1 และ Example 2 $\Rightarrow$ สัญญาณทั้งสองมี $X(z)$ เหมือนกัน แต่มีค่า ROC ต่างกัน
    - $X(z)$ ใน Example 1 มี ROC คือ $|z|>|a|$ และ $X(z)$ ใน Example 2 มี ROC คือ $|z|<|a|$
- การแปลงซีต้องถูกกำหนดด้วยนิพจน์พีชคณิตและ ROC
- โดยทั่วไปผลการแปลงซี $\Rightarrow$ ฟังก์ชันตรรกยะ $\Rightarrow$ $X(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$
- คำตอบของ $N(z)$ และ $D(z)$ ในระนาบ z $\Rightarrow$ ใช้อธิบายผลการแปลงซีได้
- คำตอบของ $N(z)$ แสดงด้วยสัญลักษณ์ "$\bigcirc$" เรียกว่าซีโร (zero) $\Rightarrow$ $X(z)=0$
- คำตอบของ $D(z)$ แสดงด้วยสัญลักษณ์ "$\times$" เรียกว่าโพล (pole) $\Rightarrow$ $X(z)=\infty$
- การแทน $X(z)$ โดยใช้โพลและซีโรในระนาบ z เรียกว่าแผนภาพโพลซีโรของ $X(z)$
- ผลการแปลงซี $X(z)$ กำหนดได้ 2 รูปแบบคือ การใช้นิพจน์พีชคณิตและบริเวณการลู่เข้า หรือ การใช้นิพจน์พีชคณิตและแผนภาพโพลซีโร

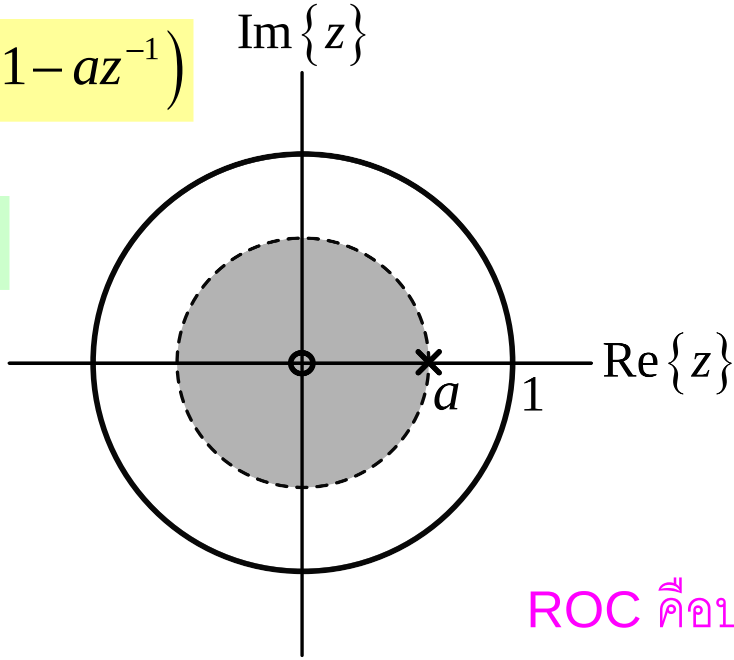
$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$



ROC คือ $|z| > |a|$

$X(z) = 1/\left(1-az^{-1}\right)$

$|a| \le 1$



ROC คือ $|z| < |a|$

ROC คือบริเวณที่แรเงาเป็นสีเทา

ถ้า $|a| > 1 \Rightarrow$ ROC **ไม่รวม**วงกลมหนึ่งหน่วย $\Rightarrow$ สัญญาณ $x[n] = a^n u[n]$ ไม่สามารถหา DtFT ได้แต่ยังคงหา ZT ของ $x[n]$ ได้

Example 3

จงหาผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n] = 7\,(1/3)^n u[n] - 6\,(1/2)^n u[n]$

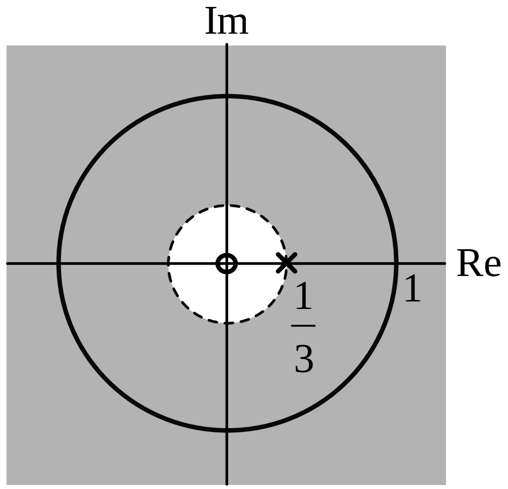
วิธีทำ ผลการแปลงซีของ $x[n]$ หาได้จาก

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}z^{-n} = 7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} - 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

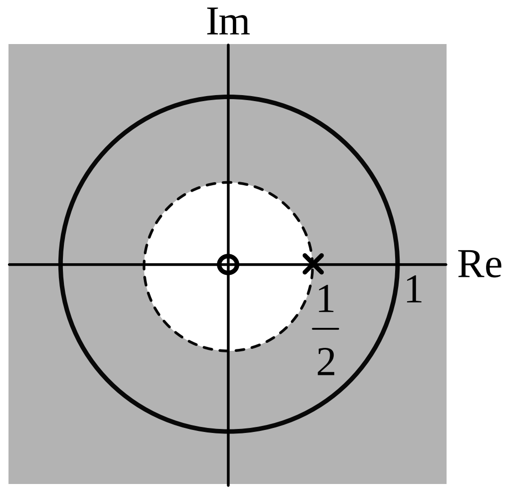
$$= 7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$= \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

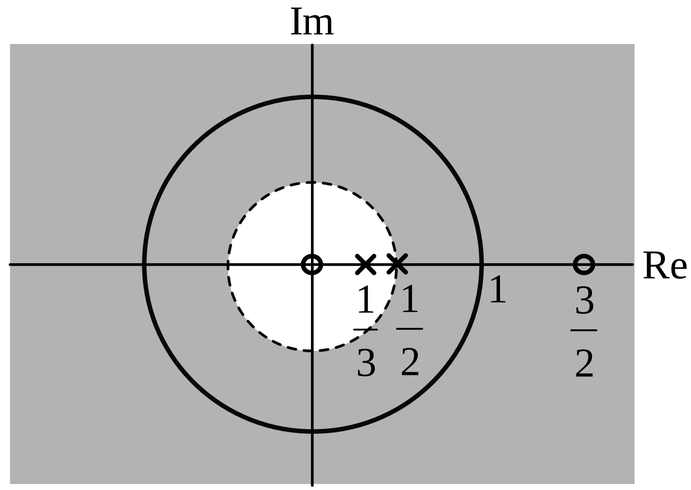
โดย $X(z)$ มีค่าลู่เข้า ก็ต่อเมื่อผลรวมของแต่ละพจน์ลู่เข้า นั่นคือเมื่อ $\left|(1/3)z^{-1}\right|<1$ และ $\left|(1/2)z^{-1}\right|<1$ ซึ่งจะได้ว่า $|z|>1/3$ และ $|z|>1/2$ ตามลำดับ $\Rightarrow$ ROC ของ $X(z)$ คือ $|z|>1/2$



$1/\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)$



$1/\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$



$7/\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)-6/\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$

นอกจากนี้ผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]$ ยังหาได้โดยอาศัยคุณสมบัติเชิงเส้น เนื่องจาก

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{3} \quad \text{และ} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{2}$$

ดังนั้นผลการแปลงซีของ $x[n]$ คือ $X(z)=\dfrac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\dfrac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|>\dfrac{1}{2}$

บริเวณการลู่เข้าของการแปลงซี

- สองสัญญาณที่ต่างกันสามารถมีนิพจน์พีชคณิตของผลการแปลงซีเหมือนกันได้ แต่มี ROC ต่างกัน
- คุณสมบัติที่สำคัญของ ROC

1. ROC มีลักษณะเป็นวงแหวนในระนาบ z ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด
2. ROC **ต้องไม่มีโพล**อยู่ภายใน
3. ถ้าสัญญาณ $x[n]$ มีช่วงเวลาจำกัด $\Rightarrow$ ROC คือบริเวณทั้งหมดของระนาบ z ซึ่งอาจรวม $z=0$ และ/หรือ $z=\infty$ หรือไม่ก็ได้
   - สมมติว่า $x[n]\neq 0$ สำหรับช่วง $N_1 \le n \le N_2$ $\Rightarrow$ $X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$ ซึ่งจะได้ว่า
     - ถ้า $N_1<0$ และ $N_2>0$ $\Rightarrow$ ROC ของ $X(z)$ ไม่รวมจุด $z=0$ และ $z=\infty$
     - ถ้า $N_1\ge 0$ และ $N_2>N_1$ $\Rightarrow$ ROC ของ $X(z)$ รวมจุด $z=\infty$
     - ถ้า $N_2\le 0$ และ $N_1<N_2$ $\Rightarrow$ ROC ของ $X(z)$ รวมจุด $z=0$

4. ถ้า $x[n]$ = สัญญาณ**ฝั่งขวา** และวงกลม $|z| = r_R$ อยู่ใน ROC $\Rightarrow$ ทุกค่า z ที่ $|z| > r_R$ อยู่ใน ROC
5. ถ้า $x[n]$ = สัญญาณ**ฝั่งซ้าย** และวงกลม $|z| = r_L$ อยู่ใน ROC $\Rightarrow$ ทุกค่า z ที่ $0 < |z| < r_L$ อยู่ใน ROC
6. ถ้า $x[n]$ เป็นสัญญาณ**สองฝั่ง** และถ้าวงกลม $|z| = r_0$ อยู่ใน ROC แล้ว $\Rightarrow$ ROC ประกอบด้วยวงแหวนในระนาบ z ที่รวมวงกลม $|z| = r_0$ นี้
7. ถ้า $X(z)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ
   - ROC ถูกจำกัดขอบเขตด้วยโพลหรือขยายไปถึงค่าอนันต์
   - ถ้า $x[n]$ เป็นสัญญาณฝั่งขวา $\Rightarrow$ ROC คือบริเวณ**ด้านนอก**ของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับโพลของ $X(z)$ ที่มีค่ามากสุด นอกจากนี้ถ้า $x[n]$ เป็นสัญญาณคอซอลแล้ว ROC จะรวมจุด $z = \infty$
   - ถ้า $x[n]$ เป็นสัญญาณฝั่งซ้าย $\Rightarrow$ ROC คือบริเวณ**ด้านใน**ของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับโพลของ $X(z)$ ที่มีขนาดน้อยสุด นอกจากนี้ถ้า $x[n]$ เป็นสัญญาณแอนไทคอซอลแล้ว ROC จะรวมจุด $z = 0$

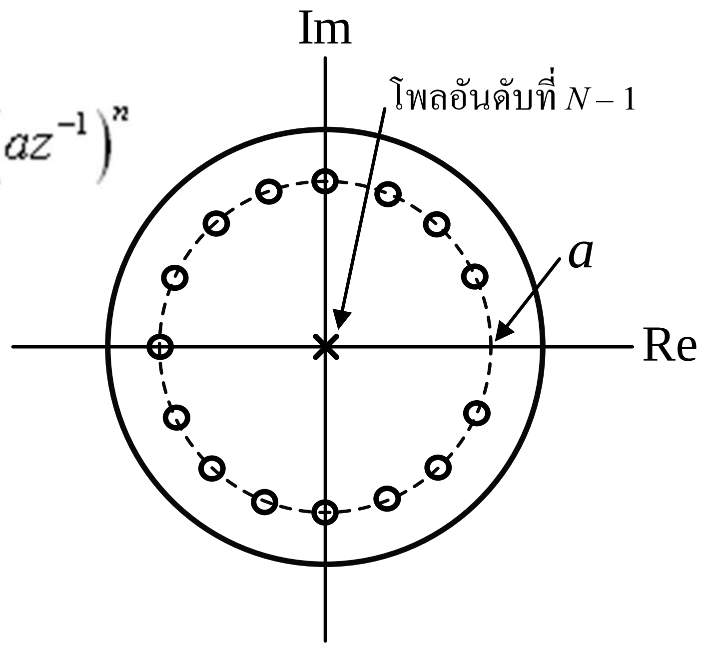
Example 4

จงหาผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]=\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ เมื่อ $a>0$

วิธีทำ ผลการแปลงซีของ $x[n]$ หาได้จาก $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(az^{-1}\right)^n$

อาศัยความสัมพันธ์ $\sum_{n=0}^{L} r^n = \frac{1-r^{L+1}}{1-r}$ ดังนั้นจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$X(z)=\frac{1-\left(az^{-1}\right)^N}{1-az^{-1}}=\frac{1}{z^{N-1}}\left(\frac{z^N-a^N}{z-a}\right)$$



โดย ROC ของ $X(z)$ คือบริเวณทั้งหมดในระนาบ z ยกเว้นที่จุด $z=0$ (คุณสมบัติข้อที่ 3 ของ ROC)

$\Rightarrow X(z)$ มีโพลอันดับ $N-1$ ที่จุด $z=0$ และโพลอันดับหนึ่งที่จุด $z=a$

$\Rightarrow X(z)$ มีซีโรจำนวน N ตัวที่จุด $z=ae^{j(2\pi k/N)}$ สำหรับ $k=0,1,\ldots,N-1$ โดยซีโรที่จุด $z=a$ หักล้างกับโพลที่จุด $z=a$

Exercise 1

จงหาผลการแปลงซีของสัญญาณ $x[n]=b^{|n|}$ สำหรับ $b>0$

วิธีทำ $x[n]$ เป็นสัญญาณสองฝั่ง $\Rightarrow$ เขียนในรูปผลรวมของสัญญาณฝั่งซ้ายและสัญญาณฝั่งขวาได้คือ $x[n]=b^{n}u[n]+b^{-n}u[-n-1]$

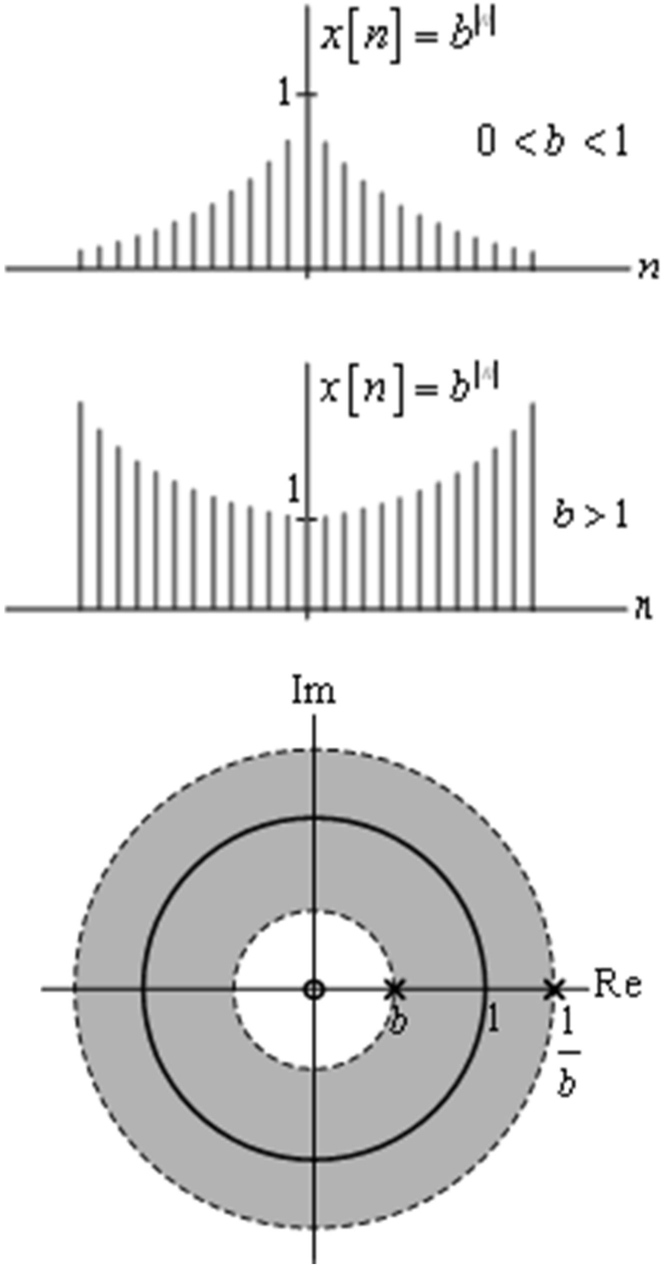
เนื่องจาก $b^{n}u[n]\xleftrightarrow{z}\frac{1}{1-bz^{-1}},\quad |z|>|b|$

$$b^{-n}u[-n-1]\xleftrightarrow{z}-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}},\quad |z|<\left|\frac{1}{b}\right|$$

ดังนั้นผลการแปลงซีของ $x[n]$ คือ

$$X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}$$

$$=\frac{b^{2}-1}{b}\frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})},\quad b<|z|<\frac{1}{b}$$



การแปลงซีผกผัน

$$X(z)\big|_{z=re^{j\omega}} = X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{x[n]r^{-n}\right\}e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}$$

ผลการแปลงซีผกผัน $\Rightarrow$ อาศัยการแปลงฟูเรียร์ผกผัน นั่นคือ

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\left\{X\left(re^{j\omega}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(re^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

คูณทั้งสองข้างด้วย r^n $\Rightarrow$ $x[n] = r^n\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(re^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(re^{j\omega}\right)\left(re^{j\omega}\right)^n d\omega$

เปลี่ยนตัวแปรจาก ω เป็น z โดยใช้ $z = re^{j\omega}$ เมื่อ r มีค่าคงที่ $\Rightarrow$ $dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega$ หรือ $d\omega = (1/j)z^{-1}dz$ และการหาปริพันธ์ในช่วง 2π ของ ω จะเปลี่ยนเป็นการหาปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบของวงกลม $|z| = r$ ดังนั้น

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

เมื่อ $\oint$ หมายถึงการหาปริพันธ์รอบตามเส้นรอบขอบในทิศทาง**ทวนเข็มนาฬิกา**ของวงกลมปิดที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและมีรัศมี r โดย r = ค่าใดๆ ภายใน ROC ที่ทำให้ $X(z)$ มีค่าลู่เข้า

- โดยทั่วไปการหาปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบโดยตรงค่อนข้างซับซ้อน
- ในกรณีที่ $X(z)$ อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรรกยะ การหาผลการแปลงซีผกผันจะเริ่มจากการใช้เทคนิคการกระจายเศษส่วนย่อยเพื่อจัดรูปของ $X(z)$ ให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้น

$$X(z)=\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{A_i}{1-a_i z^{-1}}\right\}$$

แล้วจึงหาผลการแปลงซีผกผันของแต่ละพจน์ $A_i/\left(1-a_i z^{-1}\right)$ ตาม ROC ที่กำหนดมาให้ กล่าวคือ

- ถ้า ROC คือบริเวณ $|z|>a_i \Rightarrow$ ผลการแปลงซีผกผันคือ $A_i a_i^n u[n]$
- ถ้า ROC คือบริเวณ $|z|<a_i \Rightarrow$ ผลการแปลงซีผกผันคือ $-A_i a_i^n u[-n-1]$

- สัญญาณ $x[n]$ มีค่าเท่ากับผลรวมเชิงเส้นของผลการแปลงซีผกผันของแต่ละพจน์ $A_i/\left(1-a_i z^{-1}\right)$
- ใช้สัญลักษณ์ $x[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$

Example 5

จงหาผลการแปลงซีผกผันของ $X(z) = \dfrac{2+z^{-1}}{\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$ เมื่อ ROC คือบริเวณที่

ก) $|z| > \frac{3}{2}$ ข) $|z| < \frac{1}{2}$ ค) $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$

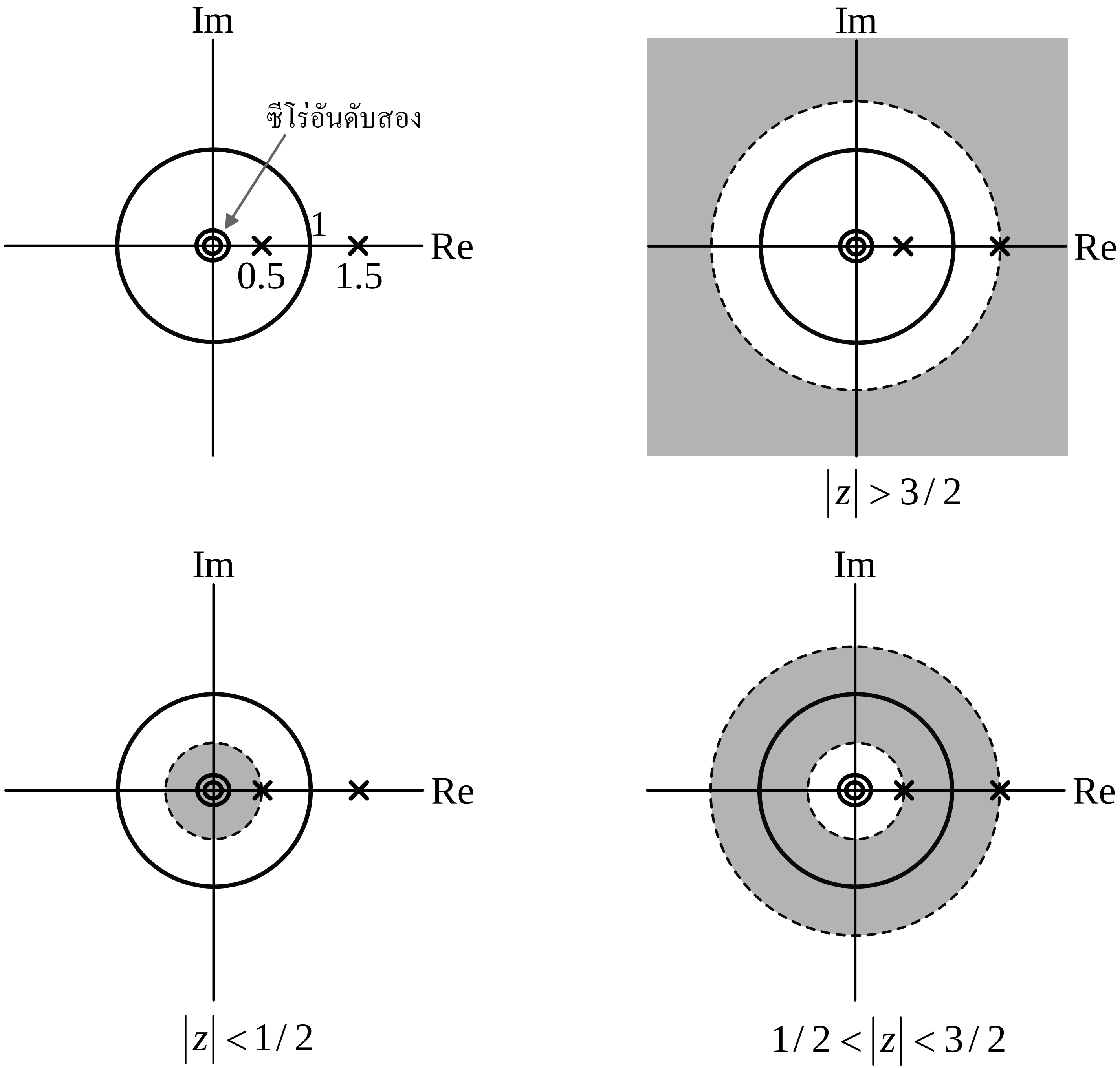
วิธีทำ อาศัยเทคนิคการกระจายเศษส่วนย่อยจะได้ว่า $X(z) = \dfrac{4}{1-\frac{3}{2}z^{-1}} - \dfrac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

ก) เมื่อ ROC คือบริเวณที่ $|z| > \frac{3}{2} \Rightarrow$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

ดังนั้นผลการแปลงซีผกผันของ $X(z)$ คือ $x[n] = \left\{4\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n]$



ผลการแปลงซีผกผันให้ผลลัพธ์ต่างกัน โดยขึ้นอยู่กับ ROC ที่กำหนดมาให้

ข) เมื่อ ROC คือบริเวณที่ $|z|<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $-\left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}}, \quad |z|<\frac{3}{2}$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|<\frac{1}{2}$$

ดังนั้นผลการแปลงซีผกผันของ $X(z)$ คือ $x[n]=\left\{-4\left(\frac{3}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[-n-1]$

ค) เมื่อ ROC คือบริเวณที่ $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{2}$

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z|<\frac{3}{2}$$

ดังนั้นผลการแปลงซีผกผันของ $X(z)$ คือ $x[n]=-4\left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1]-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

คุณสมบัติการแปลงซี

- คู่ ZT $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z),\ \text{ROC} = R = R_1$ $y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z),\ \text{ROC} = R_2$
- คุณสมบัติเชิงเส้น $ax[n]+by[n] \xleftrightarrow{Z} aX(z)+bY(z),\ \text{ROC} = R_1 \cap R_2$
- คุณสมบัติการเลื่อนเวลา $x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z),\ \text{ROC} = R$

อาจมีการเพิ่มหรือลด ROC ที่จุด $z=0$ หรือ $z=\infty$ ก็ได้ เนื่องจากการคูณ $X(z)$ ด้วย z^{-n_0} โดย

- ถ้า $n_0>0 \Rightarrow$ เกิดโพลที่จุด $z=0$ ซึ่งอาจทำให้เกิดการหักล้างกับซีโรของ $X(z)$ ที่จุด $z=0$ ก็ได้ ดังนั้น $z=0$ อาจเป็นโพลของ $z^{-n_0}X(z)$ แต่อาจไม่เป็นโพลของ $X(z)$ ซึ่งในกรณีนี้ ROC ของ $z^{-n_0}X(z)$ คือ ROC ของ $X(z)$ ที่ไม่รวมจุด $z=0$
- ถ้า $n_0<0 \Rightarrow$ เกิดซีโรที่จุด $z=0$ ซึ่งอาจทำให้เกิดการหักล้างกับโพลของ $X(z)$ ที่จุด $z=0$ ก็ได้ ดังนั้น $z=0$ อาจเป็นซีโรของ $z^{-n_0}X(z)$ แต่อาจไม่เป็นซีโรของ $X(z)$ ในกรณีนี้ $z=\infty$ จะเป็นโพลของ $z^{-n_0}X(z)$ ซึ่งจะได้ว่า ROC ของ $z^{-n_0}X(z)$ คือ ROC ของ $X(z)$ ที่ไม่รวมจุด $z=\infty$

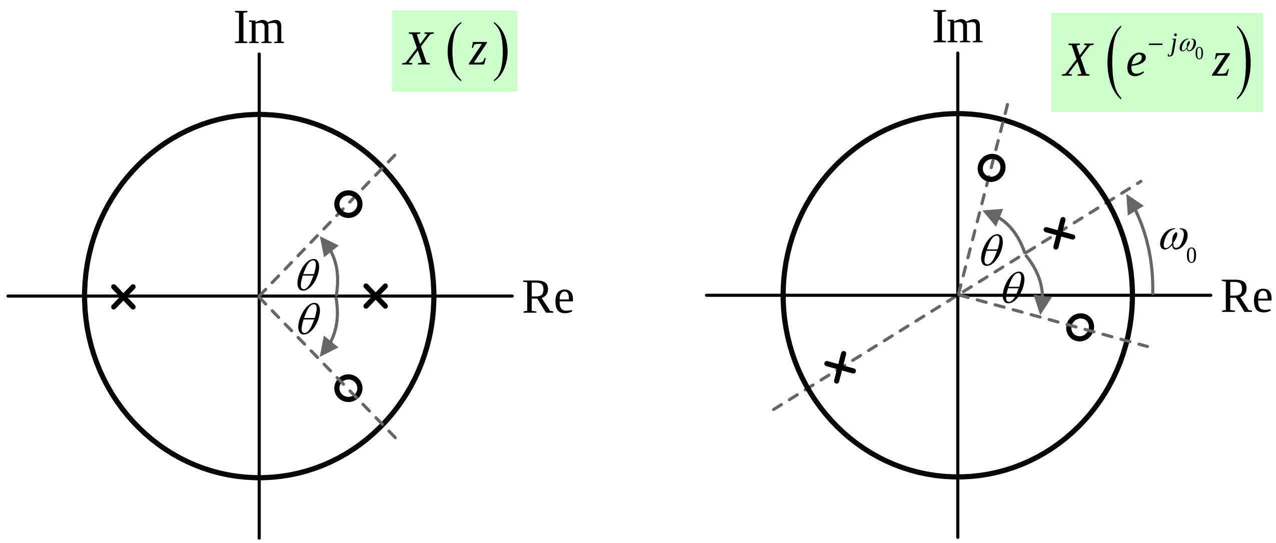
$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad \text{ROC} = R$

❑ คุณสมบัติการสเกลในโดเมน z

$$\alpha^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{\alpha}\right), \quad \text{ROC} = |\alpha| R$$

ในกรณีที่ $\alpha = e^{j\omega_0}$ จะได้ $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(e^{-j\omega_0} z\right)$, $\text{ROC} = |\alpha| R = R$

$\Rightarrow$ การคูณ $x[n]$ ด้วย $e^{j\omega_0 n}$ มีผลทำให้โพลและซีโรในระนาบ z เกิดการหมุนเป็นมุม ω_0 เช่นถ้า $X(z) = 1/\left(1 - az^{-1}\right)$ แสดงว่ามีโพลอยู่ที่จุด $z = a$ ดังนั้น $X\left(e^{-j\omega_0} z\right) = 1/\left(1 - ae^{j\omega_0} z^{-1}\right)$ จะมีโพลอยู่ที่จุด $z = ae^{j\omega_0}$



$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad \text{ROC} = R$$

- คุณสมบัติการพับทางเวลา $x[-n] \xleftrightarrow{z} X(1/z), \ \text{ROC} = 1/R$
- คุณสมบัติการสังยุค $x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*), \ \text{ROC} = R$
- คุณสมบัติการทำคอนโวลูชัน $x[n] * y[n] \xleftrightarrow{z} X(z)Y(z), \ \text{ROC} = R_1 \cap R_2$
- คุณสมบัติการหาอนุพันธ์ในโดเมน z $nx[n] \xleftrightarrow{z} -z\dfrac{dX(z)}{dz}, \ \text{ROC} = R$
- ทฤษฎีบทค่าเริ่มต้น $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$, ROC $= R$

❑ คุณสมบัติการขยายเวลา

$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)Y(s)$, ROC $= R_1 \cap R_2$

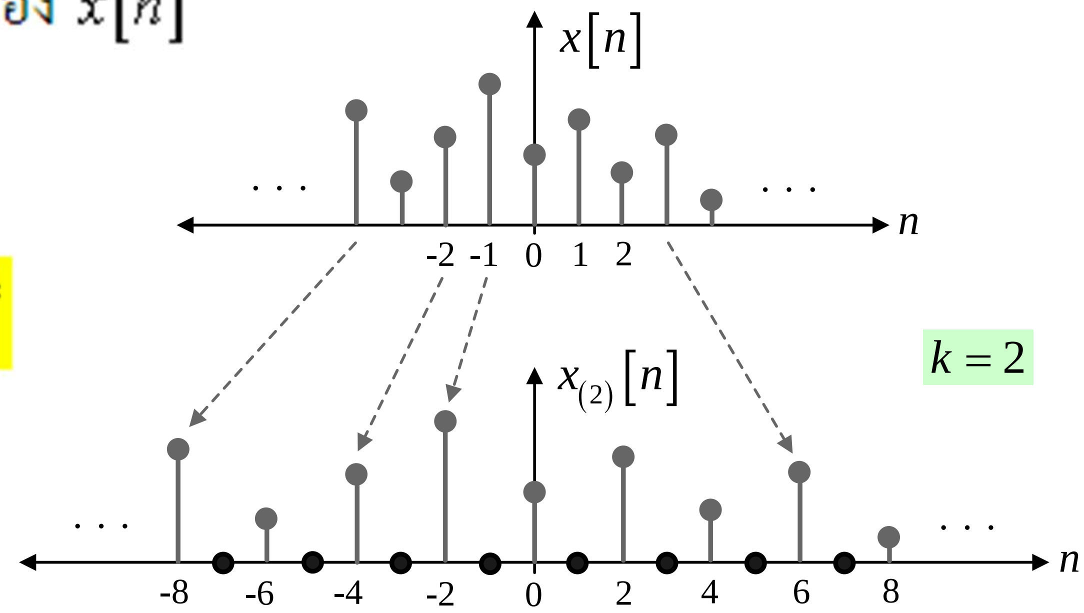
การขยายเวลา (time expansion) ของสัญญาณ $x[n]$ นิยามโดย

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k \end{cases}$$

เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็มบวก หมายถึงการใส่ค่าศูนย์จำนวน $k-1$ ตัวเข้าไปประหว่างแซมเปิลที่อยู่ติดกันของ $x[n]$

ดังนั้น $x_{(k)}[n]$ มีคู่การแปลงซีคือ

$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k)$, ROC $= R^{1/k}$



Example 6

จงหาผลการแปลงซีผกผันของ $X(z) = \log\left(1 + bz^{-1}\right)$, $|z| > |b|$ โดยอาศัยคุณสมบัติการหาอนุพันธ์ในโดเมน z

วิธีทำ เนื่องจาก

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{bz^{-1}}{1+bz^{-1}}, \quad |z| > |b| \qquad \textbf{(1)}$$

$$b(-b)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{b}{1+bz^{-1}}, \quad |z| > |b|$$

อาศัยคุณสมบัติการเลื่อนทางเวลาจะได้ $b(-b)^{n-1}u[n-1] \xleftrightarrow{z} \left(\frac{b}{1+bz^{-1}}\right)z^{-1}, \quad |z| > |b|$ **(2)**

เปรียบเทียบสมการ (1) และ (10.65) จะได้ $nx[n] = b(-b)^{n-1}u[n-1]$

นั่นคือผลการแปลงซีผกผันของ $X(z)$ คือ $x[n] = -\frac{(-b)^n}{n}u[n-1]$

Exercise 2

จงหาค่าเริ่มต้น $x[0]$ ของสัญญาณ $x[n] = 7\,(1/3)^n u[n] - 6(1/2)^n u[n]$

วิธีทำ จาก **Example 3** สัญญาณ $x[n]$ มีคู่การแปลงซีคือ

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

ค่าเริ่มต้นของสัญญาณ $x[n]$ หาได้โดยการแทนค่า $n = 0$ ลงใน $x[n]$ ซึ่งจะได้

$$x[0] = \left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^0 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^0\right\}u[0] = 7 - 6 = 1$$

หรือหาได้จากทฤษฎีบทค่าเริ่มต้น นั่นคือ $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = 7 - 6 = 1$

สัญญาณ $x(t)$	ผลการแปลงซี $X(s)$	บริเวณการลู่เข้า (ROC)
$\delta[n]$	1	ทุกค่า z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	ทุกค่า z ยกเว้น 0 (ถ้า $m > 0$) หรือ ∞ (ถ้า $m < 0$)
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$

สัญญาณ $x(t)$	ผลการแปลงซี $X(s)$	บริเวณการลู่เข้า (ROC)
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\sin(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

การวิเคราะห์ระบบ LTI

ถ้าให้ $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, $h[n] \xleftrightarrow{z} H(z)$, และ $y[n] \xleftrightarrow{z} Y(z)$ คือคู่การแปลงซีของสัญญาณอินพุต ผลตอบสนองอิมพัลส์ และสัญญาณเอาต์พุต ของระบบ LTI ตามลำดับ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนนิยามโดย

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

นอกจากนี้ถ้า ROC ของ $H(z)$ อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย $z = e^{j\omega}$ $\Rightarrow$ $H(z)$ มีค่าเท่ากับผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบ LTI $\Rightarrow$ $H(z)$ ใช้ในการอธิบายคุณสมบัติต่างๆ ของระบบ LTI ได้

คอซอลิตี

ระบบ LTI แบบคอซอล $\Rightarrow$ ระบบที่ผลตอบสนองอิมพัลส์ $h[n] = 0$ สำหรับ $n < 0$ (สัญญาณฝั่งขวา)

โดย $H(z)$ จะอยู่ในรูปของ

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

LTI เป็นระบบคอซอล ก็ต่อเมื่อ ROC ของ $H(z)$ อยู่ภายนอกวงกลมซึ่งรวมบริเวณที่จุด $z = \infty$ ด้วย

ถ้า $H(z)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะแล้ว $\Rightarrow$ LTI เป็นระบบคอซอล ก็ต่อเมื่อ

1) ROC ของ $H(z)$ อยู่ภายนอกวงกลมของโพลที่อยู่ด้านนอกสุด

2) ระดับขั้นของพหุนามตัวเศษต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับระดับขั้นของพหุนามตัวส่วน

Example 7

จงพิจารณาว่าระบบที่มีฟังก์ชันถ่ายโอน $H(z)$ ต่อไปนี้ เป็นระบบคอซอลหรือไม่

ก) $H(z) = \dfrac{z^3 - 3z^2 + 2}{z^2 + 2z - 1}$

ข) $H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \dfrac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad |z| > 3$

วิธีทำ

ก) ระบบนี้ไม่เป็นระบบคอซอล $\Rightarrow$ ระดับขั้นของพหุนามตัวเศษ (ค่า 3) > ของพหุนามตัวส่วน (ค่า 2)

ข) การพิจารณาว่าเป็นระบบคอซอลหรือไม่ของ $H(z)$ ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรรกยะ ต้องพิจารณาจากระดับขั้นของพหุนามตัวเศษและของพหุนามตัวส่วน นั่นคือ

$$H(z)=\frac{2-\frac{10}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}\right)}=\frac{2-\frac{10}{3}z^{-1}}{1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2z^{2}-\frac{10}{3}z}{z^{2}-\frac{10}{3}z+1}$$

$\Rightarrow$ ระดับขั้นของพหุนามตัวเศษและของพหุนามตัวส่วนมีค่าเท่ากัน (เท่ากับค่า 2) $\Rightarrow$ ระบบคอซอล

- ความเป็นคอซอลิตี $\Rightarrow$ ยังพิจารณาได้จากผลตอบสนองอิมพัลส์ $h[n]$ $\Rightarrow$ ผลการแปลงซีผกผันของ $H(z)$ คือ

$$h[n]=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+3^{n}\right\}u[n]$$

เนื่องจาก $h[n]=0$ สำหรับ $n<0$ แสดงว่าระบบนี้เป็นระบบคอซอล

ความเสถียร

- ระบบ LTI มีความเสถียร ก็ต่อเมื่อ $h[n]$ หาปริพันธ์ได้อย่างสัมบูรณ์
- นอกจากนี้ความเสถียรของระบบยังสามารถพิจารณาได้จากฟังก์ชันถ่ายโอน $H(z)$ กล่าวคือระบบ LTI มีความเสถียร ก็ต่อเมื่อ ROC ของ $H(z)$ รวมเส้นรอบขอบของวงกลมหนึ่งหน่วย
- สำหรับระบบ LTI แบบคอซอล (ROC อยู่ภายนอกวงกลมของโพลที่อยู่ด้านนอกสุด) ที่มี $H(z)$ ในรูปของฟังก์ชันตรรกยะ $\Rightarrow$ ระบบมีความเสถียร ก็ต่อเมื่อทุกโพลของ $H(z)$ อยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วย

Exercise 3

จงพิจารณาว่าระบบ LTI ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอน $H(z)$ ต่อไปนี้ เป็นระบบเสถียรหรือไม่

ก) $H(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$

ข) $H(z)=\dfrac{1}{1-2r\cos(\theta)z^{-1}+r^{2}z^{-2}}=\dfrac{z^{2}}{\left(z-re^{j\theta}\right)\left(z-re^{-j\theta}\right)}, \quad |z|>|r|$

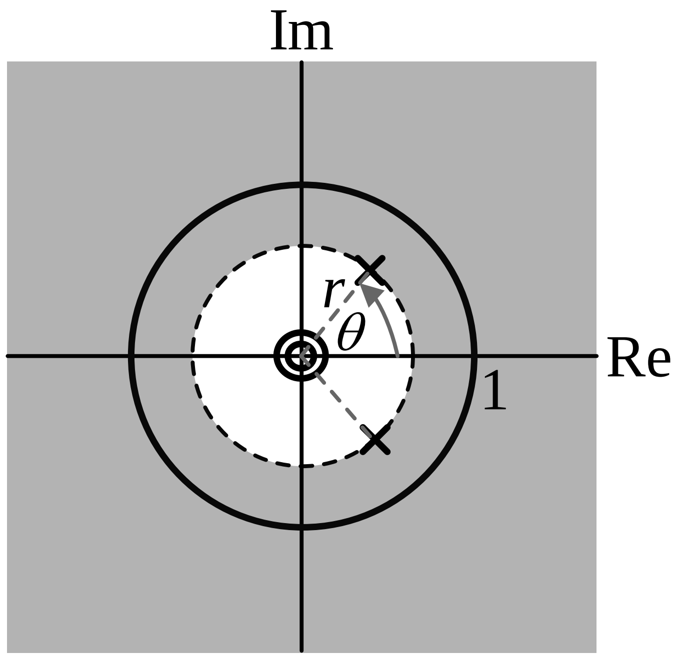
วิธีทำ

ก) $H(z)$ มีโพลอยู่ที่ $z=a \Rightarrow$ ระบบมีความเสถียร เมื่อ $|a|<1 \Rightarrow h[n]=a^{n}u[n]$

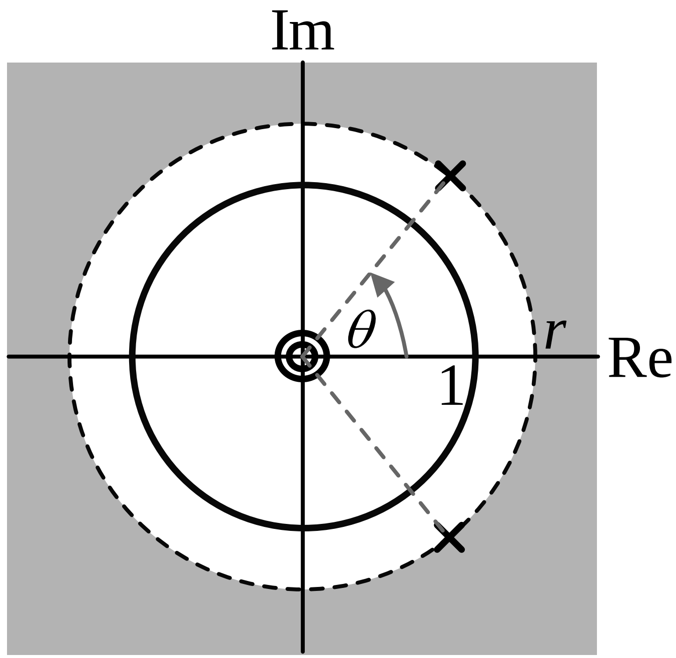
หาปริพันธ์ได้อย่างสัมบูรณ์

ข) $H(z)$ มี 2 โพลอยู่ที่จุด $z = re^{j\theta}$ และ $z = re^{-j\theta}$

- ถ้า $r < 1 \Rightarrow$ โพลอยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วย และ ROC รวมเส้นรอบขอบของวงกลมหนึ่งหน่วย $\Rightarrow$ เป็นระบบเสถียร
- ถ้า $r > 1 \Rightarrow$ โพลอยู่ภายนอกวงกลมหนึ่งหน่วย และ ROC ไม่รวมเส้นรอบขอบของวงกลมหนึ่งหน่วย $\Rightarrow$ ไม่เป็นระบบเสถียร



$r < 1$



$r > 1$

ระบบตามสมการเชิงผลต่างที่มีค่าสัมประสิทธิ์คงตัวแบบเชิงเส้น

- สมการเชิงผลต่างอันดับ N $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

- ฟังก์ชันถ่ายโอน $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$ $y[n] \xleftrightarrow{z} Y(z)$

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{Z}\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{Z}\{x[n-k]\}$$

$$\Downarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \Leftarrow \left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z)$$

ซีโร $\Rightarrow$ คำตอบของ $\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = 0$ โพล $\Rightarrow$ คำตอบของ $\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0$

Example 8

พิจารณาระบบ LTI แบบคอซอลที่ถูกกำหนดโดย $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$

ก) จงหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบนี้

ข) จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ เมื่อสัญญาณอินพุตคือ $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

วิธีทำ

ก) หาผลการแปลงซีทั้งสองข้าง $\Rightarrow Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{4}z^{-2}Y(z)=X(z)$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{z^2}{\left(z-\left(\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)}$$

ซึ่งมีโพลอยู่ที่จุด $z=(1/4)\pm j\left(\sqrt{3}/4\right)$ และเนื่องจากระบบเป็นระบบคอซอล ดังนั้น ROC ของ $H(z)$ คือ $|z|>\left|(1/4)+j\left(\sqrt{3}/4\right)\right|=1/2$

ข) เนื่องจาก $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ มีผลการแปลงซีคือ $X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z|>\frac{1}{2}$

สัญญาณเอาต์พุตในโดเมนซี $\Rightarrow$ $Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$

โดย ROC คือบริเวณส่วนร่วมระหว่าง ROC ของ $X(z)$ และ $H(z)$ $\Rightarrow$ ROC ของ $Y(z)$ มีค่าเท่ากับ $|z|>1/2$ จัดรูปสมการ $Y(z)$ โดยอาศัยการกระจายเศษส่วนย่อย

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{(1/2)z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ คือผลการแปลงซีผกผันของ $Y(z)$ มีค่าเท่ากับ

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)u[n]$$

Exercise 4

จงหาผลการแปลงซีผกผันของ $X(z) = \dfrac{2z^2 + z}{z-3}$

วิธีทำ จัดรูปสมการ (10.90) ใหม่ให้มีระดับขั้นของพหุนามตัวเศษน้อยกว่าของพหุนามตัวส่วนก่อนหาผลการแปลงซีผกผันนี้

$$X(z) = \frac{2z^2 + z}{z-3} = A + Bz + \frac{C}{z-3} = \frac{Bz^2 + (A-3B)z + (C-3A)}{z-3}$$

เปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ จะได้ $A = 7$, $B = 2$ และ $C = 21$ นั่นคือ

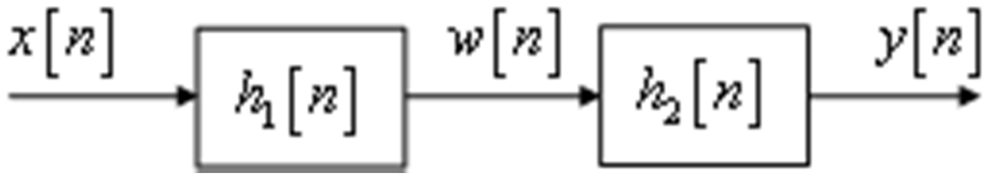
$$X(z) = 7 + 2z + \frac{21}{z-3}$$

ดังนั้นผลการแปลงซีผกผันของ $X(z)$ คือ

$$x[n] = z^{-1}\{X(z)\} = 7\delta[n] + 2\delta[n+1] + 21(3)^{n-1}u[n-1]$$

ความสัมพันธ์ - ฟังก์ชันถ่ายโอนและแผนภาพบล็อก

การต่อกันของระบบแบบอนุกรม



สัญญาณเอาต์พุตของระบบ $h_1[n]$ คือ $w[n]=x[n]*h_1[n]$

สัญญาณเอาต์พุตของระบบ $h_2[n]$ คือ $y[n]=w[n]*h_2[n]$

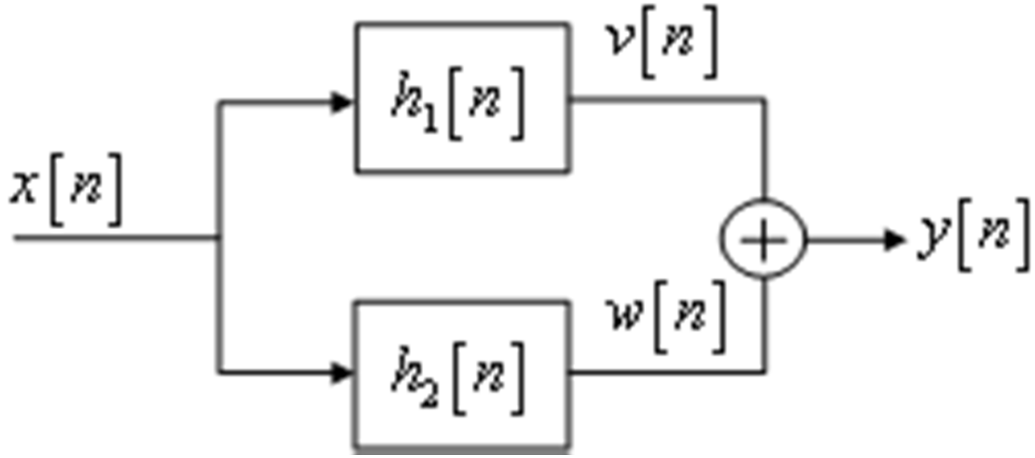
แทนค่า $w[n]$ จะได้ $y[n]=\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]$

หาผลการแปลงซี $Y(z)=X(z)H_1(z)H_2(z)$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

$$\boxed{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=H_1(z)H_2(z)}$$

การต่อกันของระบบแบบขนาน

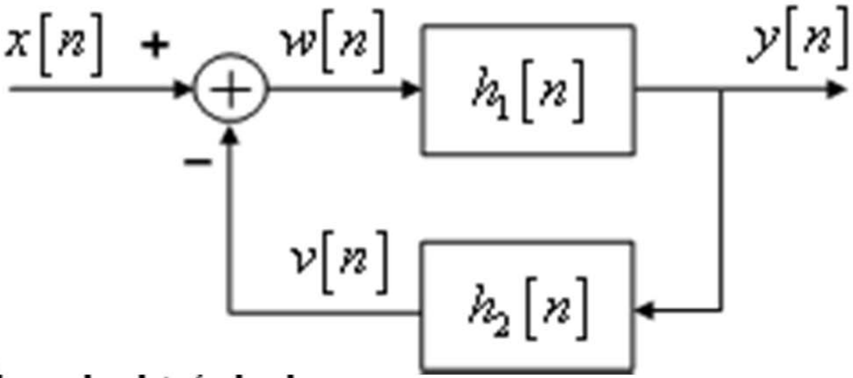


สัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ คือ $$y[n]=v[n]+w[n]=\{x[n]*h_1[n]\}+\{x[n]*h_2[n]\}$$

ผลการแปลงซี $$Y(z)=X(z)H_1(z)+X(z)H_2(z)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ $$\boxed{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=H_1(z)+H_2(z)}$$

การต่อกันของระบบแบบป้อนกลับ



สัญญาณอินพุตของระบบ $h_1[n]$ คือ $w[n] = x[n] - v[n]$

สัญญาณเอาต์พุตของระบบ $h_1[n]$ คือ

$$y[n] = w[n] * h_1[n] = \{x[n] - v[n]\} * h_1[n] = x[n] * h_1[n] - v[n] * h_1[n]$$

สัญญาณเอาต์พุตของระบบ $h_2[n]$ คือ $v[n] = y[n] * h_2[n]$

แทนค่า $v[n]$ จะได้

$$y[n] = x[n] * h_1[n] - \{y[n] * h_2[n]\} * h_1[n]$$

$$\{1 + h_1[n] * h_2[n]\} y[n] = x[n] * h_1[n]$$

ผลการแปลงซี

$$\{1 + H_1(z) H_2(z)\} Y(z) = H_1(z) X(z)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ

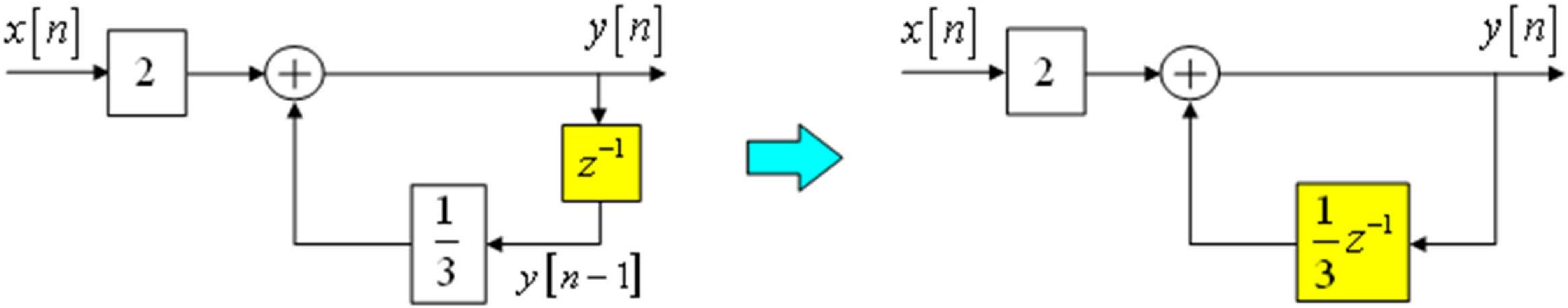
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z) H_2(z)}$$

Example 9

จงแสดงแผนภาพบล็อกของระบบคอซอลที่มีฟังก์ชันถ่ายโอน $H(z) = \dfrac{2}{1-(1/3)z^{-1}}$

วิธีทำ ฟังก์ชันถ่ายโอนนี้ถูกกำหนดด้วยสมการเชิงผลต่างคือ $y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = 2x[n]$

ถ้าสมมติว่าระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขการพักเริ่มต้น $\Rightarrow$ แผนภาพบล็อกของระบบในโดเมน z



การแปลงซีแบบด้านเดียว

- การแปลงซีแบบด้านเดียว (unilateral ZT) มีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์ระบบ LTI แบบคอซอลที่ถูกกำหนดด้วยสมการเชิงผลต่างที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นไม่เป็นค่าศูนย์
- นิยามโดย

$$\mathcal{X}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

โดยช่วงล่างของการหาปริพันธ์ 0^- หมายถึงให้รวมค่าศูนย์ในการหาปริพันธ์

$$\mathcal{X}(z) = \mathcal{UZ}\{x[n]\} \qquad x[n] = \mathcal{UZ}^{-1}\{\mathcal{X}(z)\} \qquad x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{UZ}} \mathcal{X}(z)$$

❑ สูตรการแปลงซี**แบบสองด้าน** $X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

- ช่วงของการหาผลรวมของการแปลงซีแบบสองด้านคือ $-\infty \le n \le \infty$
- ช่วงของการหาผลรวมของการแปลงซีแบบด้านเดียวคือ $0 \le n \le \infty$
- สองสัญญาณที่มีค่าต่างกันสำหรับ $n < 0$ และมีค่าเท่ากันสำหรับ $n \ge 0$ จะมีผลการแปลงซีแบบสองด้านต่างกัน แต่มีผลการแปลงซีแบบด้านเดียวเหมือนกัน
- สัญญาณฝั่งขวา $\Rightarrow$ มีผลการแปลงซีแบบสองด้านและด้านเดียวเหมือนกัน

Example 10

จงหาผลการแปลงซีแบบสองด้านและแบบด้านเดียวของสัญญาณ $x[n] = a^{n+1}u[n+1]$

วิธีทำ เนื่องจาก $x[-1] = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ผลการแปลงซีแบบสองด้านและแบบด้านเดียวแตกต่างกัน

การแปลงซีแบบสองด้าน $\Rightarrow$ $$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \frac{z}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

การแปลงซีแบบด้านเดียว $\Rightarrow$ $$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}z^{-n} = a\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^{n}$$

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$ ดังนั้นจะได้ $X(z) = \dfrac{a}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$

Exercise 5

จงหาผลการแปลงซีแบบด้านเดียวผกผันของ

$$X(z)=\frac{5-2z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

วิธีทำ การหาผลการแปลงซีแบบด้านเดียวผกผันจะเหมือนกับการหาผลการแปลงซีแบบสองด้านผกผัน โดยให้พิจารณาว่า ROC อยู่ภายนอกวงกลมของโพลที่อยู่ด้านนอกสุดของระนาบ z เสมอ

ในที่นี้ ROC ของ $X(z)$ คือ $|z|>1/2$ ดังนั้นผลการแปลงซีแบบด้านเดียวผกผันของ $X(z)$ คือ

$$x[n]=\mathcal{U}z^{-1}\{X(s)\}=\left\{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}u[n],$$ สำหรับ $n\geq 0$

คุณสมบัติของการแปลงซีแบบด้านเดียว

คุณสมบัติ	สัญญาณ	ผลการแปลงซี
1. ความเป็นเชิงเส้น	$ax[n]+by[n]$	$aX(z)+bY(z)$
2. การหน่วงเวลาหนึ่งหน่วย	$x[n-1]$	$z^{-1}X(z)+x[-1]$
3. การล่วงหน้าเวลาหนึ่งหน่วย	$x[n+1]$	$zX(z)-zx[0]$
4. การสเกลในโดเมน z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$
	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X\left(e^{-j\omega_0}z\right)$
	$\alpha^n x[n]$	$X\left(\alpha^{-1}z\right)$
5. การขยายทางเวลา	$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[r], & n=rk \\ 0, & n\neq rk \end{cases}$ เมื่อ r เป็นเลขจำนวนเต็ม	$X\left(z^k\right)$

คุณสมบัติ	สัญญาณ	ผลการแปลงซี
6. การสังยุค	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$
7. การทำคอนโวลูชัน	ถ้าสัญญาณ $x[n]=y[n]=0$ สำหรับ $n<0$ ดังนั้น $x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$
8. อนุพันธ์ในโดเมน z	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$
9. ผลต่างอันดับหนึ่ง	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)-x[-1]$
10. ผลสะสม	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$
11. ทฤษฎีบทค่าเริ่มต้น	ถ้า $x[n]=0$ สำหรับ $n<0$ แล้ว $x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$	

Example 11

จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบที่ถูกกำหนดด้วย $y[n]+3y[n-1]=x[n]$ โดยสัญญาณอินพุตคือ $x[n]=\alpha u[n]$ และ α คือค่าคงตัวใดๆ เมื่อ

ก) ระบบมีเงื่อนไขการพักเริ่มต้น นั่นคือ $y[n]=0$ สำหรับ $n<0$

ข) ระบบมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y[-1]=\beta$

วิธีทำ

ก) สำหรับระบบที่มีเงื่อนไขการพักเริ่มต้น $\Rightarrow$ $\quad Y(z)+3z^{-1}Y(z)=X(z)$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ $\quad \mathcal{H}(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1}{1+3z^{-1}}$

ผลการแปลงซีแบบด้านเดียวของ $x[n]$ คือ $\quad X(z)=\dfrac{\alpha}{1-z^{-1}}$

สัญญาณเอาต์พุต $\Rightarrow \mathcal{Y}(z) = \mathcal{X}(z)\mathcal{H}(z) = \left(\frac{\alpha}{1-z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1+3z^{-1}}\right) = \frac{(1/4)\alpha}{1-z^{-1}} + \frac{(3/4)\alpha}{1+3z^{-1}}$

สัญญาณเอาต์พุตในโดเมนเวลาหาได้จากผลการแปลงซีแบบด้านเดียวผกผัน เมื่อ ROC คือ $|z| > |-3|$

(หรือ $|z| > 3$) $\Rightarrow y[n] = \mathcal{UZ}^{-1}\{\mathcal{Y}(z)\} = \alpha\left\{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-3)^n\right\}u[n]$

ข) สำหรับระบบที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น $\Rightarrow \mathcal{Y}(z) + 3\{z^{-1}\mathcal{Y}(z) + y[-1]\} = \mathcal{X}(z)$

แทนค่า $y[-1] = \beta$ และ $\mathcal{X}(z) = \frac{\alpha}{1-z^{-1}} \Rightarrow \mathcal{Y}(z) = -\frac{3\beta}{1+3z^{-1}} + \frac{\alpha}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}$

ถ้าให้ $\beta = 1$ และ $\alpha = 8$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $\Rightarrow \mathcal{Y}(z) = -\frac{3}{1+3z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}}$

สัญญาณเอาต์พุตในโดเมนเวลาหาได้จากผลการแปลงซีแบบด้านเดียวผกผัน เมื่อ ROC คือ $|z| > |-3|$

(หรือ $|z| > 3$) $\Rightarrow y[n] = \mathcal{UZ}^{-1}\{\mathcal{Y}(z)\} = \{3(-3)^n + 2\}u[n]$