สัญญาณและระบบ

ระบบ LTI ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (5-6)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

http://home.npru.ac.th/piya

Outline

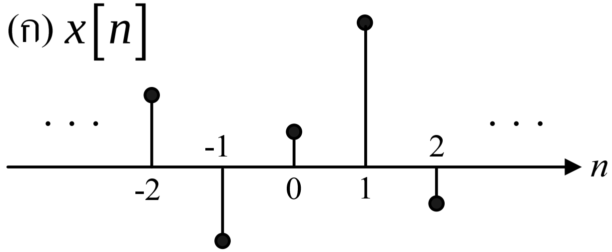
- การแสดงสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา
- ผลรวมคอนโวลูชัน
- ผลตอบสนองอิมพัลส์และผลตอบสนองขั้นบันได
- คุณสมบัติของระบบ LTI
- สมการเชิงผลต่าง
- แผนภาพบล็อก
- สหสัมพันธ์

การแสดงสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา

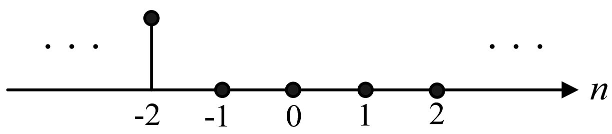
- สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $\Rightarrow$ แสดงให้อยู่ในรูปของผลรวมถ่วงน้ำหนักของสัญญาณโครเนกเกอร์เดลตา

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

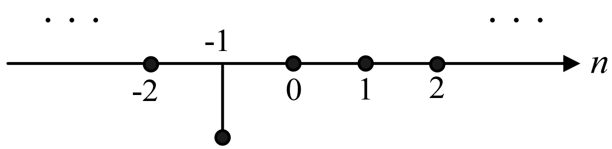
(ก) $x[n]$



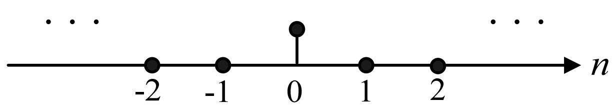
(ข) $x[-2]\delta[n+2]$



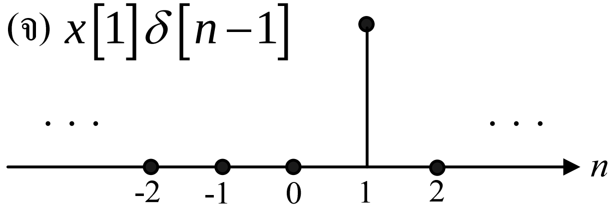
(ค) $x[-1]\delta[n+1]$



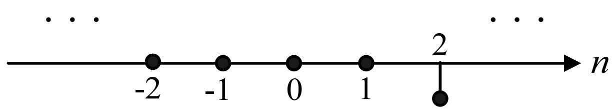
(ง) $x[0]\delta[n]$



(จ) $x[1]\delta[n-1]$



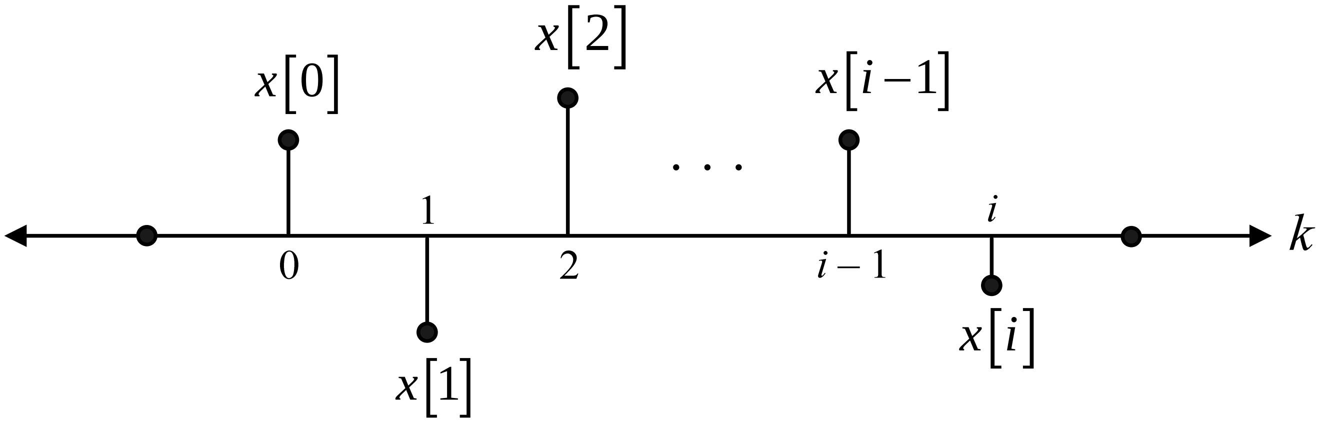
(ฉ) $x[2]\delta[n-2]$



$$x[n]=\ldots+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+\ldots$$

❑ สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา x[n] เขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้คือ

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



ซึ่งหมายความว่าสัญญาณ $x[n]$ คือผลรวมเชิงเส้นของสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วยที่ถูกเลื่อนเวลา $\delta[n-k]$ และถูกถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $x[k]$

หมายเหตุ ในที่นี้จะเรียกข้อมูล $x[k]$ แต่ละตัวว่า "แซมเปิล (sample)" และแซมเปิลหลายๆ แซมเปิลที่เรียงต่อกันเป็นชุด เช่น $\{x[0], x[1], x[2], \ldots, x[i]\}$ เรียกว่า "ลำดับข้อมูล (data sequence)"

ผลรวมคอนโวลูชัน

- กำหนดให้ h[n] คือผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วยของระบบ LTI
  - สัญญาณเอาต์พุตของระบบเมื่อสัญญาณอินพุตเป็น $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$

- ถ้าสัญญาณอินพุตคือ x[n] $\Rightarrow$ สัญญาณเอาต์พุตหรือผลตอบสนองของระบบคือ

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

- เนื่องจากระบบนี้เป็นระบบ LTI $\Rightarrow$ $h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$
- ผลรวมคอนโวลูชัน (convolution sum)

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

= **convol**(Xn, Hn)

Example 1

จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณอินพุตคือ $x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบคือ $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

วิธีทำ สัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI หาได้จาก $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[n-k]$

โดยที่ช่วงการหาผลรวมลดลงเป็นจาก $k=0$ ถึง $k=2$ เพราะว่าสัญญาณ $x[n]$ มีค่าเฉพาะช่วงเวลาที่ $n=0, 1,$ และ 2 เท่านั้น

ช่วงเวลาที่ $n<0$ จะได้ว่า $y[n]=0$ เนื่องจาก $h[n-k]=0$ สำหรับ $k=0, 1,$ และ 2

ช่วงเวลาที่ $n=0$ จะได้ว่า

$$y[0]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[0-k]=x[0]h[0]+x[1]h[-1]+x[2]h[-2] =(1)(1)+(2)(0)+(1)(0)=1$$

ช่วงเวลาที่ $n=1$ จะได้ว่า

$$y[1]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[1-k]=x[0]h[1]+x[1]h[0]+x[2]h[-1] =(1)(-1)+(2)(1)+(1)(0)=1$$

ช่วงเวลาที่ $n=2$ จะได้ว่า

$$y[2]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[2-k]=x[0]h[2]+x[1]h[1]+x[2]h[0]\ =(1)(0)+(2)(-1)+(1)(1)=-1$$

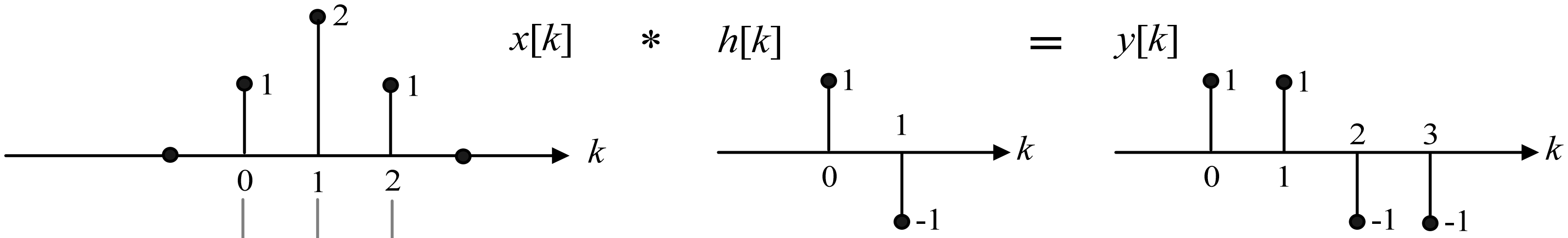
ช่วงเวลาที่ $n=3$ จะได้ว่า

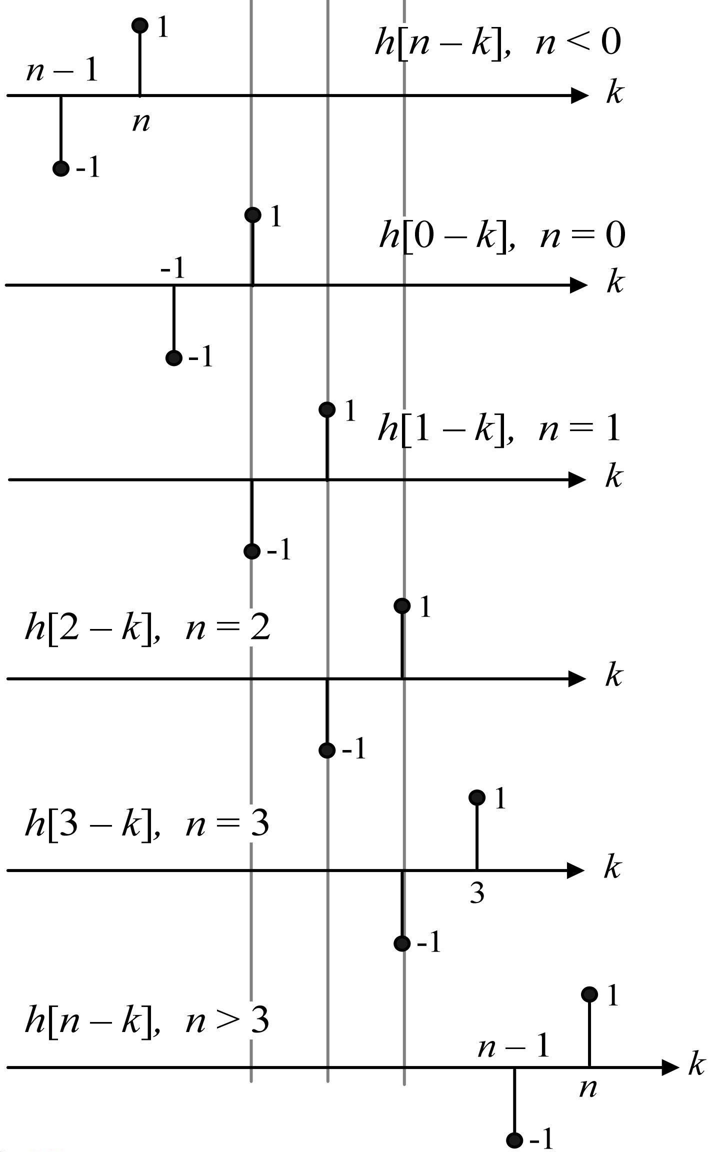
$$y[3]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[3-k]=x[0]h[3]+x[1]h[2]+x[2]h[1]\ =(1)(0)+(2)(0)+(1)(-1)=-1$$

ช่วงเวลาที่ $n>3$ จะได้ว่า $y[n]=0$ เนื่องจาก $h[n-k]=0$ สำหรับ $k=0, 1,$ และ 2

ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากการทำคอนโวลูชันคือ

$$y[n]=\delta[n]+\delta[n-1]-\delta[n-2]-\delta[n-3]$$





$y[n]=0$ เมื่อ $n<0$

$y[0]=(0)(-1)+(1)(1)=1$

$y[1]=(1)(-1)+(2)(1)=1$

$y[2]=(2)(-1)+(1)(1)=-1$

$y[3]=(1)(-1)+(0)(1)=-1$

$y[n]=0$ เมื่อ $n>3$

ข้อสังเกต การทำคอนโวลูชันที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาคือ จำนวนข้อมูลของผลลัพธ์ที่ได้จากการทำคอนโวลูชันมีค่าเท่ากับจำนวนข้อมูลของสัญญาณทั้งสองรวมกันแล้วลบด้วยค่าหนึ่งเสมอ

Example 2

กำหนดให้สัญญาณอินพุต $x[n]$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ $h[n]$ ของระบบ LTI คือ $x[n]=a^n u[n]$ และ $h[n]=u[n]$ เมื่อ $|a|<1$ และ $u[n]$ คือสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย จงคำนวณหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบนี้

วิธีทำ สัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI หาได้จาก

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a^k u[k]\right)u[n-k]$$

เนื่องจาก $u[k]=1$ สำหรับ $k\geq 0$ และ $u[n-k]=1$ สำหรับ $n-k\geq 0$ หรือ $k\leq n$ ดังนั้นช่วงการหาผลรวมจะลดลงเป็นจาก $k=0$ ถึง $k=n$ ดังนี้

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{สำหรับ } n\geq 0 \quad \Rightarrow \quad y[n]=\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)u[n]$$

Example 3

จงคำนวณหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบ LTI เมื่อ

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 3\\ 0, & \text{else}\end{cases} \quad \text{และ} \quad h[n]=\begin{cases}a^n, & 0\le n\le 4\\ 0, & \text{else}\end{cases} \quad \text{สำหรับ } a>1$$

วิธีทำ การคำนวณหาสัญญาณเอาต์พุตของระบบนี้ให้พิจารณาออกเป็น 5 ช่วง ดังนี้

ช่วงเวลาที่ $n<0$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $x[k]$ และ $h[n-k]$ มาทับซ้อนกัน ดังนั้น

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[n-k]=0$$

เนื่องจาก $h[n-k]=0$ สำหรับ $k=0, 1,$ และ 2

ช่วงเวลาที่ $0\le n\le 2$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h[n-k]$ เริ่มทับซ้อนกับสัญญาณ $x[k]$ จนถึงช่วงเวลาที่สัญญาณ $h[n-k]$ ทับซ้อน $x[k]$ ทั้งหมด เพราะฉะนั้น

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k} \implies y[n]=\sum_{r=0}^{n}a^{r}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$ (เปลี่ยนตัวแปร n-k = r)

ช่วงเวลาที่ $2 \le n \le 4$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h[n-k]$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x[k]$ ทั้งหมดตั้งแต่ครั้งแรกจนถึงครั้งสุดท้าย ดังนั้น

$$y[n]=\sum_{k=0}^{2}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{2}a^{n-k}=a^n\sum_{k=0}^{2}\left(a^{-1}\right)^k=a^n\frac{1-\left(a^{-1}\right)^{2+1}}{1-\left(a^{-1}\right)}=\frac{a^n-a^{n-3}}{1-a^{-1}}=\frac{a^{n-2}-a^{n+1}}{1-a}$$

ช่วงเวลาที่ $4 \le n \le 6$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h[n-k]$ เริ่มเคลื่อนที่ออกจากการทับซ้อนกับสัญญาณ $x[k]$ ทั้งหมด จนถึงช่วงเวลาที่สัญญาณ $h[n-k]$ ทับซ้อนกับ $x[k]$ ตัวสุดท้าย ดังนั้น

$$y[n]=\sum_{k=n-4}^{2}x[k]h[n-k]=\sum_{k=n-4}^{2}a^{n-k}$$

กำหนดให้ $r=k-n+4$ จะได้ว่า

$$y[n]=\sum_{r=0}^{6-n}a^{4-r}=a^4\sum_{r=0}^{6-n}\left(a^{-1}\right)^r=a^4\frac{1-\left(a^{-1}\right)^{6-n+1}}{1-\left(a^{-1}\right)}=a^4\frac{1-a^{n-7}}{1-a^{-1}}=\frac{a^4-a^{n-3}}{1-a^{-1}}=\frac{a^{n-2}-a^5}{1-a}$$

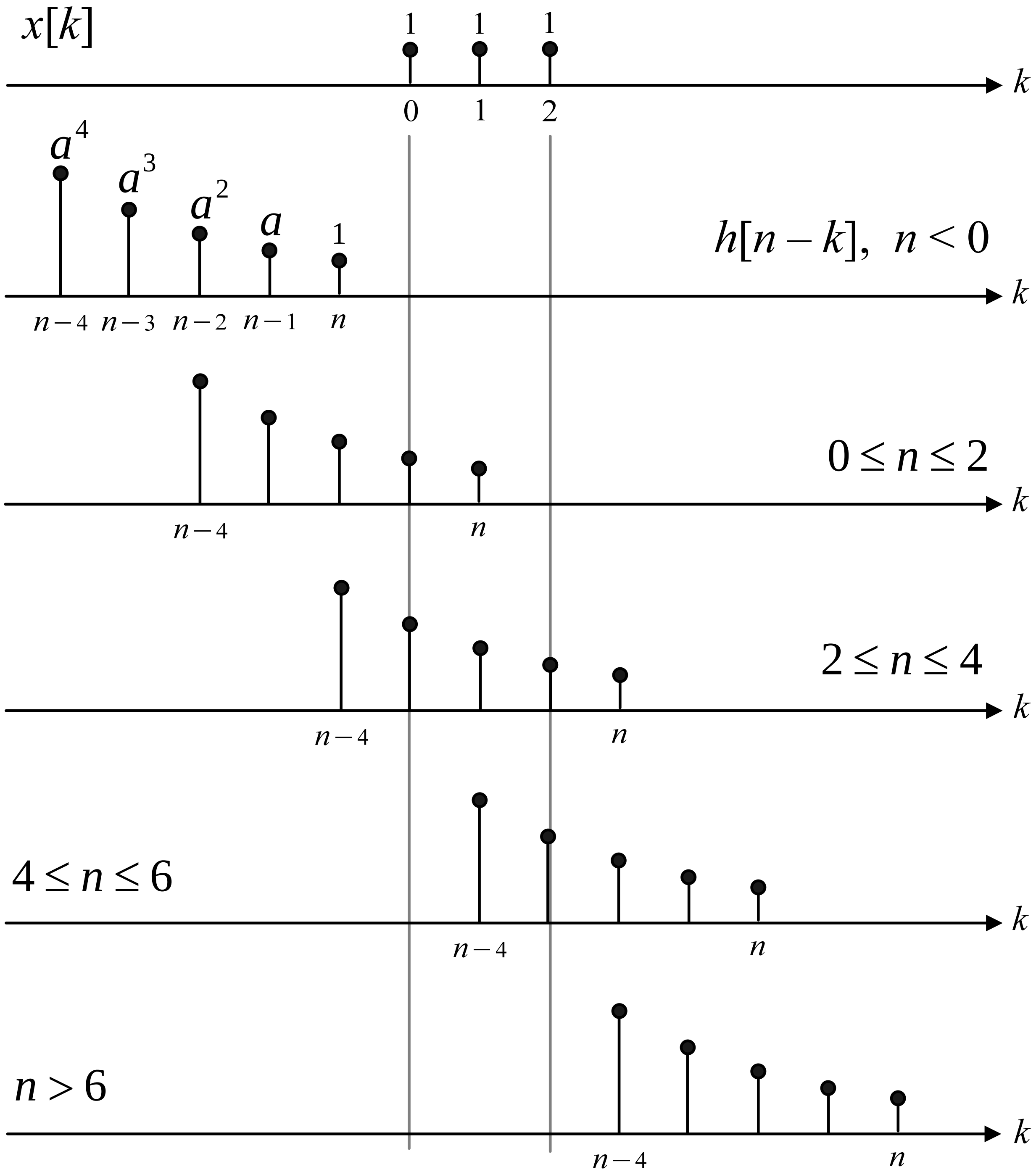
ช่วงเวลาที่ $n > 6$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $x[k]$ และ $h[n-k]$ มาทับซ้อนกัน ดังนั้น

$$y[n] = \sum_{k=0}^{2} x[k]h[n-k] = 0$$

เนื่องจาก $h[n-k] = 0$ สำหรับ $k = 0, 1,$ และ 2

ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI มีค่าเท่ากับ

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \le n \le 2 \\ \dfrac{a^{n-2} - a^{n+1}}{1-a}, & 2 \le n \le 4 \\ \dfrac{a^{n-2} - a^{5}}{1-a}, & 4 \le n \le 6 \\ 0, & n > 6 \end{cases}$$



$$y[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0\le n\le 2\\ \dfrac{a^{n-2}-a^{n+1}}{1-a}, & 2\le n\le 4\\ \dfrac{a^{n-2}-a^{5}}{1-a}, & 4\le n\le 6\\ 0, & n>6\end{cases}$$

Exercise 1

จงคำนวณหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณอินพุต $x[n]$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ $h[n]$ ของระบบ คือ $x[n]=a^n u[-n]$ และ $h[n]=u[n]$ สำหรับ $a>1$

วิธีทำ เมื่อพิจารณาสัญญาณ $x[k]$ และ $h[n-k]$ พบว่าการทำคอนโวลูชันแบ่งออกเป็น 2 ช่วงเวลาคือ เมื่อ $n \geq 0$ และ $n<0$ ซึ่งมีรายละเอียดการคำนวณดังนี้

ช่วงเวลาที่ $n \geq 0$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h[n-k]$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x[k]$ ทั้งหมด สำหรับทุกค่า n ดังนั้น

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[-k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{0} a^k=\sum_{r=0}^{\infty}\left(a^{-1}\right)^r=\frac{1}{1-a^{-1}}=\frac{a}{a-1}$$

เมื่อ $\sum_{r=0}^{\infty}\alpha^r=\frac{1}{1-\alpha}$ สำหรับ $0<|\alpha|<1$

ช่วงเวลาที่ $n<0$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h[n-k]$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x[k]$ บางส่วน ดังนั้น

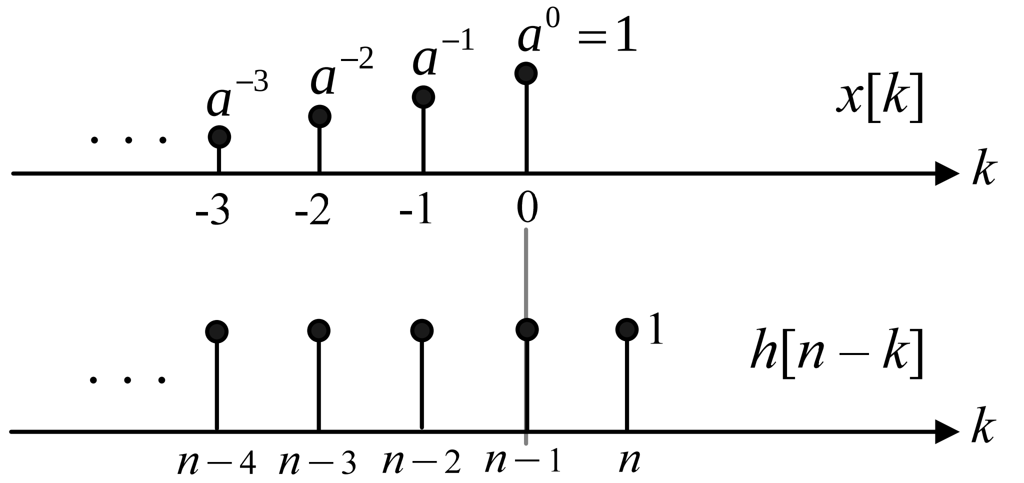
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[-k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n} a^k$$

ถ้ากำหนดให้ $m=-k$ และ $r=m+n$ จะได้ว่า

$$y[n]=\sum_{m=-n}^{\infty} a^{-m}=\sum_{r=0}^{\infty} a^{n-r}=a^n\sum_{r=0}^{\infty}\left(a^{-1}\right)^r=a^n\frac{1}{1-a^{-1}}=\frac{a^{n+1}}{a-1}$$

เพราะฉะนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบคือ

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{a}{a-1}, & n\geq 0\\[2ex] \dfrac{a^{n+1}}{a-1}, & n<0\end{cases}$$



ผลตอบสนองอิมพัลส์และผลตอบสนองขั้นบันได

- ระบบ LTI $\Rightarrow$ ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ h[n] คือสัญญาณเอาต์พุต y[n] เมื่อสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณไดแร็กเดลตา δ[n] นั่นคือ

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]h[n-k] = h[n]$$

- ถ้าให้ s[n] คือผลตอบสนองขั้นบันได (step response) ของระบบซึ่งมีค่าเท่ากับผลตอบสนองของระบบ เมื่อสัญญาณอินพุตคือสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย u[n] นั่นคือ

$$s[n] = \mathbf{T}\{u[n]\} = h[n]*u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

คุณสมบัติของระบบ LTI

- คุณสมบัติการสลับที่

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

- คุณสมบัติการแจกแจง

$$x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}=\{x[n]*h_1[n]\}+\{x[n]*h_2[n]\}$$

- คุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$x_1[n]*h_1[n]*h_2[n]=x_1[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}=\{x_1[n]*h_1[n]\}*h_2[n]$$

Example 4

จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบ LTI เมื่อ $x[n]=(0.5)^n u[n]+2^n u[-n]$ และ $h[n]=u[n]$

วิธีทำ ถ้ากำหนดให้ $x_1[n]=(0.5)^n u[n]$ และ $x_2[n]=2^n u[-n]$ จะได้ว่า

$$x_1[n]*h[n]=\left(\frac{1-(0.5)^{n+1}}{1-(0.5)}\right)u[n]=\left(2-(0.5)^n\right)u[n]$$

เมื่อ $n<0$ จะได้ $$x_2[n]*h[n]=\frac{2^{n+1}}{2-1}=2^{n+1},\quad n<0$$

และเมื่อ $n>0$ จะได้ $$x_2[n]*h[n]=\frac{2}{2-1}=2,\quad n>0$$

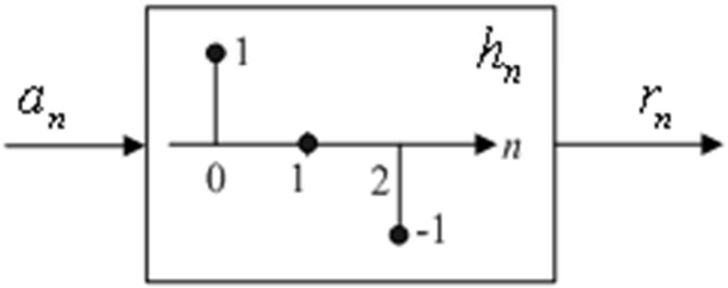
จากคุณสมบัติการแจกแจงจะได้ว่า

$$y[n]=x[n]*h[n]=\{x_1[n]+x_2[n]\}*h[n]=x_1[n]*h[n]+x_2[n]*h[n]$$

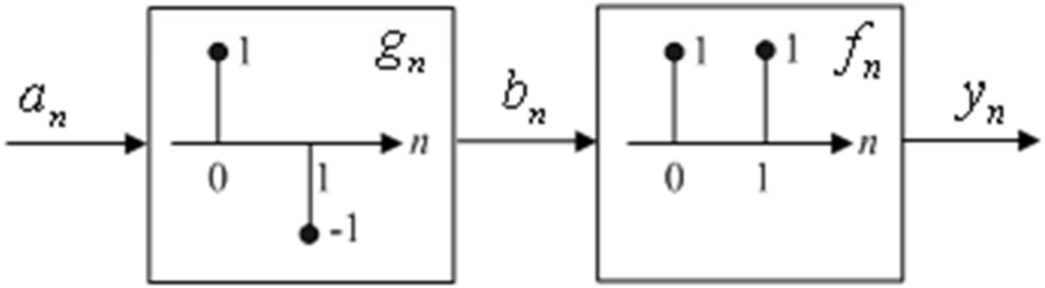
ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI คือ $$y[n]=\begin{cases}2^{n+1}, & n<0\\ 4-(0.5)^n, & n>0\end{cases}$$

Exercise 2

พิจารณาระบบ LTI ในภาพต่อไปนี้ เมื่อลำดับข้อมูลอินพุตคือ $\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\} = \{1,0,1,1\}$
จงแสดงให้เห็นว่าสัญญาณเอาต์พุตของระบบทั้งสองมีค่าเท่ากัน นั่นคือ $\{r_n\} = \{y_n\}$



(ก) ระบบ A



(ข) ระบบ B

วิธีทำ ระบบ A $\Rightarrow$ สัญญาณเอาต์พุต $r[n]=a[n]*h[n]=\sum_{k=0}^{2}h[k]a[n-k]$

ซึ่งจะได้ $\{r_n\}=\{r_0,r_1,r_2,r_3,r_4,r_5\}=\{1,0,0,1,-1,-1\}$

ระบบ B $\Rightarrow$ สัญญาณเอาต์พุต $b[n]=a[n]*g[n]=\sum_{k=0}^{1}g[k]a[n-k]$

ซึ่งจะได้ $\{b_n\}=\{b_0,b_1,b_2,b_3,b_4\}=\{1,-1,1,0,-1\}$

จากนั้นลำดับข้อมูล $\{b_n\}$ ถูกส่งผ่านเข้าไปในระบบ $\{f_n\}$ ทำให้ได้เป็นสัญญาณเอาต์พุต $\{y_n\}$ ซึ่งหาได้จาก

$$y[n]=b[n]*f[n]=\sum_{k=0}^{1}f[k]b[n-k] \Rightarrow \{y_n\}=\{y_0,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}=\{1,0,0,1,-1,-1\}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\{y_n\}=\{r_n\}$

$$r[n]=a[n]*h[n]=a[n]*\left(g[n]*f[n]\right)=\underbrace{\left(a[n]*g[n]\right)}_{=b[n]}*f[n]=y[n]$$

❑ คุณสมบัติการมีและไม่มีหน่วยความจำ

- ระบบที่ไม่มีหน่วยความจำ ก็ต่อเมื่อ h[n] = 0 สำหรับ n ≠ 0 $\Rightarrow h[n]=K\delta[n]$

❑ คุณสมบัติในการหาตัวผกผันได้ $h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]$

❑ คุณสมบัติคอซอล

- ระบบ LTI ที่มีคุณสมบัติคอซอล (causal) คือระบบที่สัญญาณเอาต์พุตจะขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตในเวลาอดีตและในเวลาปัจจุบันเท่านั้น แต่ไม่ขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตในเวลาอนาคต
- ระบบคอซอลคือระบบที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์คือ **h[n] = 0** เมื่อ **n < 0**
- สัญญาณเอาต์พุตของระบบคอซอลหาได้จาก

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

- ระบบที่ใช้งาจริงที่มีลักษณะการตอบสนองแบบเรียลไทม์ จะมีคุณสมบัติคอซอลิตี (causality) เสมอ

- ในทางปฏิบัติคุณสมบัติคอซอลสอดคล้องกับเงื่อนไข "**การพักเริ่มต้น** (initial rest)" ⇒ ถ้าสัญญาณอินพุตของระบบคอซอลมีค่าเท่ากับค่าศูนย์จนถึง ณ เวลาหนึ่งแล้ว สัญญาณเอาต์พุตของระบบจะ**ต้อง**มีค่าเท่ากับค่าศูนย์จนถึง ณ เวลาขณะนั้นด้วยเช่นกัน
- โดยทั่วไปเงื่อนไขการพักเริ่มต้น ⇒ ใช้ได้กับ**ระบบเชิงเส้น**เท่านั้น
- **Ex:** ระบบ y[n] = 3x[n] + 2 เป็นระบบคอซอลและไม่มีหน่วยความจำ แต่ถือว่าเป็นระบบไม่เป็นเชิงเส้น ⇒ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขการพักเริ่มต้น เนื่องจาก x[n] = 0 จะได้ y[n] = 2 สำหรับทุกค่า n

❑ คุณสมบัติเสถียร

- ระบบเสถียร (stable) หมายถึงระบบที่สัญญาณอินพุตแบบมีขอบเขต (bounded input) และส่งผลทำให้เกิดสัญญาณเอาต์พุตแบบมีขอบเขตด้วย
- พิจารณาสัญญาณอินพุตแบบมีขอบเขต ⇒ สัญญาณเอาต์พุตแบบมีขอบเขตจะเกิดขึ้นได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right| < \infty$$

Example 5

พิจารณาระบบ LTI มีผลตอบสนองอิมพัลส์คือ $h[n]=u[n]$ $\Rightarrow$ ระบบนี้มีระบบผกผันหรือไม่

วิธีทำ จากระบบ LTI ที่กำหนดให้จะได้ว่าสัญญาณเอาต์พุตมีค่าเท่ากับ

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]u[n-k]$$

เนื่องจาก $u[n-k]=0$ สำหรับ $n-k<0$ และ $u[n-k]=1$ สำหรับ $n-k>0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

ซึ่งเป็นการหาผลรวมของสัญญาณอินพุตทั้งหมดตั้งแต่เวลาอดีตจนถึงเวลาปัจจุบัน ระบบลักษณะนี้จะมีระบบผกผันที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์คือ $h_I[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ นั่นคือ

$$h[n]*h_I[n]=u[n]*\{\delta[n]-\delta[n-1]\}=u[n]-u[n-1]\ =\delta[n]$$

สมการเชิงผลต่าง

- ระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลาที่พบมาก ⇒ ระบบที่สัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตมีความสัมพันธ์กันตามสมการเชิงผลต่างที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแบบเชิงเส้น (LCCDE: linear constant-coefficient difference equation)
  - ใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ได้ เช่น เงินฝากในธนาคาร และการเปลี่ยนแปลงดัชนีตลาดหลักทรัพย์

สมการเชิงผลต่างที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแบบเชิงเส้น (อันดับ N)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

เมื่อ a_k และ b_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่เป็นเลขจำนวนจริง และ N เป็นเลขจำนวนเต็มที่แสดงถึงอันดับอนุพันธ์สูงสุดของ y(t)

- การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต้องอาศัย**เงื่อนไขช่วย** (auxiliary condition) ซึ่งจะอยู่ในรูปของค่า

$$y[n], y[n-1], \ldots, y[n-N] \quad \text{สำหรับค่า n หนึ่งๆ}$$

- คำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์จะอยู่ในรูปของ

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$$

เมื่อ $y_p[n]$ คือผลเฉลยเฉพาะ (particular solution) และ $y_h[n]$ คือผลเฉลยเอกพันธุ์ (homogeneous solution)

- ผลเฉลยเอกพันธุ์หาได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์ (homogeneous differential equation) ดังนี้

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- ถ้า **N = 0** $\Rightarrow$ สมการไม่เวียนเกิด (nonrecursive equation)

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

  - ระบบ LTI $\Rightarrow$ ระบบที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด (FIR)

- ถ้า N $\geq$ 1 $\Rightarrow$ สมการเวียนเกิด (recursive equation)

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\right\}$$

  - ระบบ LTI $\Rightarrow$ ระบบที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด (IIR)

Example 6

พิจารณาระบบ LTI ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตดังนี้

$$y[n]-ay[n-1]=x[n] \qquad (1)$$

เมื่อ a คือค่าคงตัว จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ เมื่อสัญญาณอินพุตคือ

$$x[n]=Kb^{n}u[n] \qquad (2)$$

เมื่อ K และ b คือค่าคงตัว และเงื่อนไขช่วยคือ $y[-1]=\beta$

วิธีทำ ผลเฉลยเฉพาะ $y_p[n]$ ต้องสอดคล้องกับสมการ (1) โดยทั่วไป $y_p[n]$ จะมีรูปสมการคล้ายกับสัญญาณอินพุต $x[n]$ นั่นคือ

$$y_p[n] = Ab^n, \quad n \geq 0 \tag{3}$$

เมื่อ A คือค่าคงตัว แทนค่า $y_p[n]$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$Ab^n - aAb^{n-1} = Kb^n \quad \Rightarrow \quad A = \frac{Kb}{b-a}$$

แทนค่า A ลงในสมการ (3) จะได้

$$y_p[n] = \frac{Kb}{b-a}b^n = \frac{K}{b-a}b^{n+1}, \quad n \geq 0 \tag{4}$$

ในทำนองเดียวกันผลเฉลยเอกพันธ์ $y_h[n]$ หาได้จากการแก้สมการ

$$y_h[n]-ay_h[n-1]=0 \qquad (5)$$

ถ้ากำหนดให้

$$y_h[n]=Bz^n, \quad n\geq 0 \qquad (6)$$

เมื่อ B และ z คือค่าคงตัว แทนค่า $y_h[n]$ ลงในสมการ (5) จะได้

$$Bz^n-aBz^{n-1}=(z-a)Bz^{n-1}=0$$

ซึ่งจะได้ $z=a$ และแทนค่า z ลงในสมการ (6) จะได้

$$y_h[n]=Ba^n, \quad n\geq 0 \qquad (7)$$

แทนค่า $y_h[n]$ และ $y_p[n]$ ลงในสมการ $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ จะได้

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = Ba^n + \frac{K}{b-a} b^{n+1}, \quad n \geq 0 \qquad (8)$$

ในการหาค่า B จะต้องอาศัยค่า $y[0]$ ดังนั้นแทนค่า $n = 0$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$y[0] - ay[-1] = y[0] - a\beta = x[0] = K \;\Rightarrow\; y[0] = K + a\beta \qquad (9)$$

และแทนค่า $n = 0$ ลงในสมการ (8) จะได้

$$y[0] = B + \frac{K}{b-a} b \qquad (10)$$

เปรียบเทียบสมการ (9) และ (10) จะได้ว่า $B = a\beta - \frac{a}{b-a}$ $\Rightarrow$ แทนค่า B ลงในสมการ (8)

จะได้สัญญาณเอาต์พุตของระบบคือ

$$y[n] = \beta a^{n+1} + K \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}, \quad n \geq 0 \qquad (11)$$

สำหรับ $n<0$ จะได้ $x[n]=0$ สมการ (1) เขียนได้เป็น

$$y[n]=Ba^{n} \tag{12}$$

จากเงื่อนไขช่วยที่กำหนดให้ $y[-1]=\beta$ จะได้

$$y[-1]=\beta=Ba^{-1} \quad\Rightarrow\quad B=\beta a$$

แทนค่า B ลงในสมการ (12) จะได้

$$y[n]=\beta a^{n+1}, \quad n<0 \tag{13}$$

รวมสมการ (11) และ (13) จะได้สัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ณ ค่า n ใดๆ คือ

$$y[n]=\beta a^{n+1}+\left\{K\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}\right\}u[n] \tag{14}$$

Exercise 3

จาก Example 4 จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ เมื่อสัญญาณอินพุต $x[n]= K\delta[n]$ และ $y[-1] = \beta$

วิธีทำ จาก Example 4 จะได้ $y[n] = ay[n-1] + x[n]$ สำหรับ $n \geq 0 \Rightarrow$ แทนค่า $n = 0,1,2,\ldots,n$

จะได้

$$y[0] = ay[-1] + x[0] = a\beta + K$$

$$y[1] = ay[0] + x[1] = a(a\beta + K)$$

$$y[2] = ay[1] + x[2] = a^2(a\beta + K)$$

$$\vdots$$

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] = a^n(a\beta + K) = a^{n+1}\beta + a^n K \qquad (1)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $n<0$ $\Rightarrow$ จัดรูปสมการใหม่จะได้ $y[n-1]=\frac{1}{a}\{y[n]-x[n]\}$

ดังนั้นจากเงื่อนไขช่วย $y[-1]=\beta$ แทนค่า $n=-1,-2,\ldots,-n$ จะได้

$$y[-2]=\frac{1}{a}\{y[-1]-x[-1]\}=\frac{1}{a}\beta=a^{-1}\beta$$

$$y[-3]=\frac{1}{a}\{y[-2]-x[-2]\}=a^{-2}\beta$$

$$\vdots$$

$$y[-n]=\frac{1}{a}\{y[-n+1]-x[-n+1]\}=a^{-n+1}\beta \qquad (2)$$

ทำการรวมสมการ (1) และ (2) จะได้สัญญาณเอาต์พุตคือ $y[n]=a^{n+1}\beta+Ka^{n}u[n]$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีของระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา

- ระบบ LTI ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $\Rightarrow$ ไม่เป็นระบบเชิงเส้น ถ้า $y[-1] \neq 0$
- ระบบ LTI ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $\Rightarrow$ เป็นระบบคอซอลและไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา ก็ต่อเมื่อระบบนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขการพักเริ่มต้น นั่นคือ $y[-1] = 0$

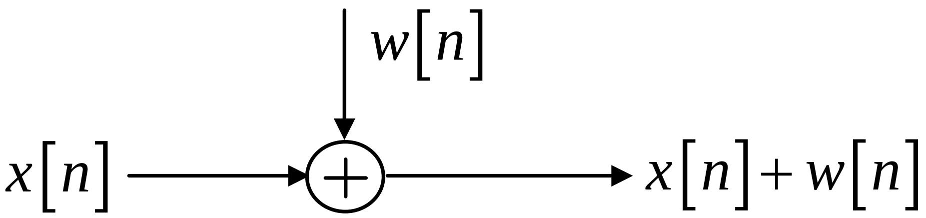
ผลตอบสนองอิมพัลส์

- สมการ LCCDE นำมาใช้ในการคำนวณหาผลตอบสนองอิมพัลส์ h(t) ของระบบได้
- การหาผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบทำได้โดยการแทนค่า x[n] = δ[n] และ y[n] = h[n] จะได้

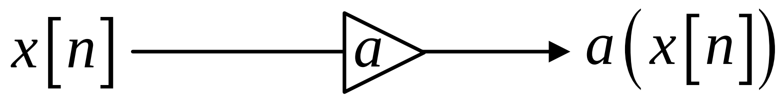
$$\sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k h[n-k]\right\}$$

แผนภาพบล็อก

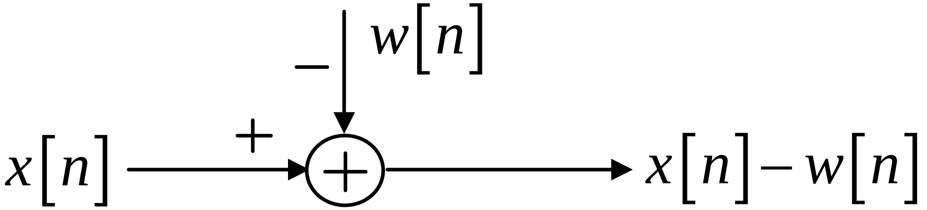
- ระบบ LTI จะถูกกำหนดด้วยสมการคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุต ⇒ ยากต่อการทำความเข้าใจ ⇒ ใช้ **แผนภาพบล็อก** (block diagram) โดยอาศัยชิ้นส่วนพื้นฐาน



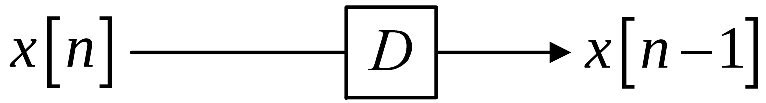
(ก) การบวก (addition)



(ค) การคูณ (multiplicaton)



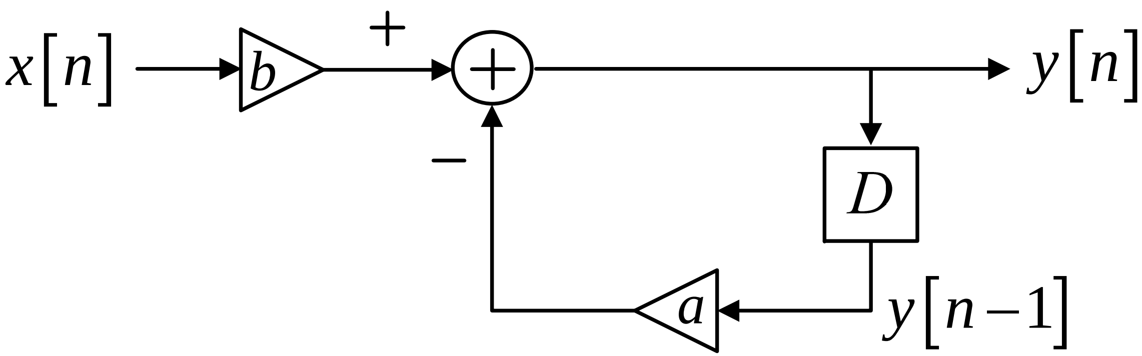
(ข) การลบ (subtraction)



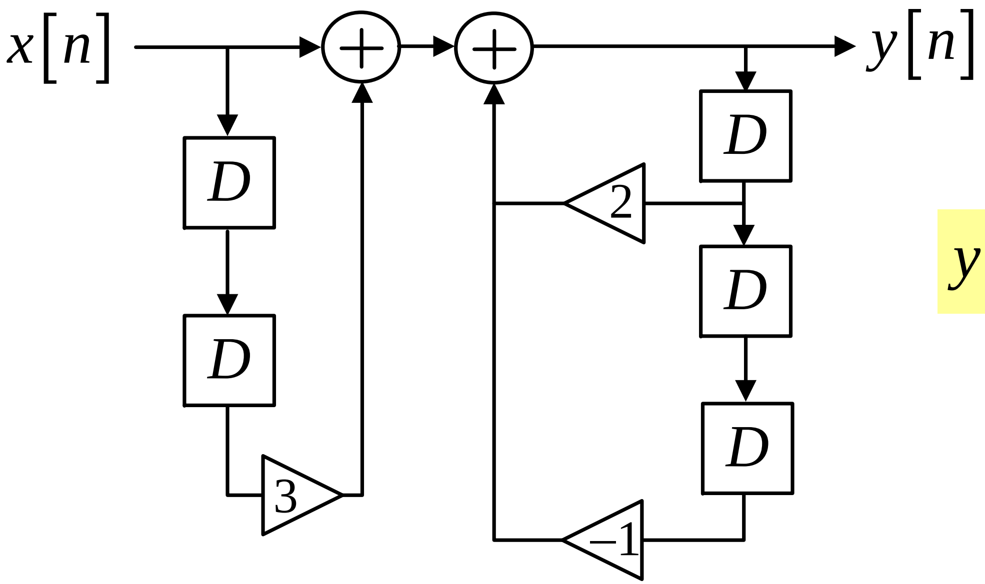
(ง) การหน่วงเวลา (delay)

เมื่อ D คือตัวดำเนินการหน่วงเวลา (delay operator) ⇒ หน่วยความจำที่เก็บค่าสัญญาณอินพุตก่อนหน้านี้หนึ่งหน่วย

- พิจารณาระบบ LTI ที่ถูกกำหนดด้วย $y[n]=bx[n]-ay[n-1]$



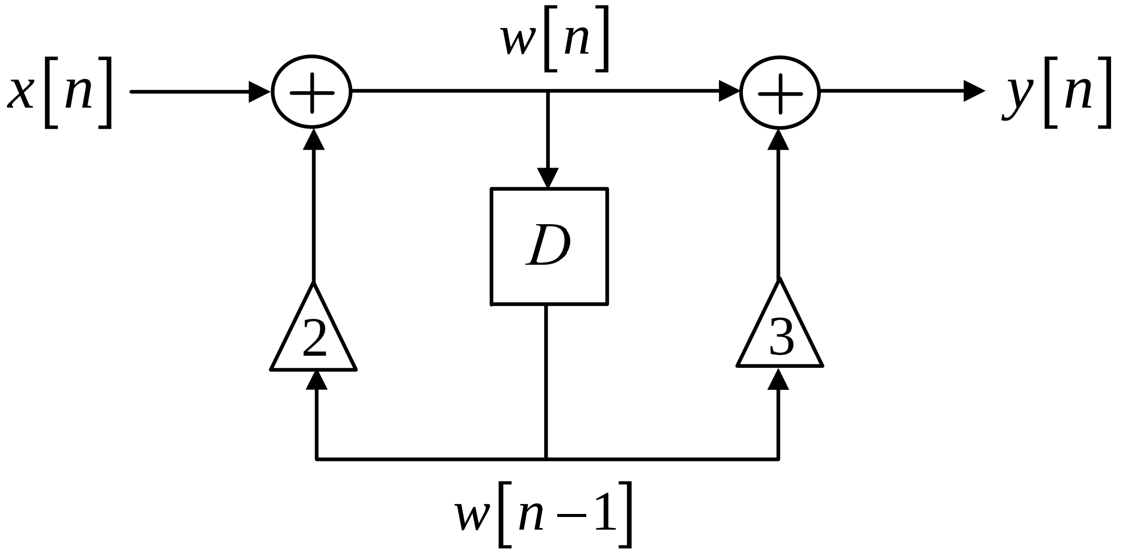
- แผนภาพบล็อกของระบบ $y[n]-2y[n-1]+y[n-3]=x[n]+3x[n-2]$



$$y[n]=x[n]+3x[n-2]+2y[n-1]-y[n-3]$$

Example 7

จงหาสมการเชิงผลต่างของระบบ LTI ตามภาพต่อไปนี้



วิธีทำ กำหนดให้ $w[n]$ คือสัญญาณอินพุตของวงจรหน่วงเวลา ดังนั้นสัญญาณอินพุตของวงจรหน่วงเวลาคือ $w[n-1]$ จากภาพจะได้ว่า

$$w[n] = x[n] + 2w[n-1] \quad \text{และ} \quad y[n] = w[n] + 3w[n-1]$$

แก้สมการทั้งสองนี้เพื่อหาค่า $w[n]$ และ $w[n-1]$ ในรูปของ $x[n]$ และ $y[n]$ จะได้

$$w[n] = \frac{2}{5}y[n] + \frac{3}{5}x[n] \qquad (1)$$

และ

$$w[n-1] = \frac{1}{5}y[n] - \frac{1}{5}x[n] \qquad (2)$$

เปลี่ยนตัวแปร $n = n-1$ ในสมการ (1) จะได้

$$w[n-1] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1] \qquad (3)$$

เนื่องจากสมการ (2) และ (3) มีค่าเท่ากัน ดังนั้นจะได้ว่า $\frac{1}{5}y[n] - \frac{1}{5}x[n] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1]$

นั่นคือสมการเชิงผลต่างของแผนภาพบล็อกมีค่าเท่ากับ $y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1]$