สัญญาณและระบบ

การแปลงฟูเรียร์ ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (10)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

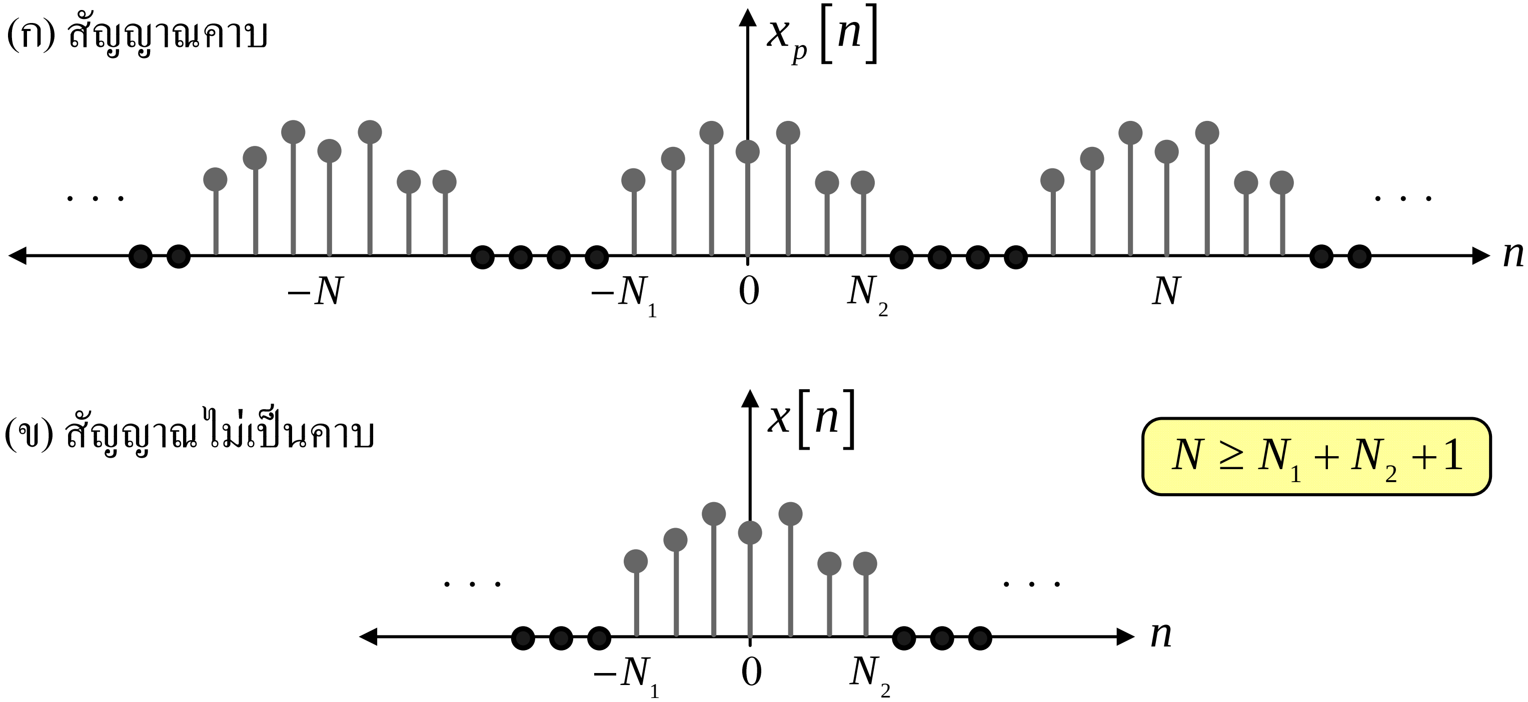
http://home.npru.ac.th/piya

Outline

- การแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาของสัญญาณไม่เป็นคาบ
- การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา
- คุณสมบัติการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา
- หลักการทวิภาวะ
- ผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบ LTI ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

สูตรการแปลงฟูเรียร์

❑ สัญญาณไม่เป็นคาบ ⇒ สัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับค่าอนันต์



ถ้าสัญญาณคาบ $x_p[n]$ มีคาบเวลา $N \to \infty$ $\Rightarrow$ สัญญาณ $x_p[n]$ และ $x[n]$ คือสัญญาณเดียวกัน

สัญญาณคาบ $x_p[n]$ เขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (DtFS) ได้คือ

$$x_p[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad \text{และ} \quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x_p[n]\, e^{-jk(2\pi/N)n}$$

โดยสัญลักษณ์ $k = \langle N \rangle$ หมายถึงค่า k ที่ใช้จะเรียงต่อกันเป็นจำนวน N พจน์ เนื่องจาก

$$x[n] = \begin{cases} x_p[n], & -N_1 \le n \le N_2 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jk(2\pi/N)n}$$

ถ้ากำหนดให้ $X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$ และเปรียบเทียบสมการ a_k จะได้ $a_k = \frac{1}{N} X\left(e^{jk\omega_0}\right)$ เมื่อ

$\omega_0 = 2\pi/N$ แทนค่า a_k ลงในสมการ $x_p[n]$ จะได้

$$x_p[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X\left(e^{jk\omega_0}\right) e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X\left(e^{jk\omega_0}\right) e^{jk\omega_0 n}\omega_0$$

เมื่อ $N \to \infty$ จะได้ว่า $\omega_0 \to 0$ ถ้ากำหนดให้ $\omega_0 = \Delta\omega$ ดังนั้นจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$x_p[n]\Big|_{N\to\infty} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X\left(e^{jk\Delta\omega}\right)e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega$$

และเมื่อ $\Delta\omega \to 0$ เครื่องหมายผลรวมจะเปลี่ยนเป็นเครื่องหมายปริพันธ์ ซึ่งเป็นผลทำให้

$x_p[n] \to x[n]$ ดังนั้นจะได้

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

โดย $X\left(e^{j\omega}\right)$ เรียกว่า**สเปกตรัม**ของสัญญาณ $x[n]$ ซึ่งมีลักษณะเป็นสัญญาณ**คาบ**ที่มีคาบความถี่เท่ากับ 2π และ $X\left(e^{j\omega}\right)$ หาได้จาก

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

เมื่อ $\omega = 2\pi f$ คือความถี่เชิงมุมมีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที

คู่การแปลงฟูเรียร์

- การแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\mathcal{F}\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

และ

$$x[n]=\mathcal{F}^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

เมื่อ $\mathcal{F}\{\cdot\}$ คือสัญลักษณ์การแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา และ $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ คือสัญลักษณ์การแปลงฟูเรียร์ผกผันที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา นอกจากนี้ยังใช้สัญลักษณ์

$$x[n]\xleftrightarrow{DtFT}X\left(e^{j\omega}\right)$$

เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของคู่การแปลงฟูเรียร์ระหว่าง $x[n]$ และ $X\left(e^{j\omega}\right)$

สเปกตรัมฟูเรียร์

โดยทั่วไป $X\left(e^{j\omega}\right)$ เขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนของความถี่ ω ได้คือ

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\angle X\left(e^{j\omega}\right)}$$

เมื่อ $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ คือสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดแบบต่อเนื่อง และ $\angle X\left(e^{j\omega}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}}{\mathrm{Re}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}}\right)$

คือสเปกตรัมเชิงเฟสแบบต่อเนื่องของสัญญาณ $x[n]$

ถ้า $x[n]$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง $\Rightarrow$ $X\left(-e^{j\omega}\right)=X^{*}\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{-j\angle X\left(e^{j\omega}\right)}$

$\left|X\left(-e^{j\omega}\right)\right|=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ $\Rightarrow$ ฟังก์ชันคู่

$\angle X\left(-e^{j\omega}\right)=-\angle X\left(e^{j\omega}\right)$ $\Rightarrow$ ฟังก์ชันคี่

$\Rightarrow$ สเปกตรัมฟูเรียร์ของ $x[n]$ โดยมีลักษณะเป็นสเปกตรัมแบบต่อเนื่อง

Example 1

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเลขชี้กำลัง $x[n] = a^n u[n]$ เมื่อ $|a| < 1$

วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาของสัญญาณ $x[n]$ หาได้จาก

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{a^n u[n]\right\} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

โดยอาศัยอนุกรมเรขาคณิตแบบอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$

ดังนั้นจะได้ $a^n u[n] \xleftrightarrow{DtFT} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |a| < 1$

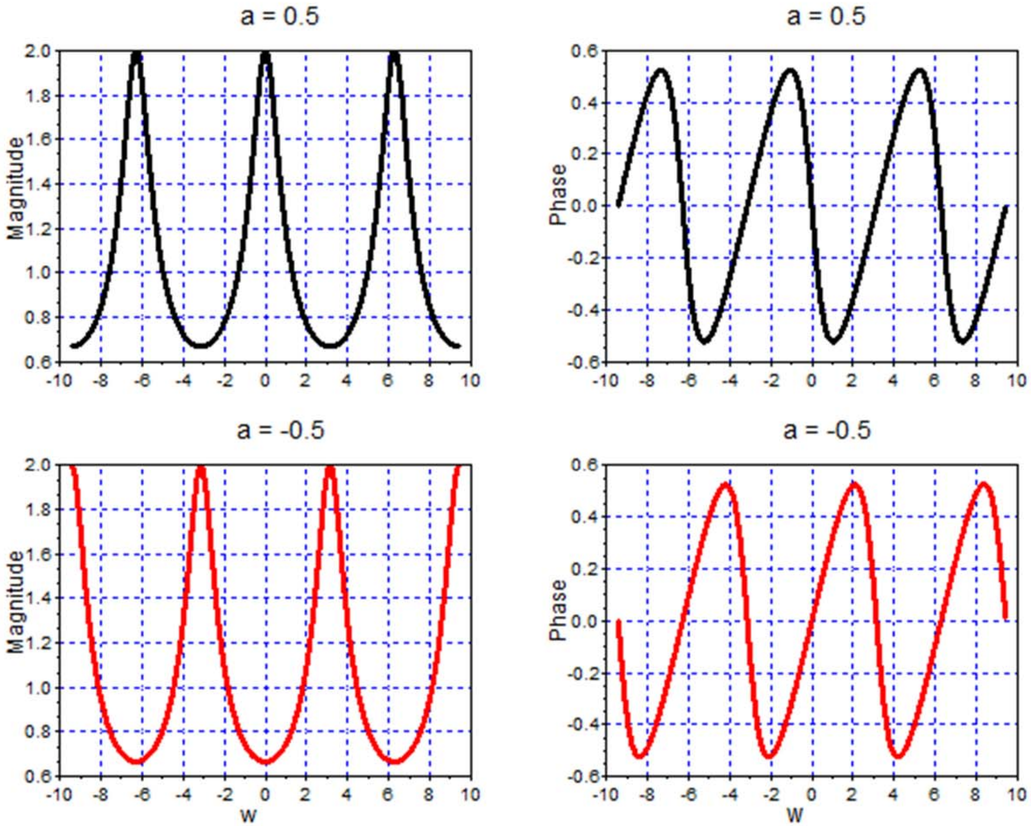
เนื่องจาก $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{1-a\left\{\cos(\omega)-j\sin(\omega)\right\}}=\dfrac{1}{1-a\cos(\omega)+ja\sin(\omega)}$

ดังนั้น $X\left(e^{j\omega}\right)$ แสดงให้อยู่ในรูปของขนาดและมุมเฟสได้ดังนี้

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-a\cos(\omega)\right)^2+\left(a\sin(\omega)\right)^2}}$$

$$\angle X\left(e^{j\omega}\right)=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}\left(\frac{a\sin(\omega)}{1-a\cos(\omega)}\right)$$

$$=-\tan^{-1}\left(\frac{a\sin(\omega)}{1-a\cos(\omega)}\right)$$



สเปกตรัมความถี่ $X\left(e^{j\omega}\right)$ มีลักษณะเป็นสัญญาณคาบ

ที่มีคาบความถี่เท่ากับ 2π เรเดียนต่อวินาที

Example 2

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $x[n] = a^{|n|}$ เมื่อ $|a| < 1$

วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาของสัญญาณ $x[n]$ หาได้จาก

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^{n} e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-j\omega n} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{j\omega}\right)^{n} - 1 \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^{n}$$

อาศัยอนุกรมเรขาคณิตแบบอนันต์ $\Rightarrow$ ลดรูปได้เป็น

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - a e^{j\omega}} - 1 + \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} + \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}$$

Exercise 1

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $x[n]=\Pi\left[\dfrac{n}{N_1}\right]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

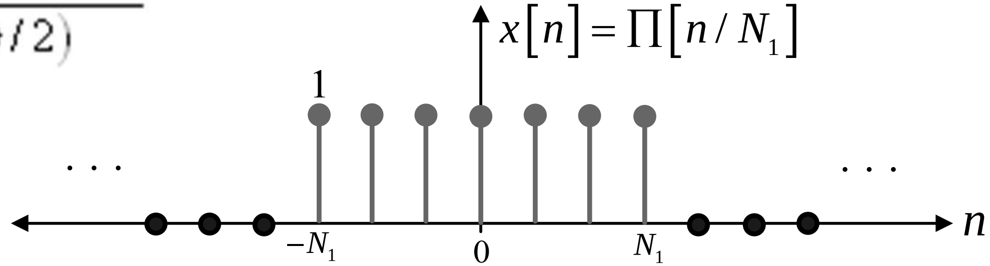
วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $x[n]$ หาได้จาก $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-N_1}^{N_1}(1)e^{-j\omega n}$

เปลี่ยนตัวแปร $m=n+N_1$ จะได้ $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{m=0}^{2N_1}e^{-j\omega(m-N_1)}=e^{j\omega N_1}\sum_{m=0}^{2N_1}e^{-j\omega m}$

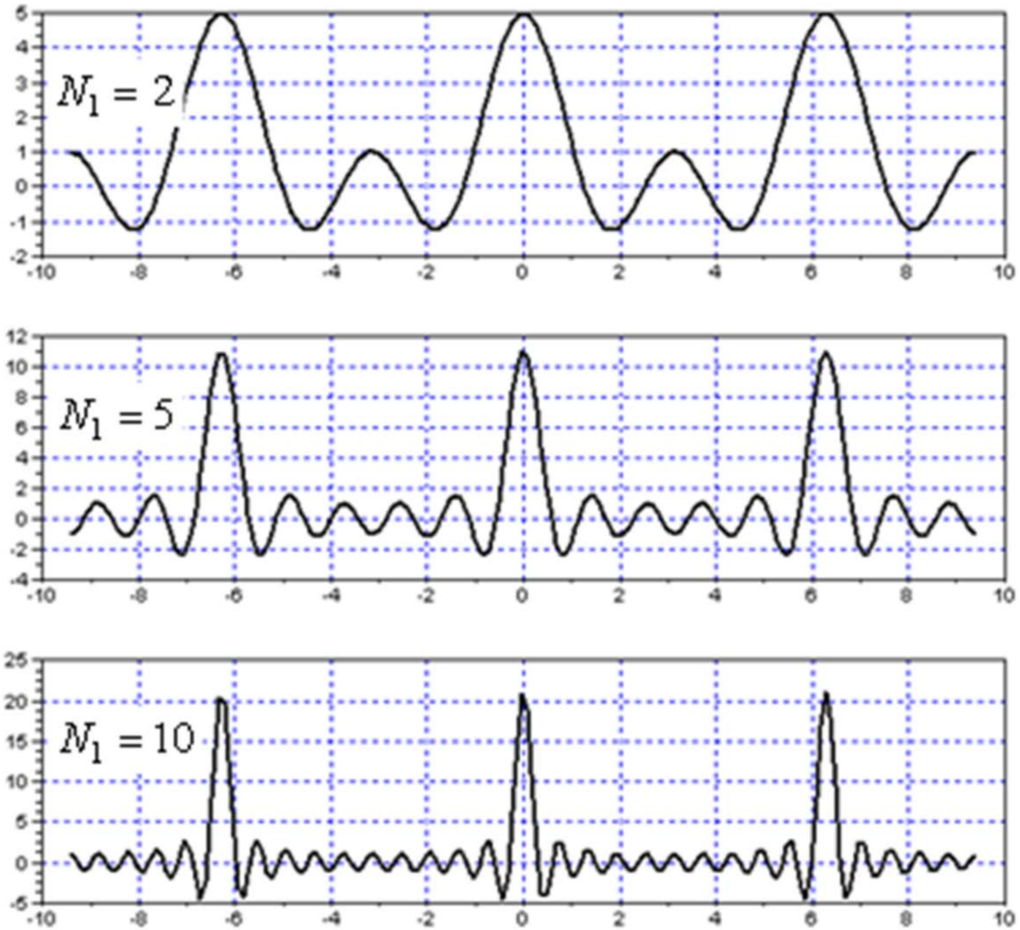
อาศัยอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{i=0}^{M}a^i=\dfrac{1-a^{M+1}}{1-a}$ $\Rightarrow$ จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$X\left(e^{j\omega}\right)=e^{j\omega N_1}\left\{\frac{1-e^{-j\omega(2N_1+1)}}{1-e^{-j\omega}}\right\}=e^{j\omega N_1}\frac{e^{-j\omega(N_1+0.5)}}{e^{-j\omega/2}}\left\{\frac{e^{j\omega(N_1+0.5)}-e^{-j\omega(N_1+0.5)}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}\right\}$$

$$=\frac{\sin\left(\omega\left(N_1+0.5\right)\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}=\left(2N_1+1\right)\frac{\operatorname{sinc}\left(\omega\left(N_1+0.5\right)\right)}{\operatorname{sinc}\left(\omega/2\right)}$$



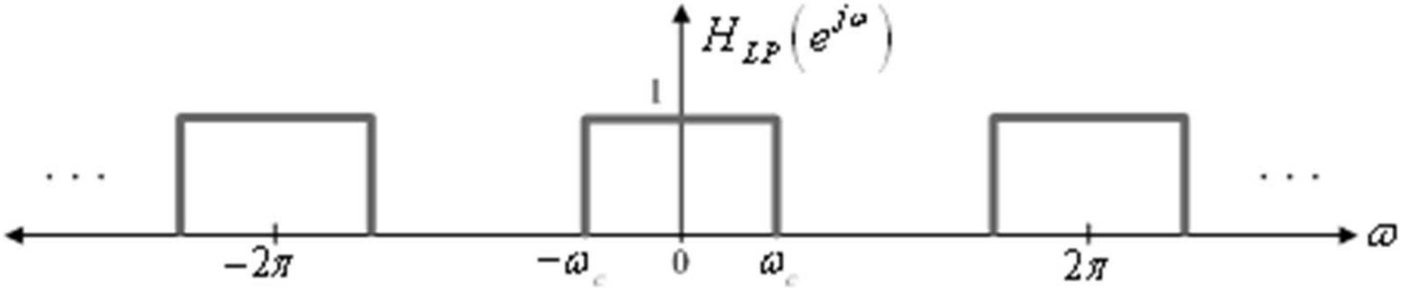
- สเปกตรัมความถี่ของสัญญาณไม่เป็นคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลามีลักษณะเป็น**สัญญาณคาบ**ที่มีคาบความถี่เท่ากับ 2π
- เมื่อ N_1 มีค่ามากขึ้น (สัญญาณในโดเมนเวลามีความกว้างมากขึ้น) $\Rightarrow$ สเปกตรัมความถี่จะถูกบีบให้แคบลง



สเปกตรัมความถี่ของสัญญาณรูปสี่เหลี่ยม สำหรับค่า N_1 ต่างๆ

Example 3

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของสเปกตรัมความถี่ของวงจรกรองผ่านต่ำ $H\left(e^{j\omega}\right)$ ที่มีความถี่ตัด ω_c



วิธีทำ สเปกตรัมความถี่ $H\left(e^{j\omega}\right)=\Pi\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c \\ 0, & \text{else}\end{cases}$

ผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $H\left(e^{j\omega}\right)$ หาได้จาก

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}(1)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega n}}{jn}\bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega_c n}-e^{-j\omega_c n}}{jn}\right]=\frac{\sin\left(\omega_c n\right)}{\pi n}=\frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\omega_c n\right)$$

การลู่เข้าของ DtFT

- สัญญาณไม่เป็นคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $x[n]$ จะหาผลการแปลงฟูเรียร์ได้ เนื่องจาก ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

หรือสัญญาณ $x[n]$ มีพลังงานจำกัด $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$

- ถ้าต้องการประมาณค่า $x[n]$ โดยหาปริพันธ์เพียงช่วงความถี่ $|\omega| \le W$ นั่นคือ

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

ดังนั้น $\hat{x}[n] = x[n]$ ก็ต่อเมื่อ $W = \pi$ โดยจะไม่เกิดปรากฏการณ์กิบบ์

Example 4

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $x[n]=\delta[n]$

วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์หาได้จาก

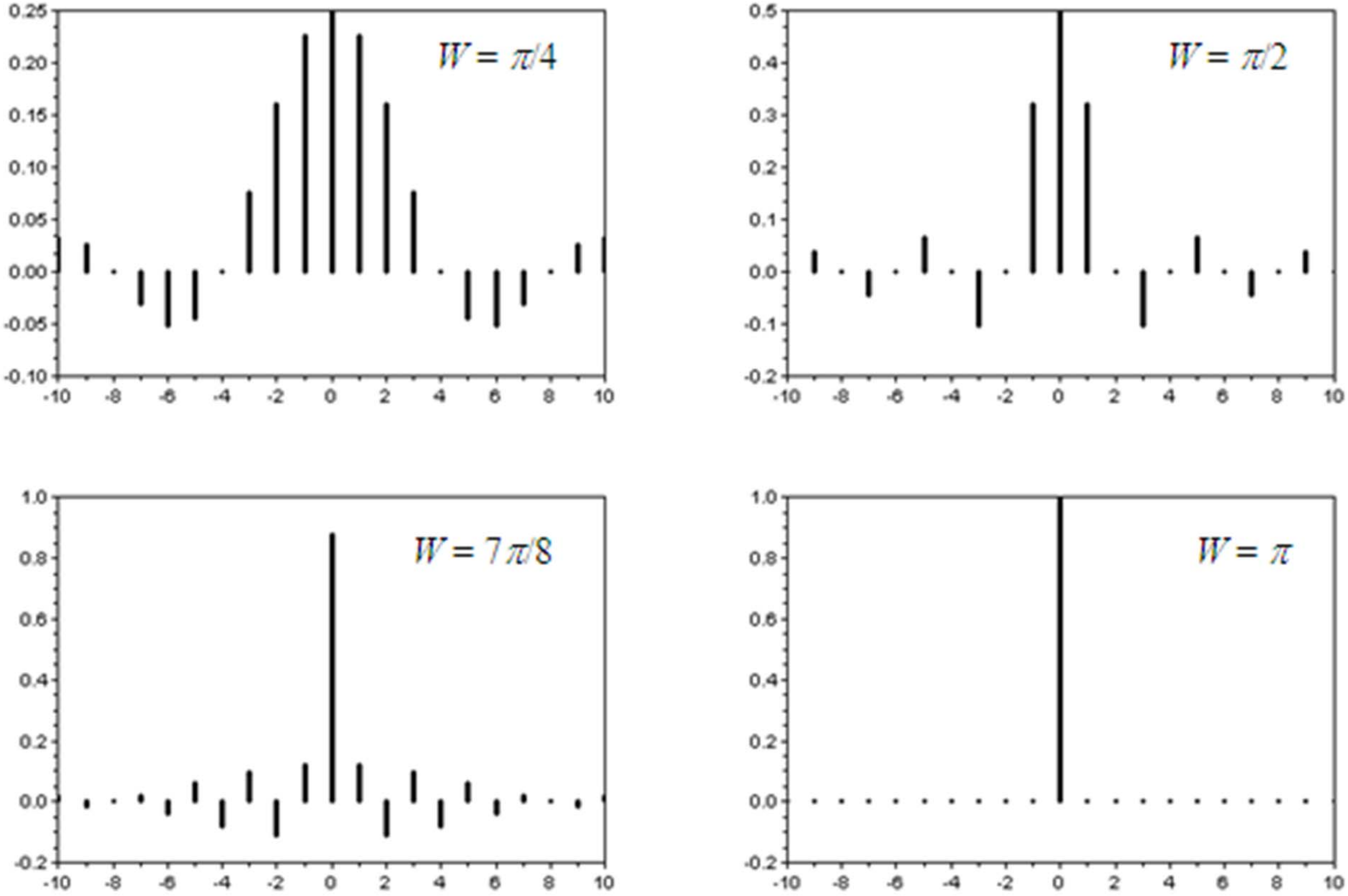
$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]e^{-j\omega n}=1$$

ถ้าต้องการประมาณค่าสัญญาณ $x[n]$ จะได้

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}(1)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right|_{-W}^{W}\right]=\frac{1}{\pi n}\left[\frac{e^{j\omega W}-e^{-j\omega W}}{2j}\right]$$

$$=\frac{\sin(Wn)}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}(Wn)$$

เมื่อ $W=\pi$ ก็จะได้สัญญาณ $x[n]=\delta[n]$ กลับคืนมาได้อย่างสมบูรณ์โดยไม่เกิดปรากฏการณ์กิบบ์



ค่าประมาณของสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $x[n] = \delta[n]$ สำหรับ W ค่าต่างๆ

การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

ถ้ากำหนดให้สัญญาณคาบ $x_p[n]$ มีคาบเวลาเท่ากับ N จะได้

$$x_p[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \Leftrightarrow \quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x_p[n] e^{-jk\omega_0 n} \quad \text{เมื่อ } \omega_0 = 2\pi / N$$

ถ้าให้ $x[n]$ คือสัญญาณไม่เป็นคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ซึ่งมีค่าเฉพาะภายในหนึ่งช่วงเวลา $n = \langle N \rangle$ นอกนั้นมีค่าเป็นค่าศูนย์ และให้ $x[n]$ มีผลการแปลงฟูเรียร์คือ

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-j\omega n}$$

ดังนั้นสัญญาณคาบ $x_p[n]$ สร้างได้จากสัญญาณไม่เป็นคาบ $x[n]$ โดยอาศัย

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mT]$$

(เมื่อ m เป็นเลขจำนวนเต็ม)

ถ้ากำหนดให้สัญญาณคาบ $x_p[n]$ มีคาบเวลาเท่ากับ N จะได้

$$x_p[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \Leftrightarrow \quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x_p[n] e^{-jk\omega_0 n} \quad \text{เมื่อ } \omega_0 = 2\pi / N$$

ถ้าให้ $x[n]$ คือสัญญาณไม่เป็นคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ซึ่งมีค่าเฉพาะภายในหนึ่งช่วงเวลา $n = \langle N\rangle$ นอกนั้นมีค่าเป็นค่าศูนย์ และให้ $x[n]$ มีผลการแปลงฟูเรียร์คือ

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-j\omega n}$$

ดังนั้นสัญญาณคาบ $x_p[n]$ สร้างได้จากสัญญาณไม่เป็นคาบ $x[n]$ โดยอาศัย

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mT] \qquad \text{(เมื่อ } m \text{ เป็นเลขจำนวนเต็ม)}$$

ในทางปฏิบัติสัญญาณไม่เป็นคาบ $x[n]$ อาจพิจารณาว่าเป็นสัญญาณคาบได้ โดยที่คาบเวลา $N \to \infty$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์เขียนได้ใหม่เป็น

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} X\left(e^{j\omega_0 k}\right)$$

เมื่อ $X\left(e^{j\omega_0 k}\right)$ คือค่าของ $X\left(e^{j\omega}\right)$ ณ ความถี่ $\omega = k\omega_0$ แทนค่า a_k ลงในสมการ $x_p[n]$ จะได้

$$x_p[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X\left(e^{j\omega_0 k}\right) e^{jk\omega_0 n}$$

จาก $e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{DtFT} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0 - 2\pi l\right)$ ดังนั้นจะได้

$$X_p\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}\left[x_p[n]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\omega_0\right)$$

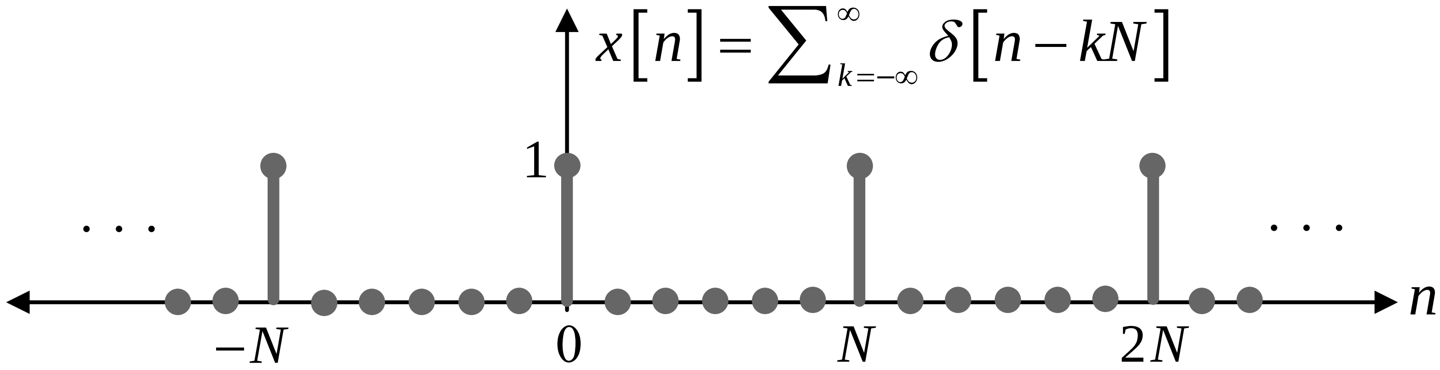
และคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบ $x_p[n]$ คือ

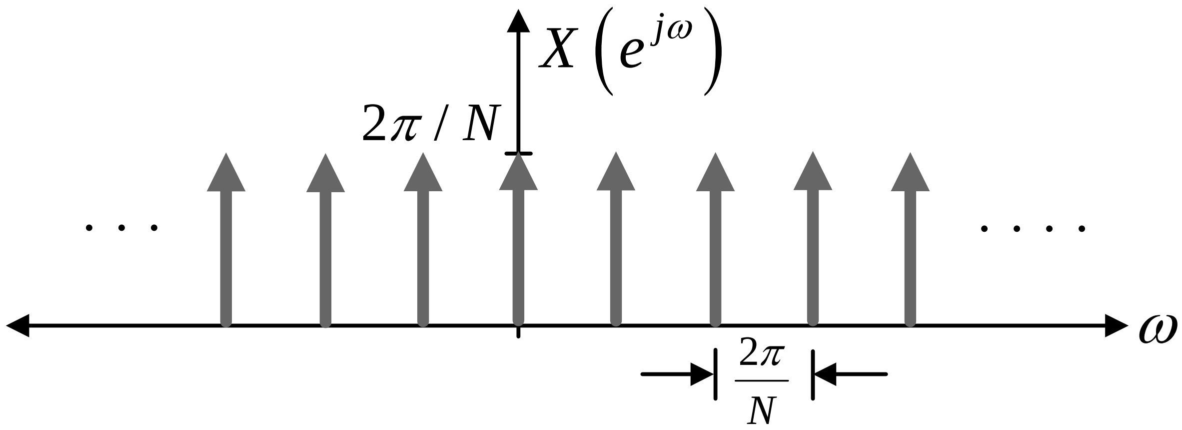
$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mT] \xleftrightarrow{DtFT} X_p\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบ $\Longrightarrow$ ฟังก์ชันไดแร็กเดลตาที่เกิดขึ้นทุกความถี่ $k\omega_0$ เรเดียนต่อวินาที เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็ม และแต่ละฟังก์ชันไดแร็กเดลตาจะถูกถ่วงน้ำหนักด้วยตัวประกอบการคูณเท่ากับ $2\pi a_k$

Example 5

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของขบวนสัญญาณอิมพัลส์แบบเป็นคาบในภาพต่อไปนี้





$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$$

สัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ของ $x[n]$ หาได้จาก $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$

เลือกช่วงเวลาภายในหนึ่งคาบใดๆ เช่น $0\le n\le N-1$ เพื่อหาค่า a_k ซึ่งจะได้ $a_k=1/N$

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบ $x[n]$ คือ $X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$

และคู่การแปลงฟูเรียร์ของขบวนสัญญาณอิมพัลส์แบบเป็นคาบคือ

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\xleftrightarrow{DtFT}\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$\Rightarrow$ การแปลงฟูเรียร์ของขบวนสัญญาณอิมพัลส์แบบเป็นคาบให้ผลลัพธ์เป็น $X\left(e^{j\omega}\right)$ ที่มีลักษณะเป็นขบวนสัญญาณไดแร็กเดลตาที่ถูกถ่วงน้ำหนักด้วยตัวประกอบการคูณเท่ากับ $2\pi/N$ และฟังก์ชันไดแร็กเดลตาแต่ละสัญญาณจะมีระยะห่างกันเท่ากับ $2\pi/N$ เรเดียนต่อวินาที

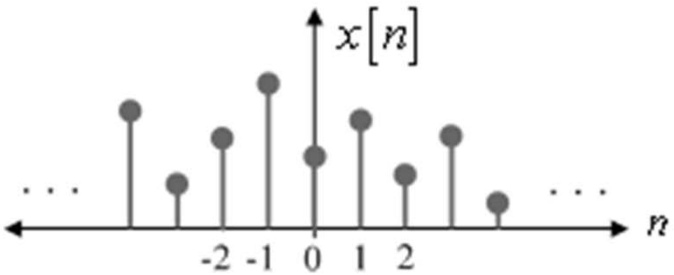
คุณสมบัติ DtFT

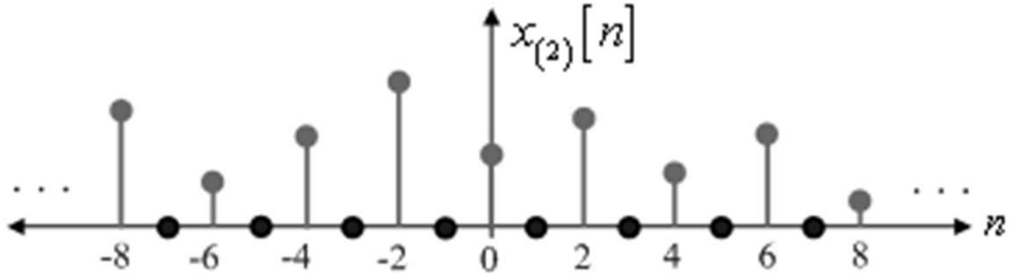
- คู่การแปลงฟูเรียร์ $x[n] \xleftrightarrow{DtFT} X\left(e^{j\omega}\right)$ $y[n] \xleftrightarrow{DtFT} Y\left(e^{j\omega}\right)$
- คุณสมบัติความเป็นคาบ $X\left(e^{j\omega+2\pi k}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)$
- คุณสมบัติเชิงเส้น $ax[n]+by[n] \xleftrightarrow{DtFT} aX\left(e^{j\omega}\right)+bY\left(e^{j\omega}\right)$
- คุณสมบัติการเลื่อนเวลา $x[n-n_0] \xleftrightarrow{DtFT} e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$
- คุณสมบัติการเลื่อนความถี่ $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{DtFT} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
- คุณสมบัติการพับทางเวลา $x[-n] \xleftrightarrow{DtFT} X\left(e^{-j\omega}\right)$
- คุณสมบัติผลต่าง $x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{DtFT} \left(1-e^{-j\omega}\right) X\left(e^{j\omega}\right)$

❑ คุณสมบัติการขยายเวลา นิยามโดย

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$ เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

เช่น ถ้า $k=2$ จะได้ว่า $x_{(2)}[n]$ คือสัญญาณ $x[n]$ ที่ถูกใส่ค่าศูนย์จำนวน $k-1=1$ ตัวเข้าไปประหว่างแซมเปิลที่อยู่ติดกันของ $x[n]$





สัญญาณ $x_{(k)}[n]\neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $n=rk$ เมื่อ r เป็นเลขจำนวนเต็ม และ $x_{(k)}[n]$ มีผลการแปลงฟูเรียร์คือ

$$X_{(k)}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{(k)}[n]\,e^{-j\omega n}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_{(k)}[rk]\,e^{-j\omega rk}$$

เนื่องจาก $x_{(k)}[rk]=x[r]$ จะได้ว่า $X_{(k)}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]\,e^{-j(\omega k)r}=X\left(e^{j\omega k}\right)$

ดังนั้นคุณสมบัติการขยายเวลามีคู่การแปลงฟูเรียร์คือ $x_{(k)}[n]\xleftrightarrow{DtFT}X\left(e^{j\omega k}\right)$

- คุณสมบัติการสังยุค $x^*[n] \xleftrightarrow{DtFT} X^*\left(e^{-j\omega}\right)$

- คุณสมบัติผลสะสมอันดับหนึ่ง

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{DtFT} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X\left(e^{j\omega}\right) + \pi X\left(e^{j0}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

- คุณสมบัติการหาอนุพันธ์ในโดเมนความถี่ $nx[n] \xleftrightarrow{DtFT} j\dfrac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$

- คุณสมบัติการทำคอนโวลูชัน $x[n]*h[n] \xleftrightarrow{DtFT} X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$

- คุณสมบัติการคูณ $x[n]y[n] \xleftrightarrow{DtFT} \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\theta}\right)Y\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$
    - การคูณในโดเมนเวลามีค่าเทียบเท่ากับการทำคอนโวลูชันแบบคาบในโดเมนความถี่

- ความสัมพันธ์ของพาร์ซิวาล $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

  $\left|x[n]\right|^2 = x[n]x^*[n]$ เรียกว่าความเข้มของพลังงาน

  $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = X\left(e^{j\omega}\right)X^*\left(e^{j\omega}\right)$ เรียกว่าสเปกตรัมความหนาแน่นพลังงานมีหน่วยเป็นจูลต่อเรเดียน

- คุณสมบัติทวิภาวะ $x[n] \xleftrightarrow{DtFT} X\left(e^{j\omega}\right)$ ⇔ $X(t) \xleftrightarrow{CtFS} a_k = x[-k]$

- ระบบ LTI มีความเสถียร ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h[n]\right| < \infty$

- ถ้าระบบไม่มีความเสถียรแล้ว สเปกตรัมความถี่ของ $h[n]$ จะมีค่าลู่ออก $\Rightarrow$ ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ระบบเพื่อหาค่าของสัญญาณเอาต์พุตได้

สัญญาณ $x[n]$	สเปกตรัมความถี่ $X(e^{j\omega})$
1	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\}$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\}$
$a^n u[n],\ \|a\|<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

สัญญาณ $x[n]$	สเปกตรัมความถี่ $X(e^{j\omega})$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$\dfrac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$
$a^{\lvert n\rvert},\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\dfrac{\sin(Wn)}{\pi n}=\dfrac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wn),$ $0<W<\pi$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & 0<\lvert\omega\rvert\le W\\ 0, & W<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$ $X(e^{j\omega})$ เป็นสัญญาณคาบที่มีคาบความถี่เท่ากับ 2π
$x[n]=\begin{cases}1, & \lvert n\rvert<N_1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$	$\dfrac{\sin(\omega(N_1+0.5))}{\sin(\omega/2)}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$	$\dfrac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\dfrac{2\pi k}{N}\right)$

Exercise 2

ถ้ากำหนดให้สัญญาณอินพุต $x[n]=\alpha^n u[n]$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ $h[n]=\beta^n u[n]$ เมื่อ $|\alpha|<1$ และ $|\beta|<1$ ตามลำดับ จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบนี้

วิธีทำ เนื่องจาก

$$x[n]=\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{DtFT} X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}, \quad |\alpha|<1$$

$$h[n]=\beta^n u[n] \xleftrightarrow{DtFT} H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}, \quad |\beta|<1$$

ผลการแปลงฟูเรียร์ของ $y[n]=x[n]*h[n]$ คือ

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)\left(1-\beta e^{-j\omega}\right)}$$

ในกรณีที่ $\alpha \neq \beta$ สมการ $Y(e^{j\omega})$ จัดรูปได้เป็น

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{(1-\alpha e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1-\beta e^{-j\omega})} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\frac{1}{(1-\beta e^{-j\omega})}$$

ดังนั้น $y[n]$ หาได้จากการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $Y(j\omega)$ นั่นคือ

$$y[n] = \mathcal{F}\{Y(e^{j\omega})\} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n] = \frac{1}{\alpha-\beta}\{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\}u[n]$$

ในกรณีที่ $\alpha = \beta$ สมการ $Y(e^{j\omega})$ จัดรูปได้เป็น

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{j}{\alpha}e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$$

อาศัยคุณสมบัติการหาอนุพันธ์ $n\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{DtFT} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$

และอาศัยคุณสมบัติการเลื่อนเวลา $(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1] \xleftrightarrow{DtFT} je^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)$

สัญญาณเอาต์พุตมีค่าเท่ากับ

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{j}{\alpha}e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)\right\} = (n+1)\alpha^n u[n+1]$$

เนื่องจากเมื่อ $n \le -1$ จะได้ว่า $y[n] = 0$ ดังนั้นจะได้

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

Example 6

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $x[n] = \dfrac{\sin(\pi n/2)\sin(3\pi n/4)}{\pi^2 n^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x[n] = x_1[n]x_2[n] = \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}\dfrac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n}$

จากคู่การแปลงฟูเรียร์ของวงจรกรองผ่านต่ำ $\dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \xleftrightarrow{DtFT} \prod\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$

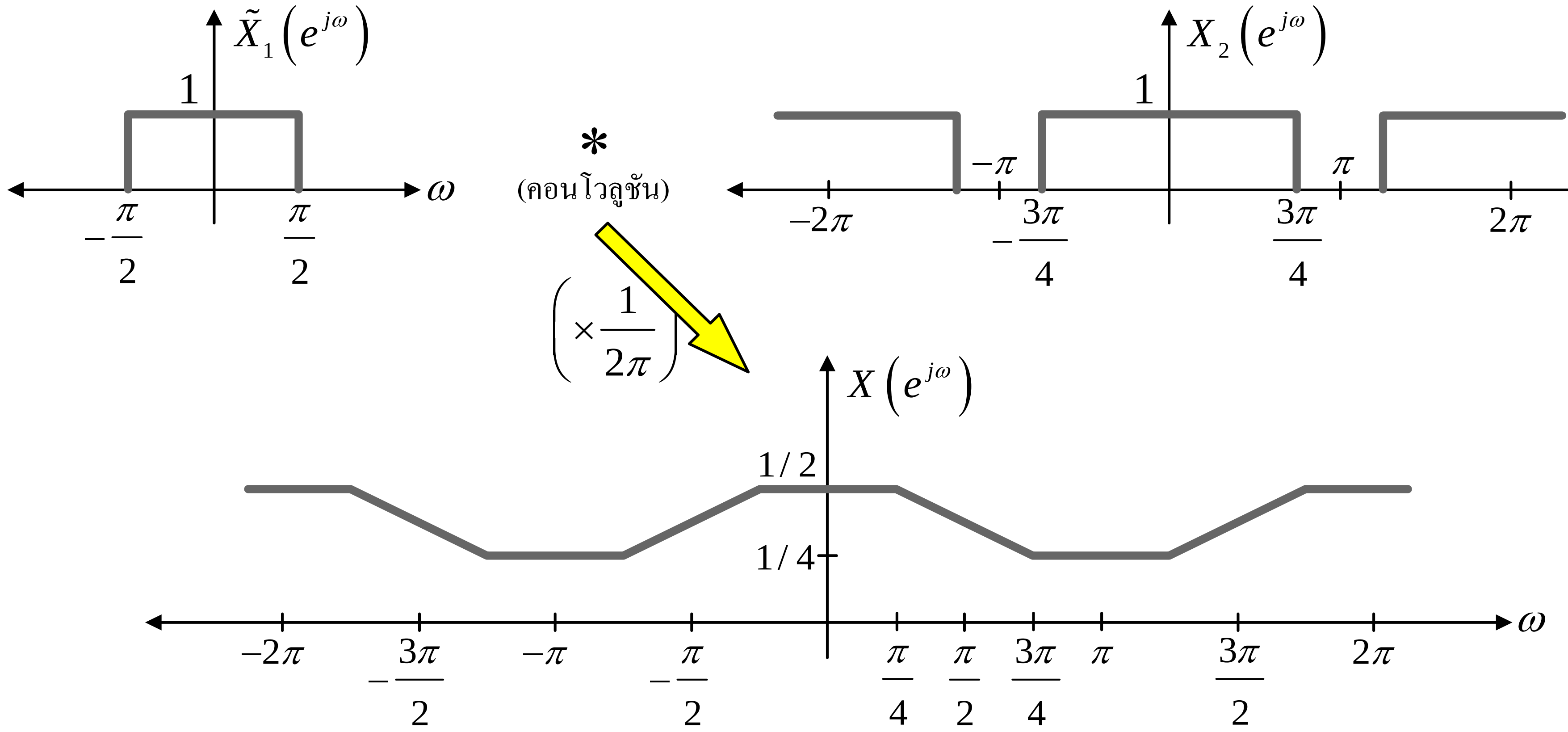
จะได้ว่า

$$x_1[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \xleftrightarrow{DtFT} X_1(e^{j\omega}) = \prod\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right)$$

$$x_2[n] = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n} \xleftrightarrow{DtFT} X_2(e^{j\omega}) = \prod\left(\frac{\omega}{3\pi/4}\right)$$

อาศัยคุณสมบัติการคูณ $\Rightarrow$ ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $x[n]$ มีค่าเท่ากับ

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$



สมการข้างต้นเป็นการทำคอนโวลูชันแบบเป็นคาบภายในช่วงคาบความถี่ 2π

อย่างไรก็ตามสามารถทำให้รูปของการทำคอนโวลูชันแบบปกติ โดยการแทนค่า

$$\tilde{X}_1\left(e^{j\theta}\right)=\begin{cases} X_1\left(e^{j\theta}\right), & -\pi<\theta<\pi \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

ซึ่งจะได้ $$X\left(e^{j\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right)X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{X}_1\left(e^{j\theta}\right)X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

Example 7

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไม่เป็นคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $x[n]=\frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

วิธีทำ การใช้คุณสมบัติทวิภาวะในการแก้ไขโจทย์ข้อนี้จะเริ่มจาก การหาสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ ที่มีคาบเวลา $T=2\pi$ (ความถี่เชิงมุมมูลฐาน $\omega_0=2\pi/T=1$ เรเดียนต่อวินาที) และมีสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ $a_k=x[k]$ เนื่องจากคู่ CtFS ของสัญญาณคาบรูปคลื่นสี่เหลี่ยม $x(t)$ คือ

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<\frac{T}{2}\end{cases}\xleftrightarrow{CtFS} a_k=\frac{2T_1}{T}\text{sinc}(\omega_0 kT_1)=\frac{T_1}{\pi}\text{sinc}(kT_1)$$

โดย $a_k=x[k]$ ก็ต่อเมื่อ $T_1=\pi/2 \Rightarrow$ เปรียบเทียบกับ $X(t)\xleftrightarrow{CtFS} a_k=x[-k]$ จะได้

$$x[k]=\frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{\pi k}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{-jkt}dt$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก k เป็น n และจาก t เป็น ω จะได้

$$x[n]=\frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{-j\omega n}d\omega$$

แทนค่า $n=-n$ และอาศัยหลักความจริงที่ว่าฟังก์ชันซิงก์เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้ว่า

$$x[-n]=\frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{+j\omega n}d\omega \qquad (1)$$

อาศัย $X(t)\xleftrightarrow{CFS}a_k=x[-k]$ พร้อมทั้งเปรียบเทียบสมการ (1) กับสมการ

$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$ จะได้ว่าผลการแปลงฟูเรียร์ของ $x[n]$ คือ

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

ผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบ LTI ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

- ระบบ LTI ที่พบมากในทางปฏิบัติจะถูกกำหนดโดยสมการเชิงผลต่างที่มีค่าสัมประสิทธิ์คงตัวแบบเชิงเส้น

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

สมการเชิงผลต่างอันดับ N

ผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบ LTI ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

- ระบบ LTI ถูกกำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์คงตัวแบบเชิงเส้น

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ N

การหาผลตอบสนองเชิงความถี่

กำหนดให้ $x[n] \xleftrightarrow{DtFT} X(e^{j\omega})$ และ $y[n] \xleftrightarrow{DtFT} Y(e^{j\omega})$ $\Rightarrow$ หาผลการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้างจะได้

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\{x[n-k]\}$$

อาศัยคุณสมบัติการเลื่อนเวลา $\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$

ดังนั้นผลตอบสนองอิมพัลส์ในโดเมนความถี่คือ $H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$

Exercise 3

พิจารณาระบบ LTI ที่กำหนดโดยสมการ $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$

ก) จงหาผลตอบสนองอิมพัลส์ $h[n]$ ของระบบ

ข) กำหนดให้สัญญาณอินพุต $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$

วิธีทำ

ก) หาผลการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้าง จะได้ $Y(e^{j\omega})-\frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega})=2X(e^{j\omega})$

ดังนั้นผลตอบสนองอิมพัลส์ในโดเมนความถี่ $H(e^{j\omega})=Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$ มีค่าเท่ากับ

$$H(e^{j\omega})=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}=\frac{4}{1-(1/2)e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-(1/4)e^{-j\omega}}$$

อาศัยการแปลงฟูเรียร์ผกผันจะได้ $h[n]=\mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\}=\left\{4\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}u[n]$

ข) เนื่องจากผลการแปลงฟูเรียร์ของ x[n] คือ $X\left(e^{j\omega}\right)=\mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]\right\}=\frac{1}{1-(1/4)e^{-j\omega}}$

สัญญาณเอาต์พุตในโดเมนความถี่ $\Rightarrow$ $Y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)==\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{2}}$

ทำการกระจายเศษส่วนย่อยจะได้ $Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{A_{11}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{A_{12}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{2}}+\frac{A_{21}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

จากการแก้สมการเพื่อหาค่า A_{11}, A_{12}, และ A_{21} จะได้ว่า $A_{11}=-4$, $A_{12}=-2$, และ $A_{21}=8$ ดังนั้น

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=-\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-\frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{2}}+\frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

อาศัยการแปลงฟูเรียร์ผกผันและคู่การแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาจะได้ว่า

$$y[n]=\mathcal{F}^{-1}\left\{Y\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\left[-4\left(\frac{1}{4}\right)^{n}-2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+8\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u[n]$$