สัญญาณและระบบ

การแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา (7-9)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

http://home.npru.ac.th/piya

Outline

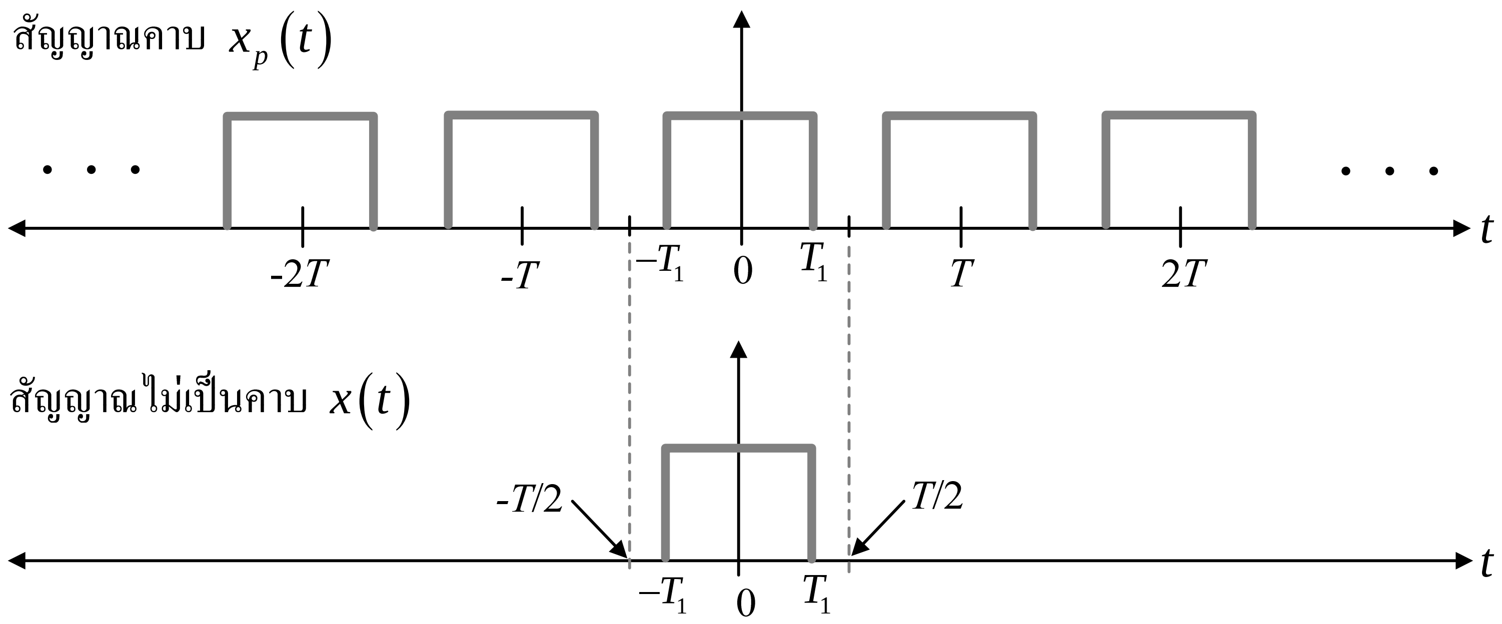
- การแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลาของสัญญาณไม่เป็นคาบ
- การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา
- คุณสมบัติการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา
- ทฤษฎีบทพลังงานของเรย์ลี
- ผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา
- ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน
- การกรองสัญญาณ

บทนำ

- อนุกรมฟูเรียร์ ⇒ แทนสัญญาณคาบให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของเลขชี้กำลังเชิงซ้อน
- สัญญาณไม่เป็นคาบ ⇒ แทนด้วยผลรวมเชิงเส้นของเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้โดยอาศัย**การแปลงฟูเรียร์** (Fourier transform)
  - สัญญาณไม่เป็นคาบ ⇒ สัญญาณคาบที่มีคาบเวลาอนันต์
- การแปลงฟูเรียร์ ⇒ แปลงสัญญาณในโดเมนเวลาให้อยู่ในรูปของสัญญาณในโดเมนความถี่ที่เรียกว่า**สเปกตรัม** (spectrum)
  - การวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนความถี่จะง่ายกว่าการวิเคราะห์ในโดเมนเวลา
  - สเปกตรัม ⇒ ช่วยในการออกแบบอุปกรณ์ในระบบสื่อสารต่างๆ
  - สัญญาณในโดเมนความถี่บอกให้ทราบถึงแบนด์วิดท์และรูปร่างสเปกตรัมของสัญญาณ ⇒ ช่วยทำให้เข้าใจคุณสมบัติต่างๆ ของสัญญาณมากขึ้น เช่น วงจรกรองแต่ละแบบจะยอมให้สัญญาณช่วงแถบความถี่หนึ่งผ่านไปได้ ในขณะที่จะเกิดการลดทอนในอีกช่วงแถบความถี่หนึ่ง

CtFT: continuous-time Fourier transform

- สัญญาณไม่เป็นคาบ $\Rightarrow$ สัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับอนันต์
- พิจารณา



สัญญาณคาบ $x_p(t)$ ที่มีคาบเวลา $T \Rightarrow$ ถ้าคาบเวลา T มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ จะได้ว่าสัญญาณ $x_p(t)$ และ $x(t)$ คือสัญญาณเดียวกัน

❑ สัญญาณคาบ $x_p(t)$ เขียนให้อยู่ในรูปของ**อนุกรมฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา**ได้คือ

$$x_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_p(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \omega_0=2\pi/T$$

เนื่องจากสัญญาณ $x(t)=x_p(t)$ ในช่วงเวลา $|t|<T/2$ และ $x(t)=0$ สำหรับ $|t|>T_1$ ดังนั้น

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

ถ้าให้ $$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$a_k=\frac{1}{T}X(jk\omega_0)$$

แทนค่า a_k ลงในสมการ $x_p(t)$ จะได้

$$x_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$$

เนื่องจาก $T = 2\pi / \omega_0 \Rightarrow$ เมื่อ $T \to \infty$ จะได้ $\omega_0 \to 0$ ดังนั้นถ้าให้ $\omega_0 = \Delta\omega$ จะได้

$$x_p(t)\Big|_{T\to\infty} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Delta\omega)e^{jk\Delta\omega t}\Delta\omega$$

โดยเมื่อ $\Delta\omega \to 0$ เครื่องหมายผลรวมจะเปลี่ยนเป็นเครื่องหมายปริพันธ์ และเป็นผลทำให้ $x_p(t) \to x(t)$ นั่นคือ

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_p(t) = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Delta\omega)e^{jk\Delta\omega t}\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

เมื่อ $\omega = 2\pi f$ คือความถี่เชิงมุมมีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที

- สัญญาณ $x(t)$ แสดงให้อยู่ในรูปของผลรวมแบบต่อเนื่องของฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่มีความถี่ในช่วง $(-\infty, \infty)$ เมื่อแอมพลิจูดของแต่ละองค์ประกอบความถี่ ω มีขนาดแปรผันตามฟังก์ชัน $X(j\omega)$
- การแปลงฟูเรียร์ $\Rightarrow$ แปลง $x(t)$ ให้อยู่ในรูปขององค์ประกอบของเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่ครอบคลุมตลอดทุกย่านความถี่ โดย $X(j\omega)$ เป็นตัวบอกขนาดแอมพลิจูดของแต่ละองค์ประกอบความถี่ ω

คู่การแปลงฟูเรียร์

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$ (สมการการแปลงฟูเรียร์)

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[X(j\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ (สมการการแปลงฟูเรียร์ผกผัน)

เมื่อ $\mathcal{F}[\cdot]$ คือสัญลักษณ์การแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา และ $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ คือสัญลักษณ์การแปลงฟูเรียร์ผกผันที่ต่อเนื่องทางเวลา

- สัญลักษณ์ $x(t) \xleftrightarrow{CtFT} X(j\omega)$ $\Rightarrow$ คู่การแปลงฟูเรียร์ระหว่าง $x(t)$ และ $X(j\omega)$

สเปกตรัมฟูเรียร์

ผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$

เมื่อ $|X(j\omega)|$ คือสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดแบบต่อเนื่อง และ $\angle X(j\omega) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}}\right)$ คือสเปกตรัมเชิงเฟสแบบต่อเนื่องของสัญญาณ $x(t)$ เมื่อ $\mathrm{Re}\{a\}$ คือส่วนที่เป็นค่าจริงของ a และ $\mathrm{Im}\{a\}$ คือส่วนที่เป็นค่าจินตภาพของ a

- ถ้าสัญญาณ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง จะได้

  $|X(-j\omega)| = |X(j\omega)|$ และ $\angle X(-j\omega) = -\angle X(j\omega)$

  โดย $|X(j\omega)|$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $\angle X(j\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่

- สเปกตรัมเชิงแอมพลิจูด $|X(j\omega)|$ และสเปกตรัมเชิงเฟส $\angle X(j\omega)$ เรียกรวมกันว่าสเปกตรัมฟูเรียร์ (Fourier spectrum) ของสัญญาณ $x(t)$ โดยมีลักษณะเป็นสเปกตรัมแบบต่อเนื่อง

การลู่เข้าของการแปลงฟูเรียร์

สัญญาณไม่เป็นคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t)$ ใดๆ สามารถหาผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ ได้ ก็ต่อเมื่อสัญญาณ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดีรีเคลทั้งสามข้อ

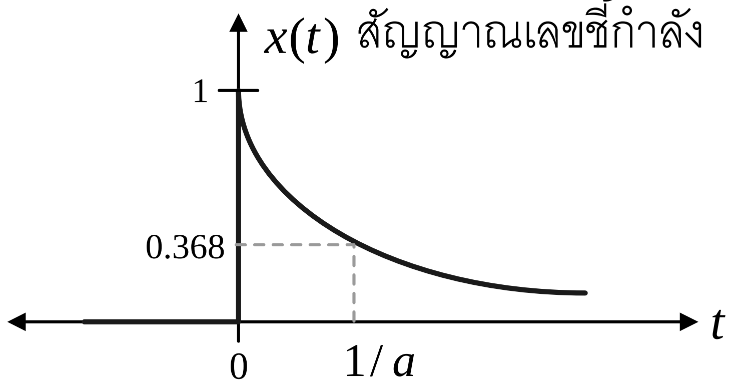
1) $x(t)$ ต้องสามารถหาปริพันธ์ได้อย่างสมบูรณ์ได้ นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty \Rightarrow$ ช่วยรับรองว่าผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ มีค่าจำกัด

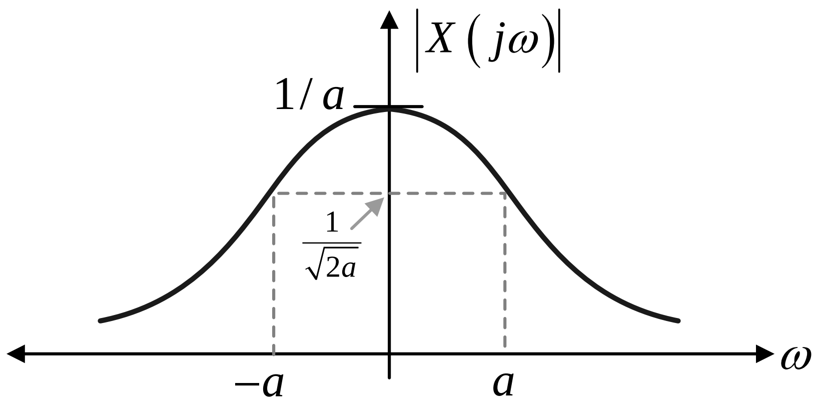
2) $x(t)$ ต้องมีจำนวนจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดเป็นจำนวนจำกัดภายในช่วงเวลาจำกัดใดๆ

3) $x(t)$ ต้องมีจำนวนจุดที่มีค่าไม่ต่อเนื่องจำกัดภายในช่วงเวลาจำกัดใดๆ และทุกจุดที่มีค่าไม่ต่อเนื่องต้องมีค่าจำกัดด้วย

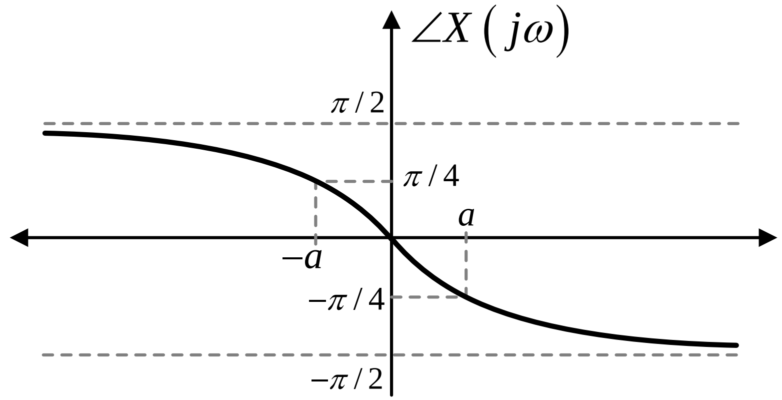
Example 1

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t) = e^{-at}u(t)$ เมื่อ $a > 0$ และ $u(t)$ คือฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย





สเปกตรัมเชิงแอมพลิจูด



สเปกตรัมเชิงเฟส

วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเลขชี้กำลัง $x(t)$ หาได้จาก

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

เพราะฉะนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเลขชี้กำลังคือ

$$e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{CtFT}\frac{1}{a+j\omega}, \quad a>0$$

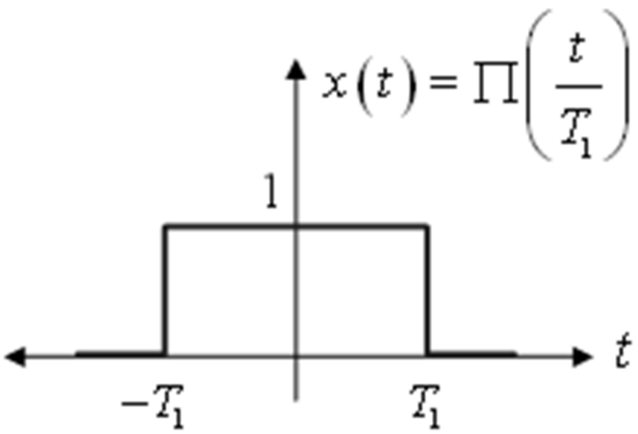
เนื่องจาก $X(j\omega)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน ดังนั้นโดยทั่วไปจะแสดง $X(j\omega)$ ให้อยู่ในรูปของสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดและสเปกตรัมเชิงเฟส ซึ่งหาได้จาก

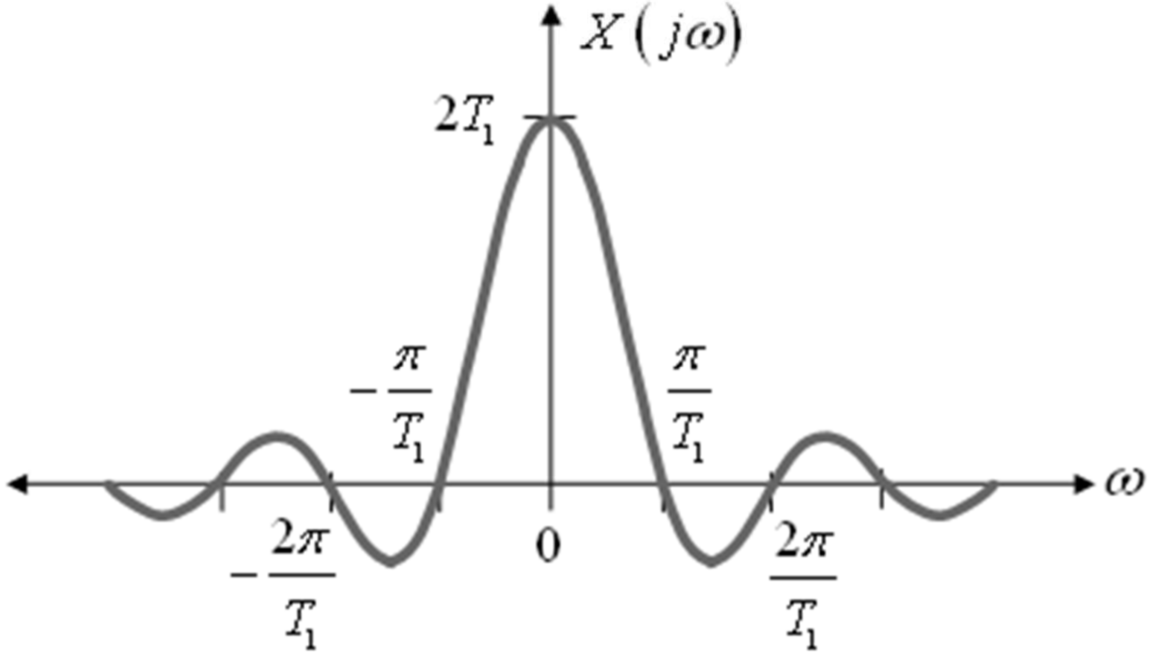
$$|X(j\omega)|=\left|\frac{1}{a+j\omega}\right|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$\angle X(j\omega)=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Example 2

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยม $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$





วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์ $X(j\omega)$ หาได้จาก

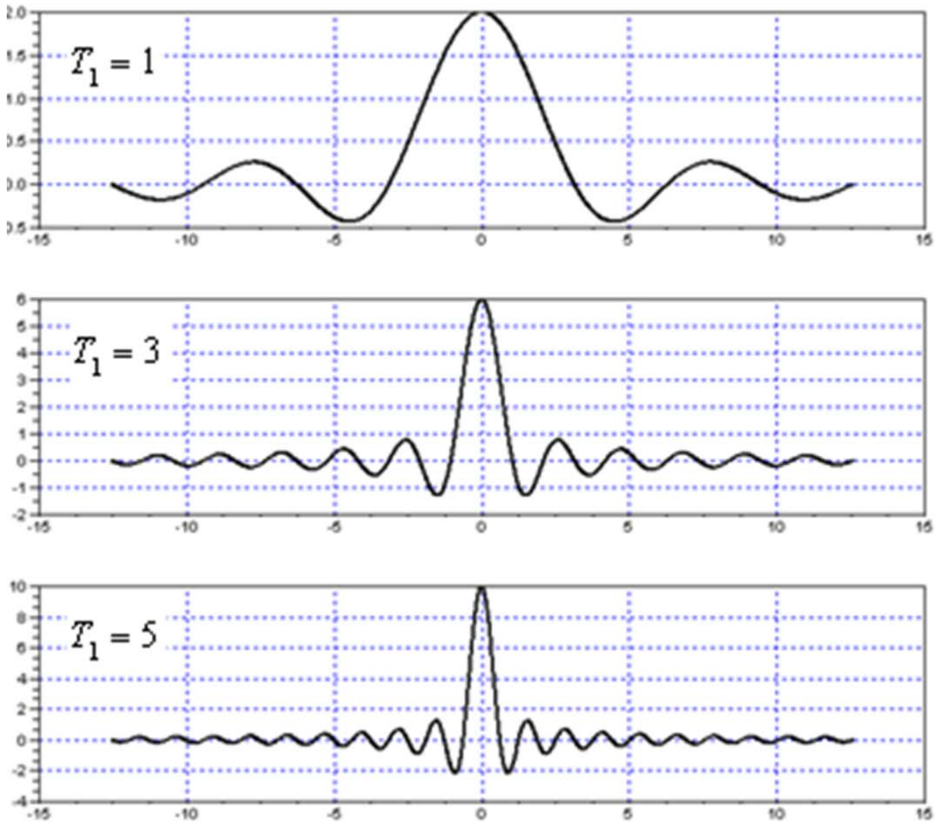
$$X(j\omega)=\int_{-T_1}^{T_1}(1)e^{-j\omega t}dt = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-T_1}^{T_1}$$

$$=\frac{1}{-j\omega}\left\{e^{-j\omega T_1}-e^{j\omega T_1}\right\}=\frac{2}{\omega}\left\{\frac{e^{j\omega T_1}-e^{-j\omega T_1}}{2j}\right\}$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin(\omega T_1) = 2T_1\mathrm{sinc}(\omega T_1)$$

เนื่องจาก $\mathrm{sinc}(\theta)=\sin(\theta)/\theta$ ดังนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมคือ

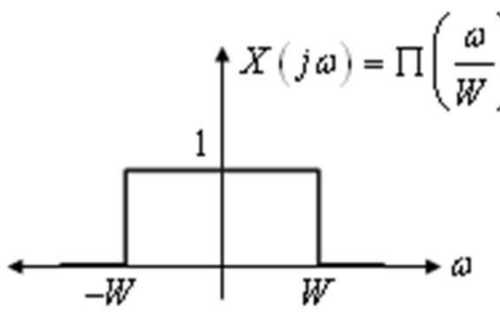
$$\Pi\left(\frac{t}{T_1}\right)\xleftrightarrow{CtFT}2T_1\mathrm{sinc}(\omega T_1)$$

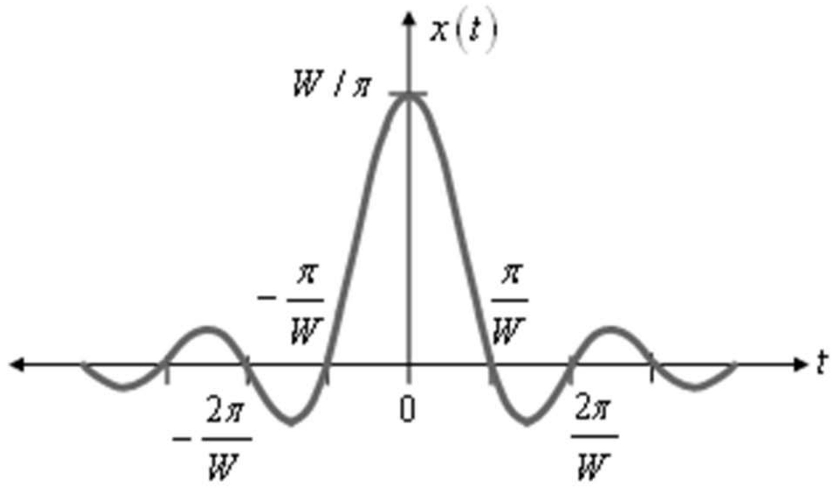


สัญญาณใดๆ ไม่สามารถเป็นได้ทั้งสัญญาณที่มี**เวลาจำกัด**
และสัญญาณที่มี**แถบความถี่จำกัด**

Example 3

จงหาสัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$ ที่มีผลการแปลงฟูเรียร์คือ $X(j\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{W}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & \text{else}\end{cases}$





วิธีทำ สัญญาณในโดเมนเวลา $x(t)$ ที่สอดคล้องกับ $X(j\omega)$ หาได้จาก

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}(1)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\Bigg|_{-W}^{W}\right]=\frac{1}{\pi t}\left[\frac{e^{jWt}-e^{-jWt}}{2j}\right]=\frac{1}{\pi t}\sin(Wt)=\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}(Wt)$$

ดังนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์คือ $\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}(Wt)\xleftrightarrow{CtFT}\Pi\left(\frac{\omega}{W}\right)$

สัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมและสัญญาณซิงก์
เป็นคู่การแปลงฟูเรียร์ซึ่งกันและกัน

Exercise 1

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $x(t)=e^{-a|t|}$ เมื่อ $a>0$

วิธีทำ ผลการแปลงฟูเรียร์ของ $x(t)$ หาได้จาก

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

ดังนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณนี้คือ $\boxed{e^{-a|t|}\xleftrightarrow{CTFT}\frac{2a}{a^2+\omega^2}}$

การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลา

- **การแปลงฟูเรียร์** ⇒ ใช้ในการแปลงสัญญาณคาบที่ต่อเนื่องทางเวลาให้เป็นสัญญาณในโดเมนความถี่ได้ โดยอาศัยฟังก์ชันไดแร็กเดลตา

พิจารณาสัญญาณคาบ $x_p(t)$ มีคาบเวลา T

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

ถ้าให้ $x(t)$ คือสัญญาณไม่เป็นคาบที่มีค่าเฉพาะภายในช่วงเวลา $|t| \le T/2$ (นอกนั้นเป็นศูนย์) โดยมีผลการแปลงฟูเรียร์คือ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ ดังนั้นสัญญาณคาบ $x_p(t)$ สามารถสร้างได้จากสัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$ โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$x_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT)$$

เมื่อ m เป็นเลขจำนวนเต็ม และ $x(t)$ จะเรียกว่าฟังก์ชันก่อกำเนิด

ในทางปฏิบัติสัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$ อาจพิจารณาว่าเป็นสัญญาณคาบได้ โดยที่ $T \to \infty$ และ $x_p(t) = x(t)$ ภายในช่วงเวลา $|t| \le T/2$ ดังนั้นจะได้

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi} X(jk\omega_0)$$

เมื่อ $X(jk\omega_0)$ คือค่าของ $X(j\omega)$ ที่ความถี่ $\omega = k\omega_0$ แทนค่า a_k ลงในสมการ $x_p(t)$ จะได้

$$x_p(t) = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT)$$

เนื่องจาก $e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{CtFT} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$ จะได้ว่า

$$\mathcal{F}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-mT)\right] = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

เนื่องจาก $\omega_0 X(jk\omega_0) = 2\pi a_k$ ดังนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบ $x_p(t)$ คือ

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-mT) \xleftrightarrow{CtFT} \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\delta(\omega-k\omega_0)$$

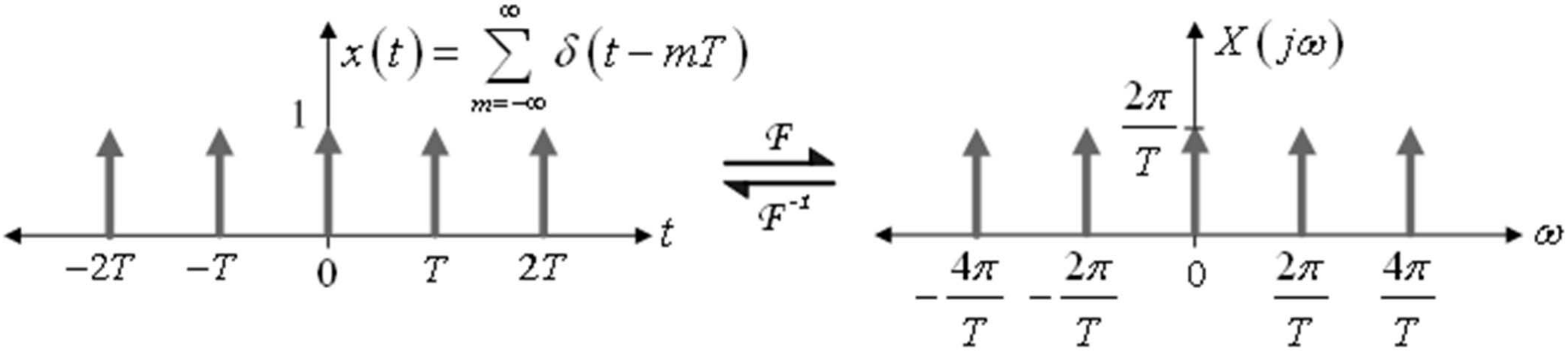
หรือ

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t-mT) \xleftrightarrow{CtFT} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$\Rightarrow$ การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบประกอบด้วยฟังก์ชันไดแร็กเดลตาที่เกิดขึ้นทุกความถี่ $k\omega_0$ เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็ม และแต่ละฟังก์ชันไดแร็กเดลตาจะถูกถ่วงน้ำหนักด้วยตัวประกอบการคูณเท่ากับ $X(jk\omega_0)$ $\Rightarrow$ คู่การแปลงฟูเรียร์นี้มีความสำคัญมากสำหรับทฤษฎีบทการชักตัวอย่าง

Example 4

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันการชักตัวอย่างอุดมคติซึ่งประกอบด้วยขบวนสัญญาณอิมพัลส์ที่มีระยะห่างเท่าๆ กัน



วิธีทำ เนื่องจากคู่การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันไดแร็กเดลตาคือ $\delta(t) \xleftrightarrow{CFT} 1$ ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์ของ $x(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$X(j\omega)=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)\,\delta(\omega-k\omega_0)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$$

โดย $\omega_0 = 2\pi/T$ และ $X(jk\omega_0)=1$ สำหรับทุกค่า k

ดังนั้นคู่การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันการชักตัวอย่างอุดมคติคือ

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT) \xleftrightarrow{CtFT} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$\Rightarrow$ การแปลงฟูเรียร์ของขบวนสัญญาณอิมพัลส์ที่มีระยะห่างแต่ละสัญญาณพัลส์เท่ากับ T วินาที จะได้ผลลัพธ์เป็นขบวนสัญญาณอิมพัลส์ที่ถูกถ่วงน้ำหนักด้วยตัวประกอบการคูณเท่ากับ $2\pi / T$ และสัญญาณอิมพัลส์แต่ละตัวจะห่างกันเท่ากับ $2\pi / T$ เรเดียนต่อวินาที

$\Rightarrow$ ระยะห่างระหว่างสัญญาณอิมพัลส์ในโดเมนเวลาจะ**แปรผกผัน**กับระยะห่างระหว่างสัญญาณอิมพัลส์ในโดเมนความถี่ กล่าวคือถ้าระยะห่างระหว่างสัญญาณอิมพัลส์ในโดเมนเวลาแคบแล้ว ระยะห่างระหว่างสัญญาณอิมพัลส์ในโดเมนความถี่ก็จะกว้าง (และในทางกลับกัน)

Example 5

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบรูปคลื่นสี่เหลี่ยม

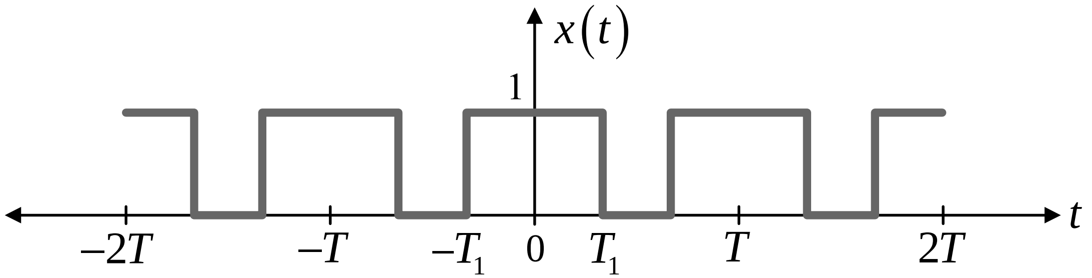
วิธีทำ สัญญาณคาบ $x(t)$ มีสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์คือ

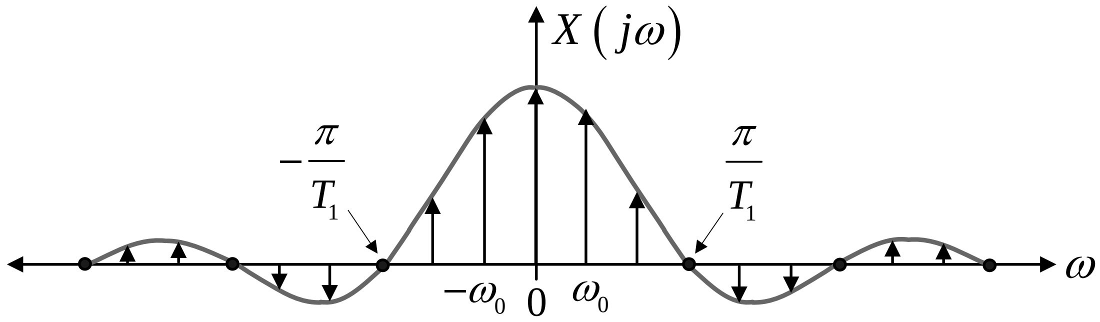
$$a_k = \frac{2T_1}{T}\operatorname{sinc}(k\omega_0 T_1) = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$$

โดยผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบรูปคลื่นสี่เหลี่ยมหาได้จาก

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$





นอกจากนี้ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณคาบรูปคลื่นสี่เหลี่ยมยังหาได้จาก

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - mT}{T_1}\right)$$

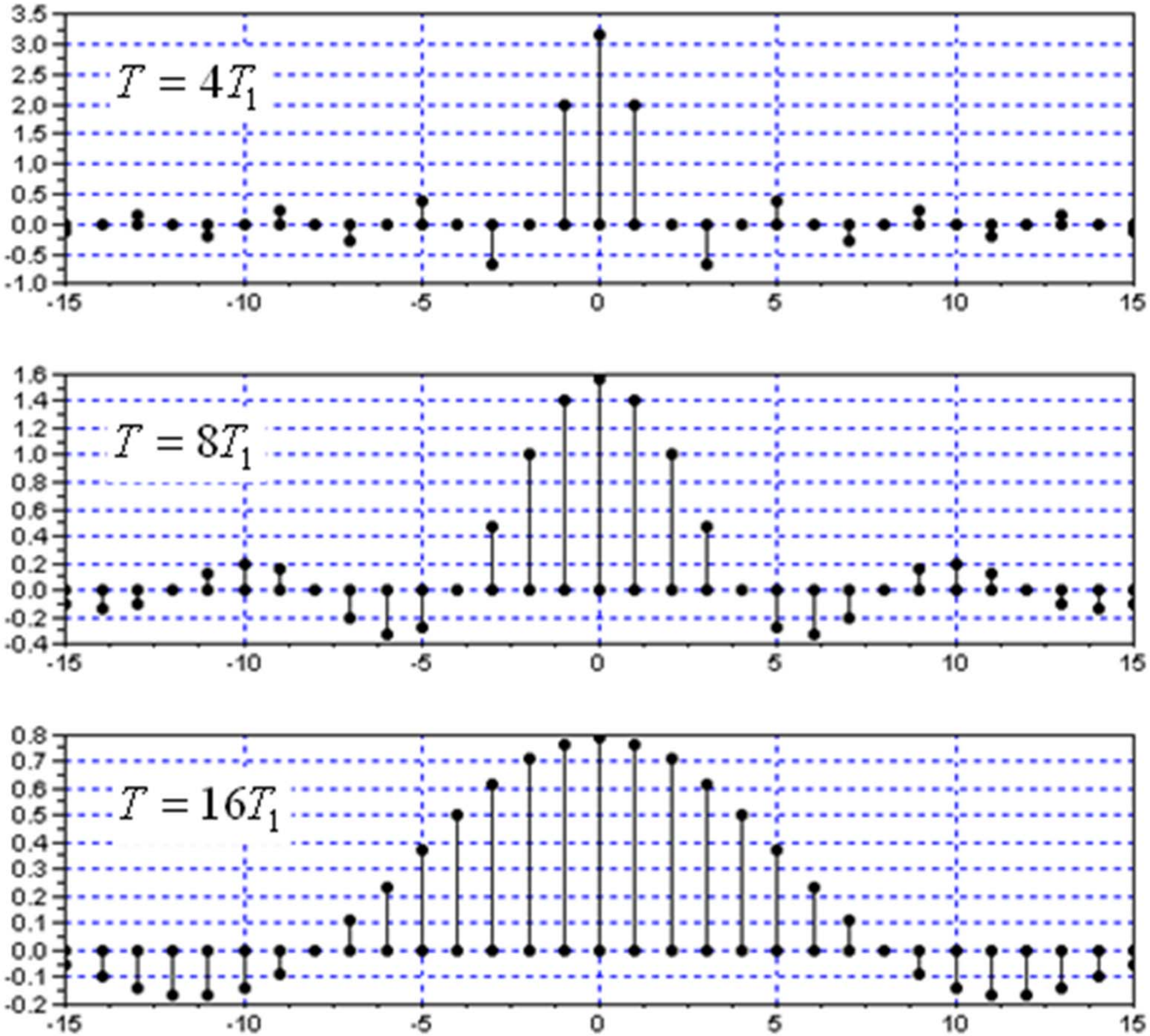
เมื่อ $g(t) = \Pi(t / T_1)$ คือสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีคู่การแปลงฟูเรียร์คือ

$$\Pi(t / T_1) \xleftrightarrow{CtFT} 2T_1 \operatorname{sinc}(\omega T_1)$$

ดังนั้นจากสมการ (6.35) จะได้ว่าผลการแปลงฟูเรียร์ของ $x(t)$ คือ

$$X(j\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2T_1 \operatorname{sinc}(k\omega_0 T_1)\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

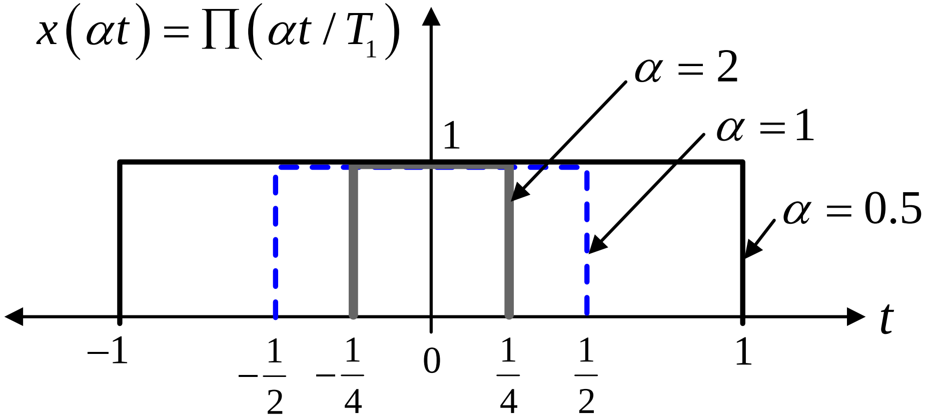

$T = 4T_1$
$T = 8T_1$
$T = 16T_1$

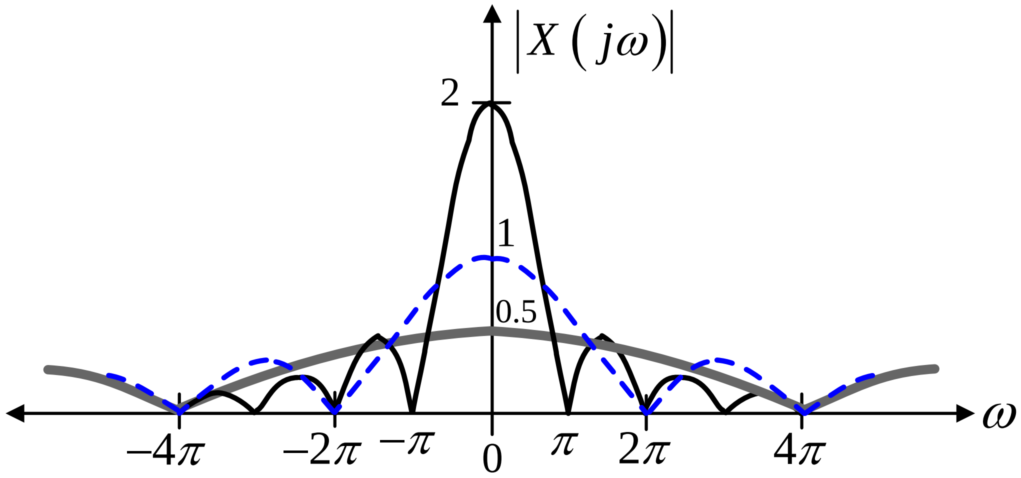
คุณสมบัติ CtFT

- คู่การแปลงฟูเรียร์ $x(t) \xleftrightarrow{CtFT} X(j\omega)$ $y(t) \xleftrightarrow{CtFT} Y(j\omega)$
- คุณสมบัติเชิงเส้น $ax(t)+by(t) \xleftrightarrow{CtFT} aX(j\omega)+bY(j\omega)$
- คุณสมบัติการเลื่อนเวลา $x(t-t_0) \xleftrightarrow{CtFT} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
- คุณสมบัติการเลื่อนความถี่ $e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{CtFT} X(j(\omega-\omega_0))$
- คุณสมบัติการพับทางเวลา $x(-t) \xleftrightarrow{CtFT} X(-j\omega)$
- คุณสมบัติอนุพันธ์ $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{CtFT} (j\omega)^n X(j\omega)$

$$(-jt)^n x(t) \xleftrightarrow{CtFT} \frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}$$

- คุณสมบัติการสเกลทางเวลา $x(\alpha t) \xleftrightarrow{CtFT} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)$





- คุณสมบัติการคูณ $x(t)y(t) \xleftrightarrow{CtFT} X(j\omega) * Y(j\omega)$

- คุณสมบัติการทำคอนโวลูชัน $x(t) * y(t) \xleftrightarrow{CtFT} X(j\omega)Y(j\omega)$

- คุณสมบัติการสังยุค $x^*(t) \xleftrightarrow{CtFT} X^*(-j\omega)$

- คุณสมบัติทวิภาวะ $x(t) \xleftrightarrow{CtFT} X(j\omega)$ ⇔ $X(t) \xleftrightarrow{CtFT} 2\pi x(-j\omega)$

- คุณสมบัติการหาปริพันธ์ $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{CtFT} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$

$$-\frac{1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{CtFT} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\theta)d\theta$$

- พื้นที่ใต้กราฟ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(0)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = x(0)$$

- ความสัมพันธ์ของพาร์ซิวาล $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$

$|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ เรียกว่าความเข้มของพลังงาน

$|X(j\omega)|^2 = X(j\omega)X^*(j\omega)$ เรียกว่าสเปกตรัมความหนาแน่นพลังงาน

พิสูจน์

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}\,d\omega\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)X(j\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$$

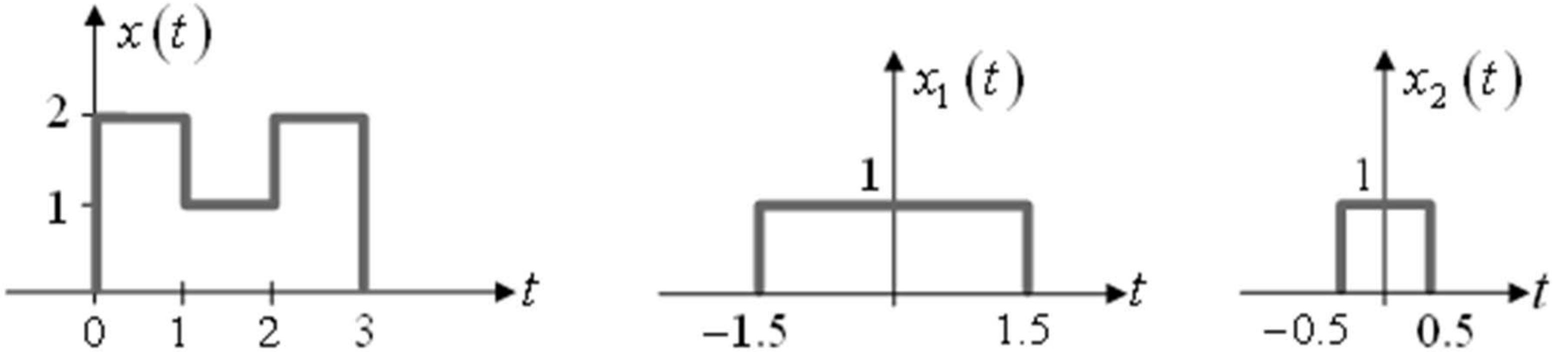
- ทฤษฎีบทพลังงานของเรย์ลี $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega$

สัญญาณ $x(t)$	สเปกตรัมความถี่ $X(j\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$u(t)$	$1/j\omega+\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$e^{-at}u(t),\ a>0$	$1/(a+j\omega)$
$te^{-at}u(t),\ a>0$	$1/(a+j\omega)^2$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ a>0$	$1/(a+j\omega)^n$
$e^{-a\|t\|},\ a>0$	$2a/(a^2+\omega^2)$

สัญญาณ $x(t)$	สเปกตรัมความถี่ $X(j\omega)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\omega^2/4\pi}$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t),\ a>0$	$\dfrac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t),\ a>0$	$\dfrac{\omega}{(j\omega+a)^2+\omega^2}$
$\dfrac{\sin(Wt)}{\pi t}=\dfrac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wt)$	$X(j\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<W\\ 0, & \text{else}\end{cases}$
$x(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T_1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$	$\dfrac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}=2T_1\mathrm{sinc}(\omega T_1)$
$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$	$\dfrac{2}{j\omega}$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$	$\dfrac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\dfrac{2\pi k}{T}\right)$

Example 5

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$



วิธีทำ สัญญาณ $x(t)$ เขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้คือ $x(t)=2x_1(t-1.5)-x_2(t-1.5)$

เนื่องจากสัญญาณพัลส์รูปสี่เหลี่ยมมีคู่การแปลงฟูเรียร์คือ $\Pi\left(\frac{t}{T_1}\right) \xleftrightarrow{CtFT} \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$

ซึ่งจะได้ $X_1(j\omega)=\frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$ และ $X_2(j\omega)=\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$

ดังนั้น $X(j\omega)=2e^{-j1.5\omega}X_1(j\omega)-e^{-j1.5\omega}X_2(j\omega)$ $=2e^{-j1.5\omega}\left\{\frac{2\sin(3\omega/2)-\sin(\omega/2)}{\omega}\right\}$

Exercise 2

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $y(t)=\dfrac{2}{1+t^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $e^{-a|t|} \xleftrightarrow{CtFT} 2a/\left(a^2+\omega^2\right)$ ดังนั้นถ้า $a=1$ จะได้

$$x(t)=e^{-|t|} \xleftrightarrow{CtFT} X(j\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

หรือเขียนได้ว่า $e^{-|t|}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)e^{j\omega t}d\omega$

คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย 2π และแทนค่า $t=-t$ จะได้ $2\pi e^{-|t|}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)e^{-j\omega t}d\omega$

ทำการเปลี่ยนตัวแปรระหว่าง t และ ω จะได้ว่า $2\pi e^{-|\omega|}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)e^{-j\omega t}dt=Y(j\omega)$

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $y(t)$ คือ $\mathcal{F}\left[\dfrac{2}{1+t^2}\right]=2\pi e^{-|\omega|}$

Example 6

กำหนดให้สัญญาณอินพุตและผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ LTI คือ $x(t) = e^{-at}u(t)$ และ $h(t) = e^{-bt}u(t)$ เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$ ตามลำดับ จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ

วิธีทำ เนื่องจาก $x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(j\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega}$

และ $h(t) = e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{CTFT} H(j\omega) = \dfrac{1}{b + j\omega}$

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์ของ $y(t)$ คือ

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)}$$

ในกรณีที่ $a \neq b$ จะได้ $Y(j\omega) = \dfrac{A}{a+j\omega} + \dfrac{B}{b+j\omega}$ $\Rightarrow$ $Y(j\omega) = \dfrac{1}{b-a}\left\{\dfrac{1}{a+j\omega} - \dfrac{1}{b+j\omega}\right\}$

ใช้การแปลงฟูเรียร์ผกผันเพื่อหาค่า $y(t)$ จะได้

$$y(t) = \frac{1}{b-a}\left\{e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)\right\}$$

ในกรณีที่ $a = b$ จะได้ $Y(j\omega) = \dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$ เนื่องจาก $\dfrac{1}{(a+j\omega)^2} = j\dfrac{d}{d\omega}\left[\dfrac{1}{a+j\omega}\right]$

อาศัยคุณสมบัติการหาอนุพันธ์ และคู่การแปลงฟูเรียร์ $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{CtFT} \dfrac{1}{a+j\omega}$ ดังนั้น

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{CtFT} j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{a+j\omega}\right] = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

เพราะฉะนั้นสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ มีค่าเท่ากับ $y(t) = te^{-at}u(t)$

ผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา

- ระบบ LTI ถูกกำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์คงตัวแบบเชิงเส้น

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ N

การหาผลตอบสนองเชิงความถี่

กำหนดให้ $x(t) \xleftrightarrow{CtFT} X(j\omega)$ และ $y(t) \xleftrightarrow{CtFT} Y(j\omega)$ $\Rightarrow$ หาผลการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right] = \mathcal{F}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right] \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\left[\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right] = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]$$

อาศัยคุณสมบัติการหาอนุพันธ์จะได้ $\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$

ดังนั้นผลตอบสนองอิมพัลส์ในโดเมนความถี่คือ $H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$

Exercise 3

พิจารณาระบบ LTI ที่กำหนดโดย $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\dfrac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+2x(t)$

ก) จงหาผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ของระบบนี้

ข) จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ เมื่อสัญญาณอินพุตคือ $x(t)=e^{-t}u(t)$

วิธีทำ หาผลการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้างของข้อ ก) จะได้

$$(j\omega)^2Y(j\omega)+4(j\omega)Y(j\omega)+3Y(j\omega)=(j\omega)X(j\omega)+2X(j\omega)$$

ดังนั้นผลตอบสนองอิมพัลส์ในโดเมนความถี่คือ

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}=\frac{0.5}{j\omega+1}+\frac{0.5}{j\omega+3}$$

อาศัยการแปลงฟูเรียร์ผกผันจะได้ $h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[H(j\omega)\right]=\dfrac{1}{2}\left[e^{-t}+e^{-3t}\right]u(t)$

ข) เนื่องจากผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณอินพุตคือ $X(j\omega) = \mathcal{F}\left[e^{-t}u(t)\right] = \dfrac{1}{j\omega+1}$

สัญญาณเอาต์พุตในโดเมนความถี่ $Y(j\omega)$ หาได้จาก

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}\left[\frac{1}{j\omega+1}\right] = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

ทำการกระจายเศษส่วนย่อยจะได้ $Y(j\omega) = \dfrac{A_{11}}{(j\omega+1)} + \dfrac{A_{12}}{(j\omega+1)^2} + \dfrac{A_{21}}{(j\omega+3)}$

จากการแก้สมการเพื่อหาค่า A_{11} , A_{11} , และ A_{21} จะได้ว่า $A_{11} = \dfrac{1}{4}$, $A_{12} = \dfrac{1}{2}$ และ $A_{21} = -\dfrac{1}{4}$

ดังนั้นอาศัยการแปลงฟูเรียร์ผกผันจะได้ $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[Y(j\omega)\right] = \left[\dfrac{1}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^{-t} - \dfrac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)$

การส่งสัญญาณที่ไม่มีความผิดเพี้ยน

- สัญญาณที่ส่งผ่านระบบ LTI จะ**ไม่มีความผิดเพี้ยน** ก็ต่อเมื่อสัญญาณเอาต์พุต**ต้อง**มีรูปร่างเหมือนกับสัญญาณอินพุต แต่อาจมีแอมพลิจูดเปลี่ยนไปหรืออาจมีการหน่วงเวลาของสัญญาณ
  - สัญญาณเอาต์พุตของระบบต้องอยู่ในรูปของ

$$y(t) = Kx(t - t_d) \Rightarrow Y(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d} X(j\omega)$$

เมื่อ K คือค่าคงตัว และ t_d คือปริมาณเวลาที่ถูกหน่วง

  - หาผลการแปลงฟูเรียร์ $Y(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d} X(j\omega)$

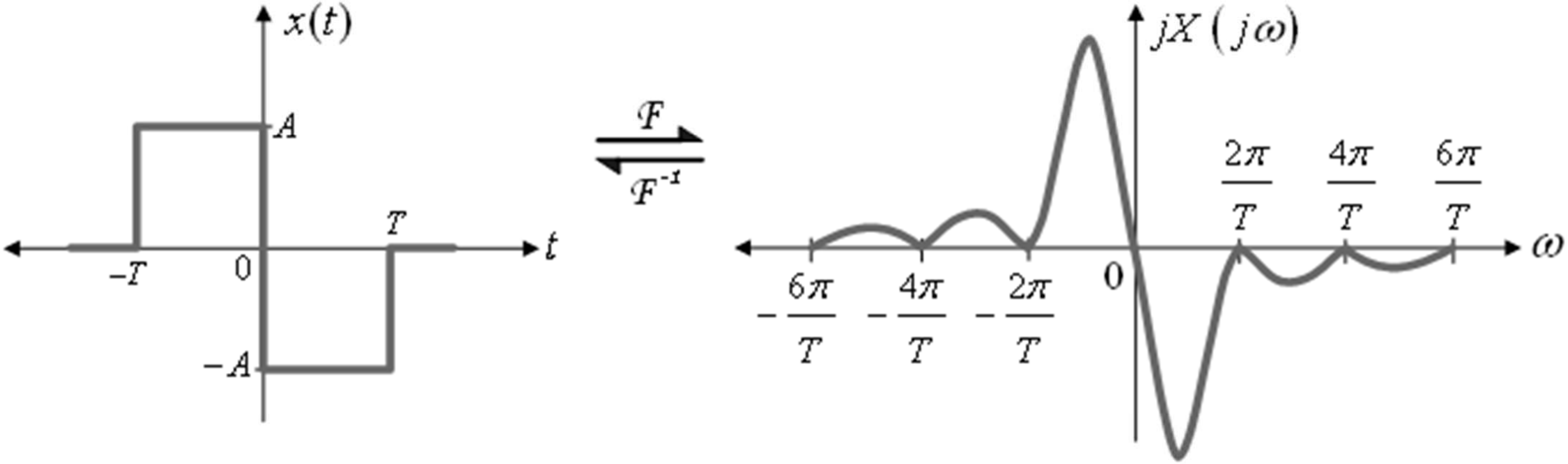
ระบบ LTI **ไม่ก่อให้เกิดความผิดเพี้ยน** ก็ต่อเมื่อ $H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d} = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$

ถ้า $|H(j\omega)| \neq K$ หมายถึงระบบ LTI ก่อให้เกิดความผิดเพี้ยนเชิงแอมพลิจูด

ถ้า $\angle H(j\omega) \neq e^{-j\omega t_d}$ หมายถึงระบบ LTI ก่อให้เกิดความผิดเพี้ยนเชิงเฟส

Example 7

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณพัลส์รูปดับเลต



วิธีทำ สัญญาณพัลส์รูปดับเลต $x(t)$ เกิดจาก $x(t) = A\Pi\left(\frac{t+T/2}{T/2}\right) - A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right)$

โดยการหาผลแปลงฟูเรียร์จะได้ $A\Pi\left(\frac{t+T/2}{T/2}\right)\xleftrightarrow{CTFT} e^{j\omega T/2}AT\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

และ $A\Pi\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right)\xleftrightarrow{CTFT} e^{-j\omega T/2}AT\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

อาศัยคุณสมบัติเชิงเส้น $\Rightarrow$ ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $x(t)$ มีค่าเท่ากับ

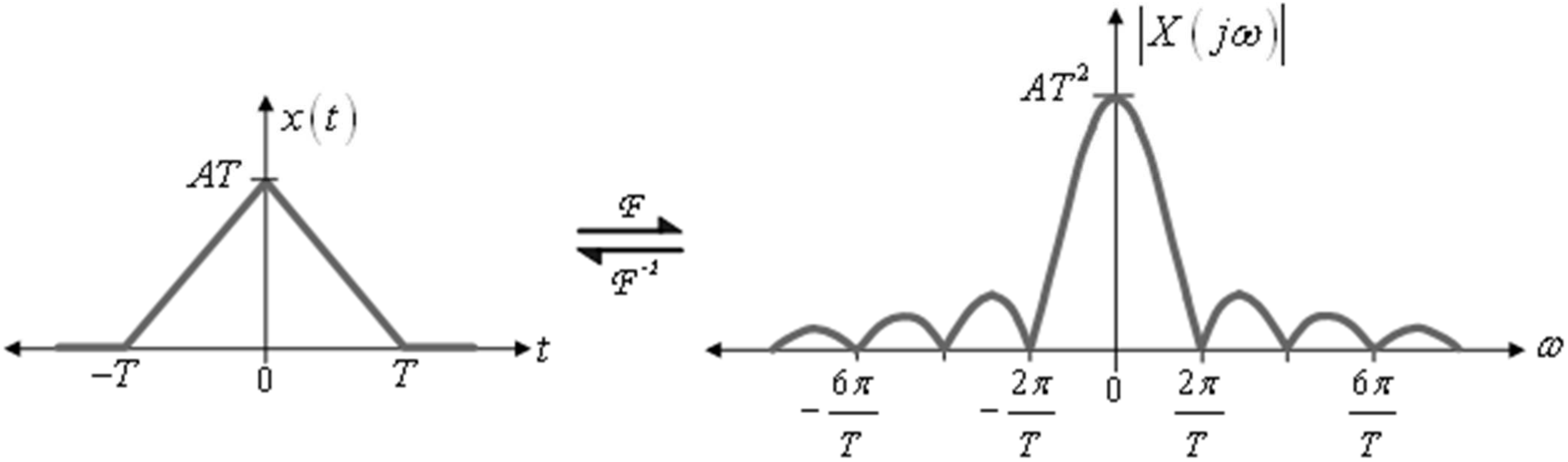
$$X(j\omega) = AT\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\left[e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}\right]$$

$$= 2jAT\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

เมื่อ $j=\sqrt{-1}$ คือหน่วยจินตภาพ

Exercise 4

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณพัลส์รูปสามเหลี่ยม



วิธีทำ สัญญาณพัลส์รูปสามเหลี่ยม $x(t)$ มีรูปสมการคณิตศาสตร์คือ

$$x(t) = A\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A\left(1-\frac{|t|}{T}\right), & |t| < T \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

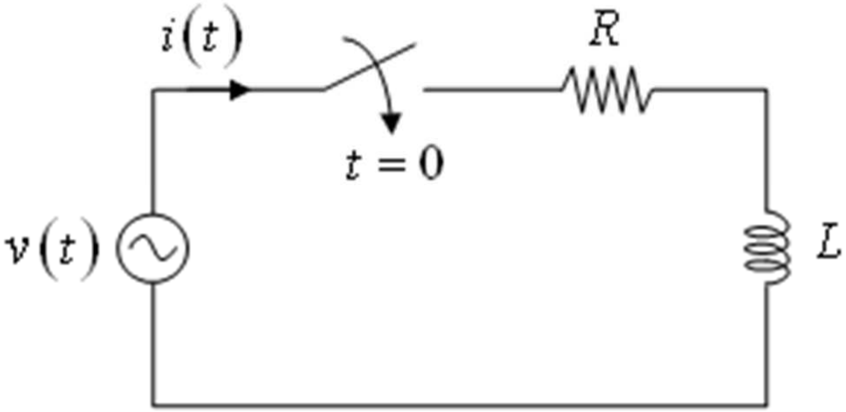
เนื่องจากสัญญาณพัลส์รูปสามเหลี่ยมนี้เกิดจากการหาปริพันธ์ของสัญญาณพัลส์รูปดับเลต

ดังนั้นผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณพัลส์รูปสามเหลี่ยมนี้หาได้โดยอาศัยคุณสมบัติการหาปริพันธ์ทางเวลา ซึ่งจะได้

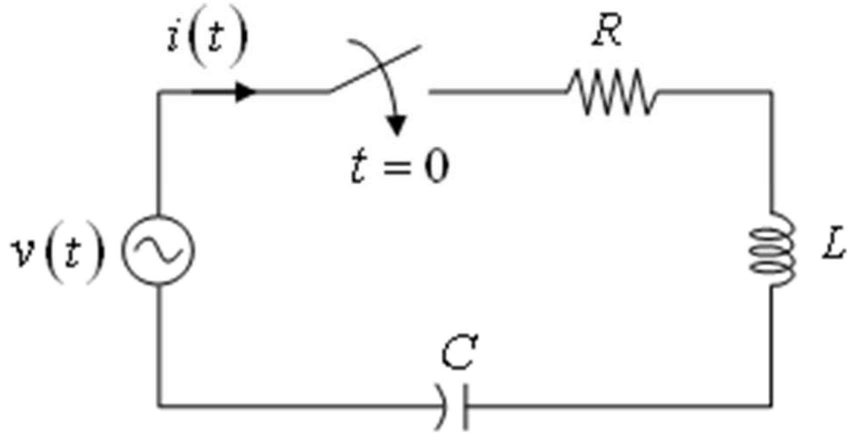
$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\left[2jAT\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right] = AT^2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Exercise 8

พิจารณาวงจรไฟฟ้าแบบ RL และแบบ RLC



(ก) วงจรไฟฟ้าแบบ RL



(ข) วงจรไฟฟ้าแบบ RLC

เมื่อ R, L, และ C คือค่าคงตัว และ $v(t)$ คือแหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้า จงหาฟังก์ชันถ่ายโอนของ

ก) วงจรไฟฟ้าแบบ RL

ข) วงจรไฟฟ้าแบบ RLC

วิธีทำ ให้ $v(t) \xleftrightarrow{CtFT} V(j\omega)$ คือคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณอินพุต, $i(t) \xleftrightarrow{CtFT} I(j\omega)$ คือคู่การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเอาต์พุต, และ $h(t) \xleftrightarrow{CtFT} H(j\omega)$ คือคู่การแปลงฟูเรียร์ของผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรไฟฟ้า ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนนิยามโดย $H(j\omega) = V(j\omega)/I(j\omega)$

ก) จากกฎแรงดันของเคิร์ชฮอฟฟ์จะได้ $$Ri(t) + L\frac{di}{dt} = v(t)$$

หาผลการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้าง $$RI(j\omega) + L\{j\omega I(j\omega)\} = V(j\omega)$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรไฟฟ้าแบบ RL คือ $$H(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V(j\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L}$$

ข) ในทำนองเดียวกันจากกฎแรงดันของเคิร์ชฮอฟฟ์จะได้ว่า

$$Ri(t)+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt=v(t)$$

หาผลการแปลงฟูเรียร์ทั้งสองข้างจะได้

$$RI(j\omega)+L\{j\omega I(j\omega)\}+\frac{I(j\omega)}{Cj\omega}=V(j\omega)$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรไฟฟ้าแบบ RLC คือ

$$H(j\omega)=\frac{I(j\omega)}{V(j\omega)}=\frac{1}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}$$

การกรองสัญญาณ

- เป็นตัวดำเนินการพื้นฐานที่สำคัญในระบบการประมวลผลสัญญาณ
- เป็นกระบวนการที่ทำให้แอมพลิจูดของสัญญาณในโดเมนความถี่เปลี่ยนแปลงไปหรือทำให้หมดไป
- ระบบ LTI มีลักษณะเป็นวงจรกรองที่ทำหน้าที่เลือกความถี่ของสัญญาณอินพุต

วงจรกรองเลือกความถี่อุดมคติ

- วงจรกรองเลือกความถี่อุดมคติ $\Rightarrow$ ยอมให้แถบความถี่ชุดหนึ่งผ่านไปได้ทั้งหมด ในขณะที่ไม่ยอมให้แถบความถี่อีกชุดหนึ่งผ่าน
  - ช่วงแถบความถี่ที่วงจรกรองยอมให้ผ่านไปได้เรียกว่า**แถบความถี่ผ่าน** (pass band
  - ช่วงแถบความถี่ที่ไม่ยอมให้ผ่านไปได้เรียกว่า**แถบความถี่หยุด** (stop band)”

วงจรกรองผ่านต่ำอุดมคติ

$$\left|H(j\omega)\right| = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

วงจรกรองผ่านสูงอุดมคติ

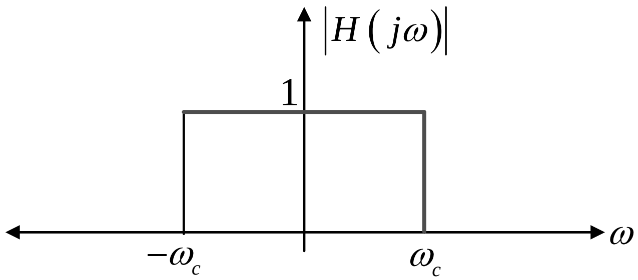
$$\left|H(j\omega)\right| = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ 1, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

วงจรกรองผ่านแถบอุดมคติ

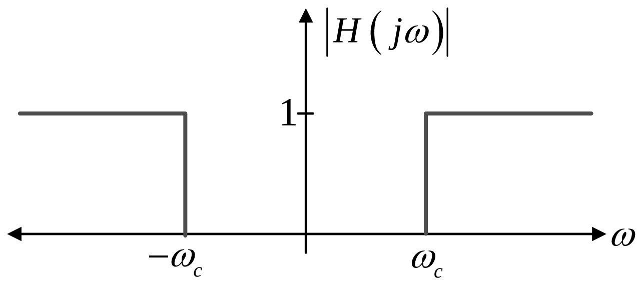
$$\left|H(j\omega)\right| = \begin{cases} 1, & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

วงจรกรองแถบหยุดอุดมคติ

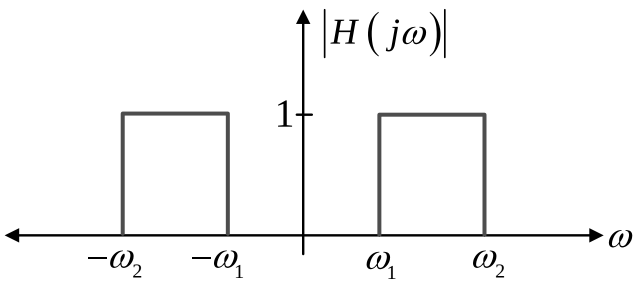
$$\left|H(j\omega)\right| = \begin{cases} 0, & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 1, & \text{else} \end{cases}$$



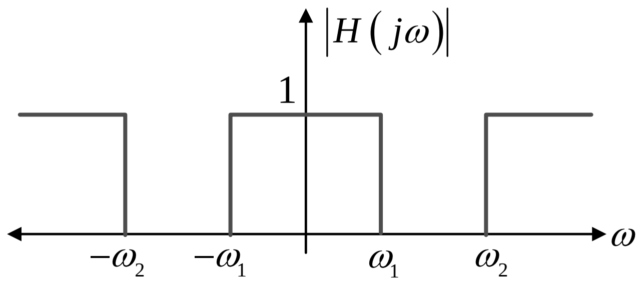
(ก) วงจรกรองผ่านต่ำอุดมคติ



(ข) วงจรกรองผ่านสูงอุดมคติ



(ค) วงจรกรองแถบผ่านอุดมคติ



(ง) วงจรกรองแถบหยุดอุดมคติ

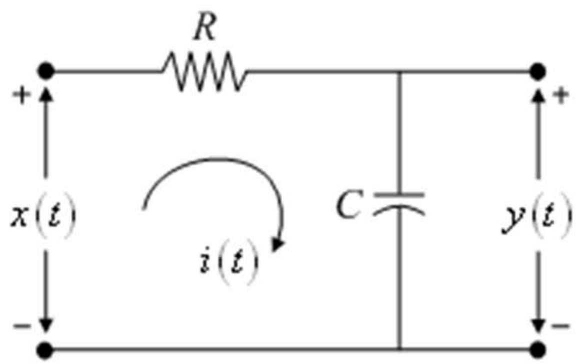
วงจรกรองอุดมคติ $\Rightarrow$ ไม่สามารถสร้างเป็นวงจรอิเล็กทรอนิกส์ได้จริงในทางปฏิบัติ เนื่องจากสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดของวงจรกรองอุดมคติเหล่านั้นมีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน

วงจรกรองเลือกความถี่ในทางปฏิบัติ

วงจรกรองผ่านต่ำ $\Longrightarrow$ สร้างขึ้นได้จากวงจร RC โดยมี

ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตคือ

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$



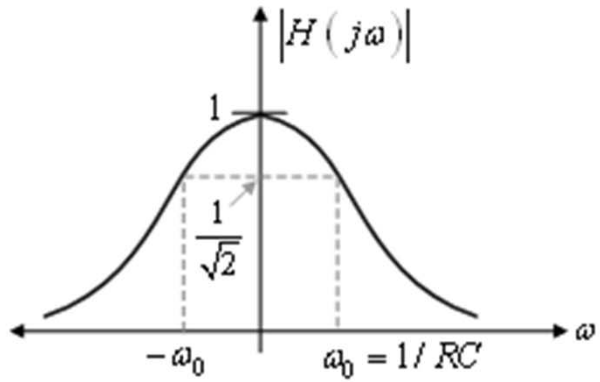
ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ $H(j\omega)$ มีค่าเท่ากับ

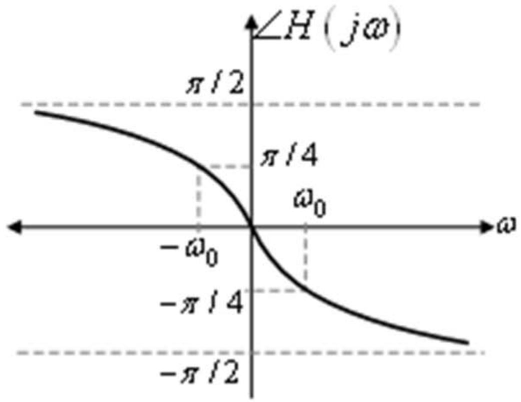
$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{1}{1+j\omega/\omega_0}$$

เมื่อ $\omega_0 = 1/RC$

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{|1+j\omega/\omega_0|}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\angle H(j\omega)=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$





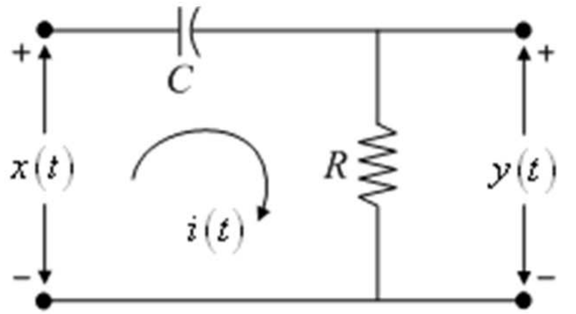
วงจรกรองผ่านสูง ⟹ สร้างขึ้นได้จากวงจร *RC* โดยมี

ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตคือ

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=RC\frac{dx(t)}{dt}$$

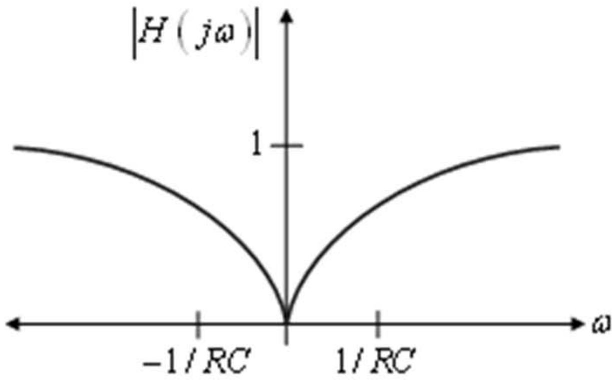
ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบมีค่าเท่ากับ

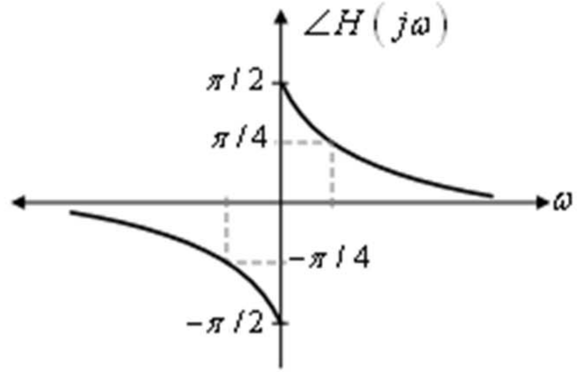
$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}=\frac{R}{R+1/(j\omega C)}$$



โดย $$\left|H(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+1/(\omega RC)^2}}$$

$$\angle H(j\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$



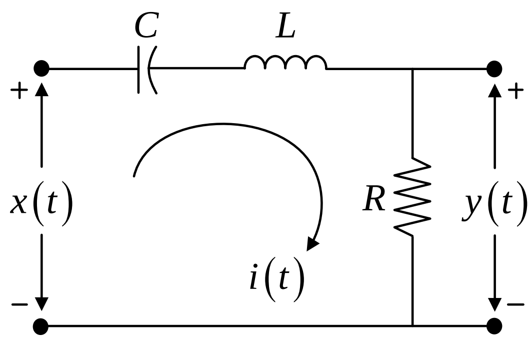


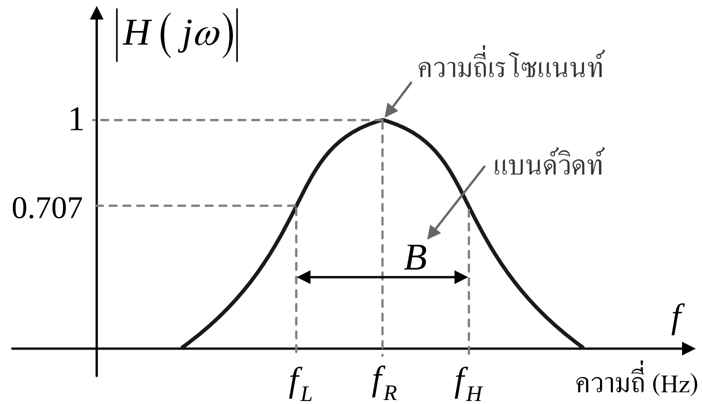
วงจรกรองแถบผ่าน ⟹ เป็นวงจรกรองที่จะยอมให้สัญญาณอินพุตที่มีช่วงความถี่ตามที่กำหนดผ่านไปได้ ส่วนสัญญาณอินพุต ณ ความถี่อื่นๆ จะถูกลดทอนหรือไม่ยอมให้ผ่านวงจรไปได้

- มีฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{R}{j\omega L+1/(j\omega C)+R}$$

- อัตราขยายสัญญาณสูงสุดของวงจรมีค่าเท่ากับ 1 (หรือ 0 เดซิเบล) ณ ความถี่กำธร f_R
- ความถี่ตัดด้านต่ำ f_L คือความถี่ที่ต่ำกว่าความถี่กำธรที่ทำให้อัตราขยายสัญญาณมีค่าเท่ากับ 0.707
- ความถี่ตัดด้านสูง f_H คือความถี่ที่สูงกว่าความถี่กำธรที่ทำให้อัตราขยายสัญญาณมีค่าเท่ากับ 0.707
- ความถี่แถบผ่านจะอยู่ระหว่าง f_L และ f_H



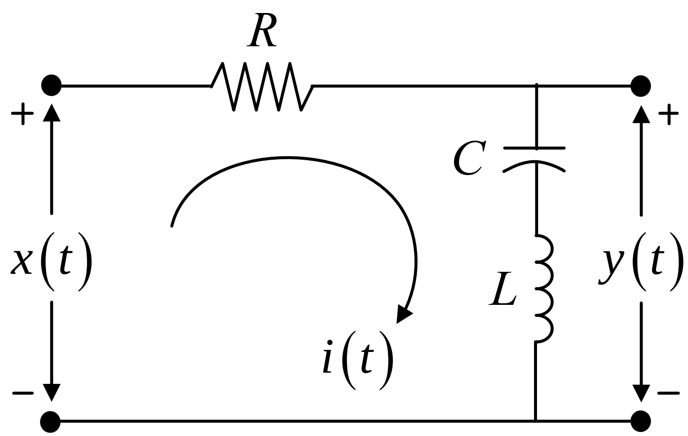


- แบนด์วิดท์ คือความกว้างของแถบความถี่ เช่น แบนด์วิดท์ของวงจรกรองแถบผ่าน $B = f_H - f_L$
- ถ้าทราบค่าความถี่ f_L และ f_H $\Rightarrow$ หาค่าความถี่กำธรได้จาก $f_R = \sqrt{f_L \times f_H}$
- ถ้าทราบค่าความถี่กำธร f_R และแบนด์วิดท์ B $\Rightarrow$ หาค่าความถี่ตัดด้านต่ำและความถี่ตัดด้านสูงได้จาก

$$f_L = \sqrt{\frac{B^2}{4} + f_R^2} - \frac{B}{2} \quad \text{และ} \quad f_H = f_L + B$$

- ตัวประกอบคุณภาพ $Q = \dfrac{f_R}{B}$ $\Rightarrow$ แสดงให้เห็นถึงแถบความถี่ผ่านของวงจร กล่าวคือถ้าตัวประกอบคุณภาพมีค่าสูงจะบอกถึงแถบความถี่ผ่านที่แคบ (และในทางกลับกัน)

วงจรกรองแถบหยุด $\Rightarrow$ สร้างขึ้นได้จากวงจร RLC โดยมีฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ



$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega L + 1/(j\omega C)}{j\omega L + 1/(j\omega C) + R}$$