



สัญญาณและระบบ

ระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลา (3-4)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

<http://home.npru.ac.th/piya>



Outline



- ❑ การแสดงสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา
- ❑ ปริพันธ์คอนโวลูชัน
- ❑ ผลตอบสนองอิมพัลส์และผลตอบสนองขั้นบันได
- ❑ คุณสมบัติของระบบ LTI
- ❑ สมการเชิงอนุพันธ์
- ❑ แผนภาพบล็อก
- ❑ สหสัมพันธ์



การแสดงสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา



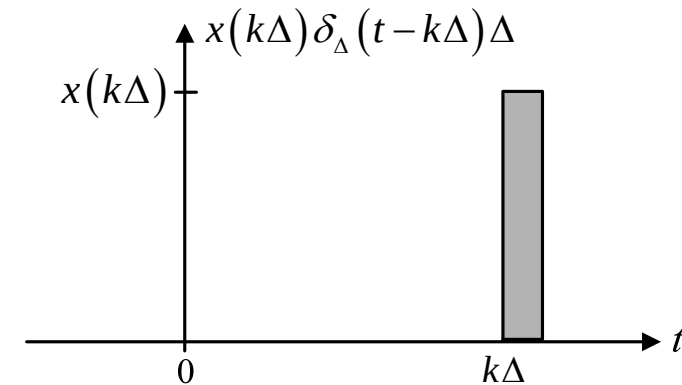
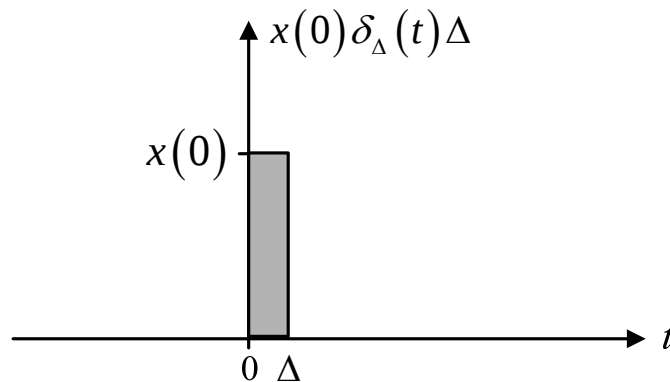
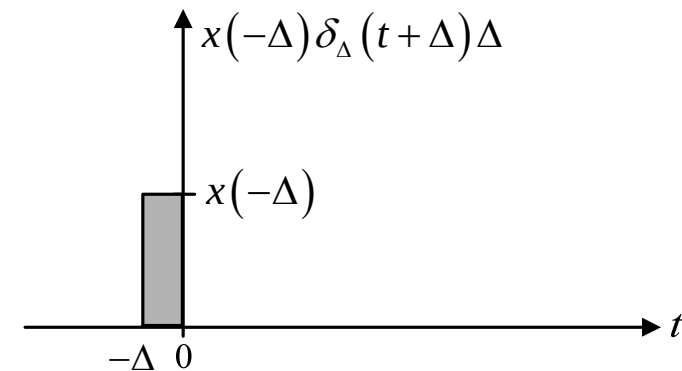
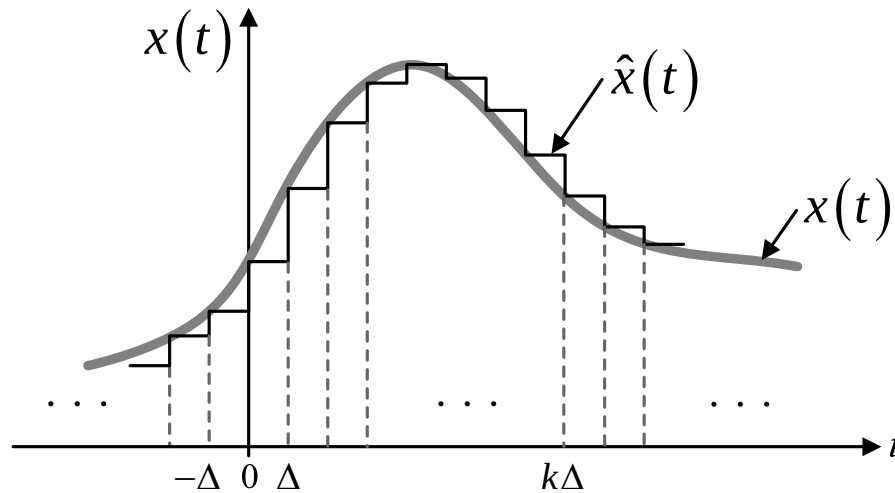
- ❑ ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (LTI : linear time-invariant) คือระบบที่มีคุณสมบัติทั้งเชิงเส้นและไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา
 - นิยมนำมาใช้ในการตั้งสมมุติฐานของปรากฏการณ์ต่างๆ เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตของระบบ
 - ช่วยทำให้สามารถวิเคราะห์สัญญาณและระบบง่ายขึ้น

- ❑ สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา (continuous-time signal) เขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ให้อยู่ในรูปของการซ้อนทับของสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วยที่ถูกสเกลและถูกเลื่อนเวลาหลายๆ ตัว



$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \right\}$$





□ ทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส $\Rightarrow$ ปริพันธ์ค่าจริงของฟังก์ชันจริงสามารถนิยามในรูปลิมิตของผลรวม

$$\int_a^b g(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} g(k\varepsilon) \varepsilon$$

- เมื่อ $\Delta \rightarrow 0$ สัญญาณ $\delta_\Delta(t)$ จะเปลี่ยนเป็นสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $\delta(t)$
- เครื่องหมายผลรวม $\Rightarrow$ เปลี่ยนเป็นเครื่องหมายปริพันธ์
 - สัญญาณ $x(t)$ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วยได้คือ

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



ปริพันธ์คอนโวลูชัน



- กำหนดให้ $h(t)$ คือผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วยของระบบ LTI
 - หรือคือสัญญาณเอาต์พุตของระบบเมื่อสัญญาณอินพุตเป็น $h(t) = \mathbf{T}[\delta(t)]$
- ถ้าสัญญาณอินพุตคือ $x(t) \Rightarrow$ สัญญาณเอาต์พุตหรือผลตอบสนองของระบบคือ

$$y(t) = \mathbf{T}[x(t)] = \mathbf{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}[\delta(t-\tau)]d\tau$$

- เนื่องจากระบบนี้เป็นระบบ LTI $\Rightarrow h(t-\tau) = \mathbf{T}[\delta(t-\tau)]$
- ปริพันธ์คอนโวลูชัน (convolution integral)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



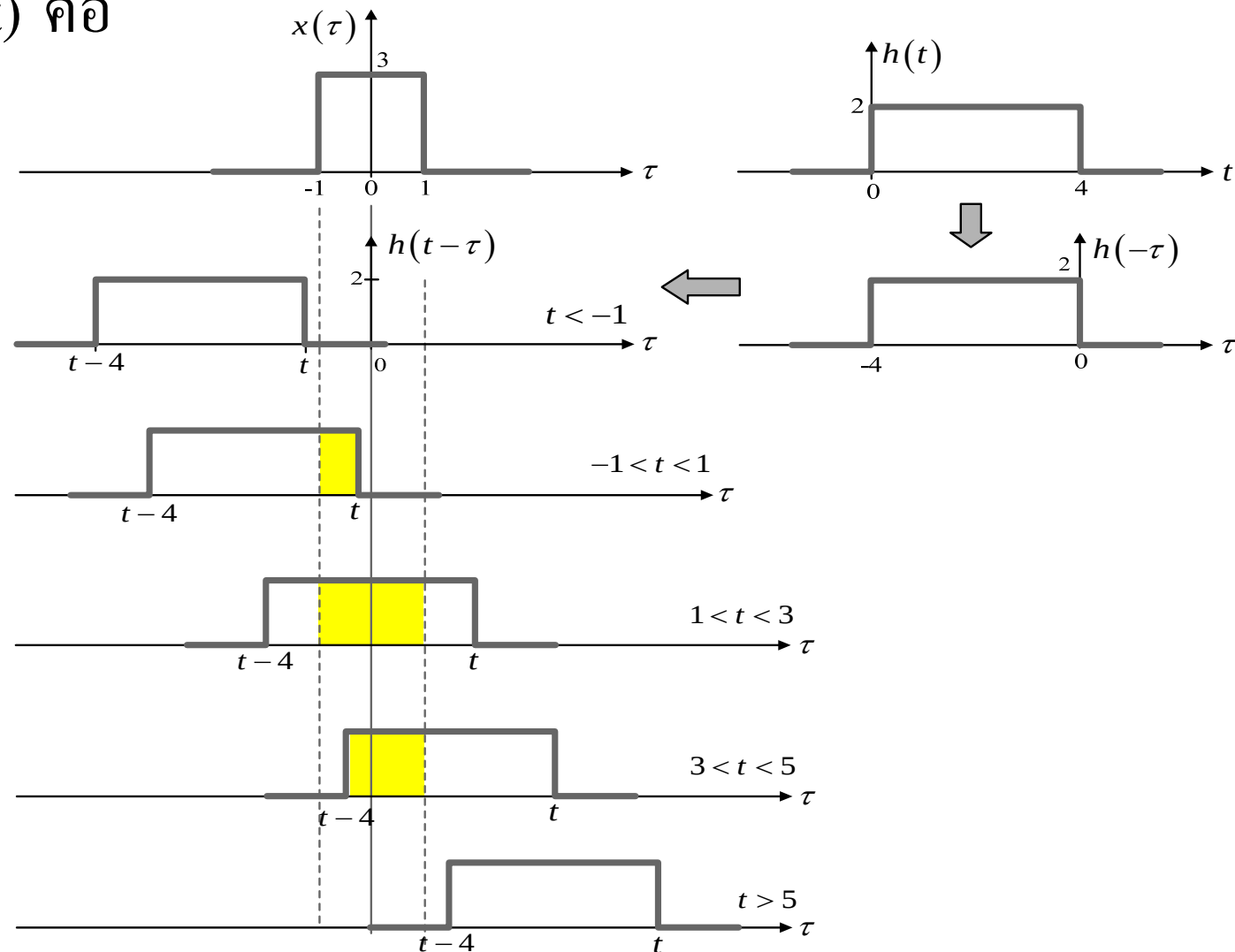
Example 1



จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณอินพุต $x(t)$ และ
ผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ คือ

$$x(t) = \begin{cases} 3, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



วิธีทำ เมื่อพิจารณาสัญญาณ $x(\tau)$ และ $h(t-\tau)$ พบว่าการทำคอนโวลูชันแบ่งออกเป็น 5 ช่วงเวลา
ช่วงเวลาที่ $t < -1$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $h(t-\tau)$ และ $x(\tau)$ มาทับซ้อนกัน ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = 0$$

ช่วงเวลาที่ $-1 < t < 1$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ เริ่มทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ จนถึงช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อน $x(\tau)$ ทั้งหมด ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-1}^t (3)(2) d\tau = 6\tau \Big|_{\tau=-1}^t = 6(t+1)$$

ช่วงเวลาที่ $1 < t < 3$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ ทั้งหมด ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-1}^1 (3)(2) d\tau = 6\tau \Big|_{\tau=-1}^1 = 6(1+1) = 12$$



ช่วงเวลาที่ $3 < t < 5$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ เริ่มเคลื่อนที่ออกจากการทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ ทั้งหมด จนถึงช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับ $x(\tau)$ ตัวสุดท้าย ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{t-4}^1 (3)(2) d\tau = 6\tau \Big|_{\tau=t-4}^1 = 6(1 - (t-4)) = 6(5-t)$$

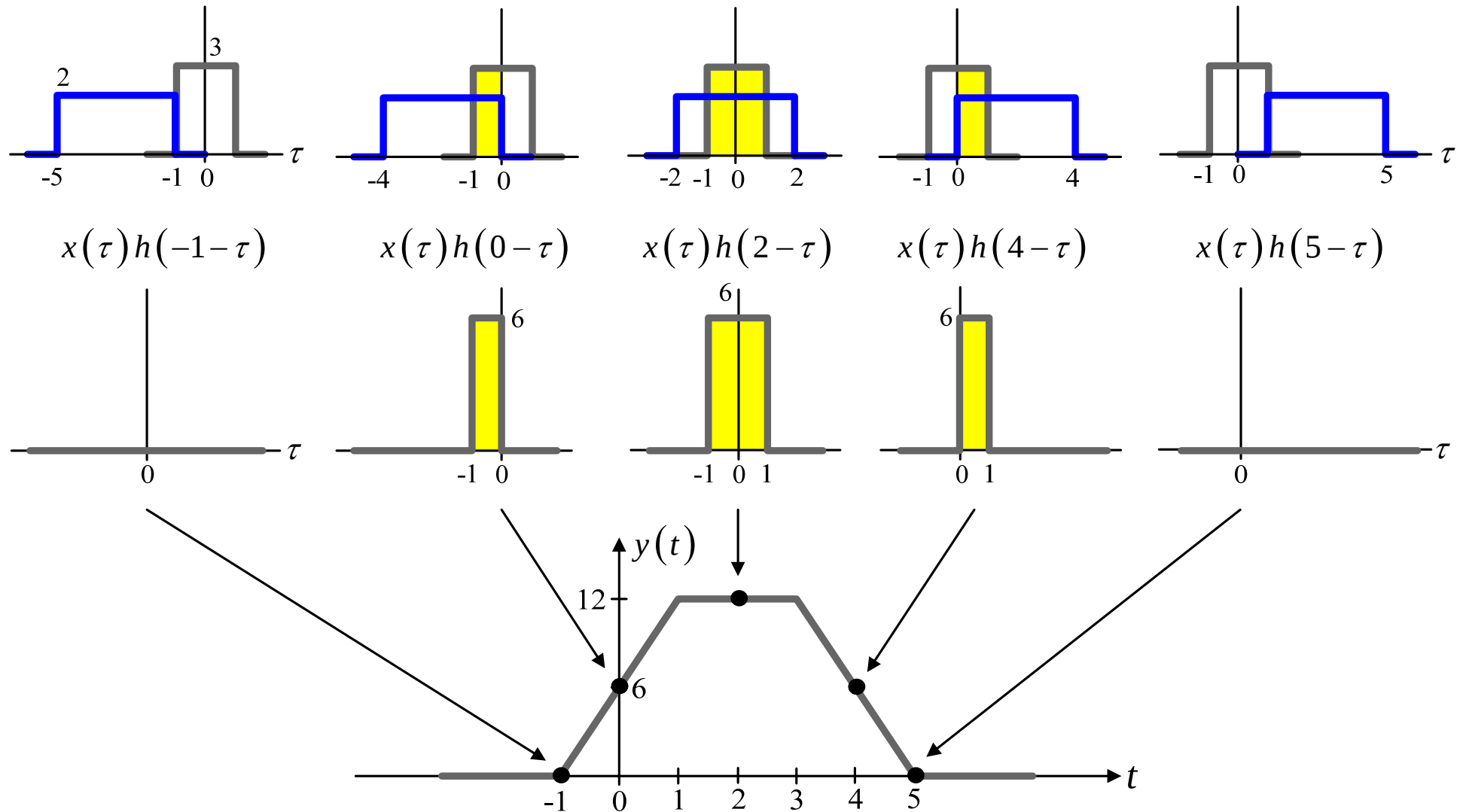
ช่วงเวลาที่ $t > 5$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $h(t-\tau)$ และ $x(\tau)$ มาทับซ้อนกัน ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = 0$$

เพราะฉะนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI มีค่าเท่ากับ

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 6(t+1), & -1 < t < 1 \\ 12, & 1 < t < 3 \\ 6(5-t), & 3 < t < 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$





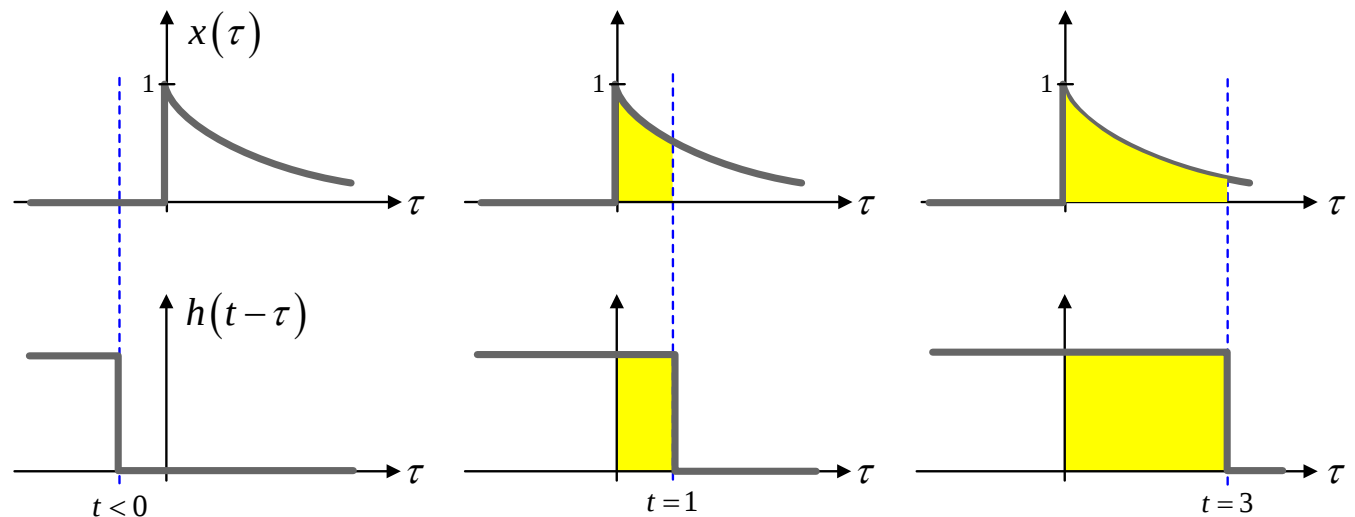
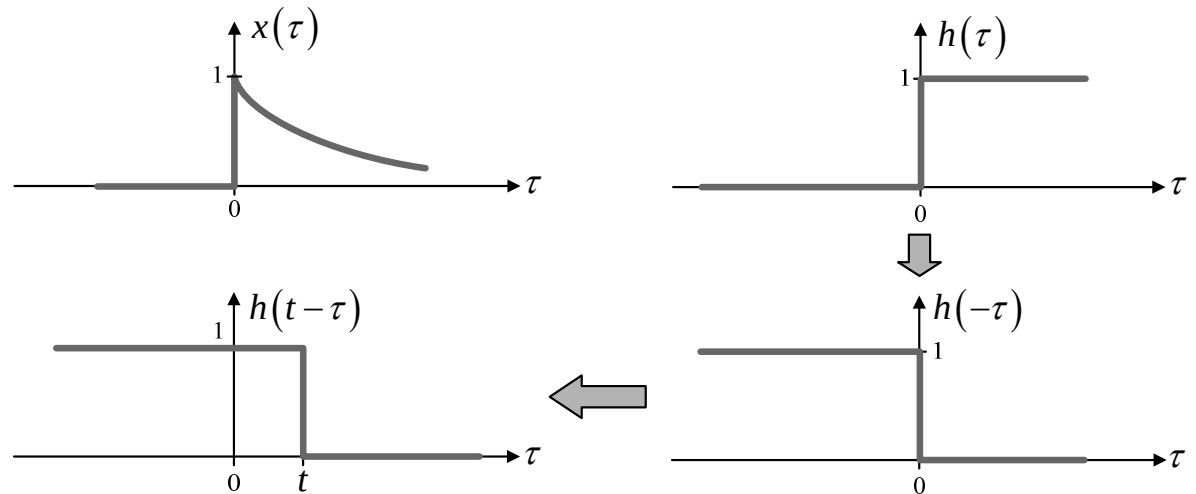
Example 2



จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณอินพุต $x(t)$ และ
ผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ คือ

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad \alpha > 0$$

$$h(t) = u(t)$$



วิธีทำ เมื่อพิจารณาสัญญาณ $x(\tau)$ และ $h(t-\tau)$ พบว่าการทำคอนโวลูชันสามารถแบ่งออกเป็น 2 ช่วงเวลา คือ เมื่อ $t > 0$ และ $t < 0$ โดยมีรายละเอียดการคำนวณดังนี้

ช่วงเวลาที่ $t < 0$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากการทำคอนโวลูชันในช่วงเวลานี้จะมีค่าเป็นค่าศูนย์ นั่นคือ

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = 0 \quad \text{สำหรับ } t < 0$$

ช่วงเวลาที่ $t > 0$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ บางส่วน ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ หาได้จาก

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \Big|_{\tau=0}^t = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

เพราะฉะนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI นี้สำหรับทุกค่า t คือ $y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$

Exercise 1



กำหนดให้ T คือเลขจำนวนจริง จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณอินพุต $x(t)$ และผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ของระบบคือ

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad \text{และ} \quad h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



SOLUTION

วิธีทำ เมื่อพิจารณาสัญญาณ $x(\tau)$ และ $h(t-\tau)$ การทำคอนโวลูชันแบ่งออกเป็น 5 ช่วงเวลา ดังนี้
ช่วงเวลาที่ $t < 0$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $h(t-\tau)$ และ $x(\tau)$ มาทับซ้อนกัน ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = 0$$

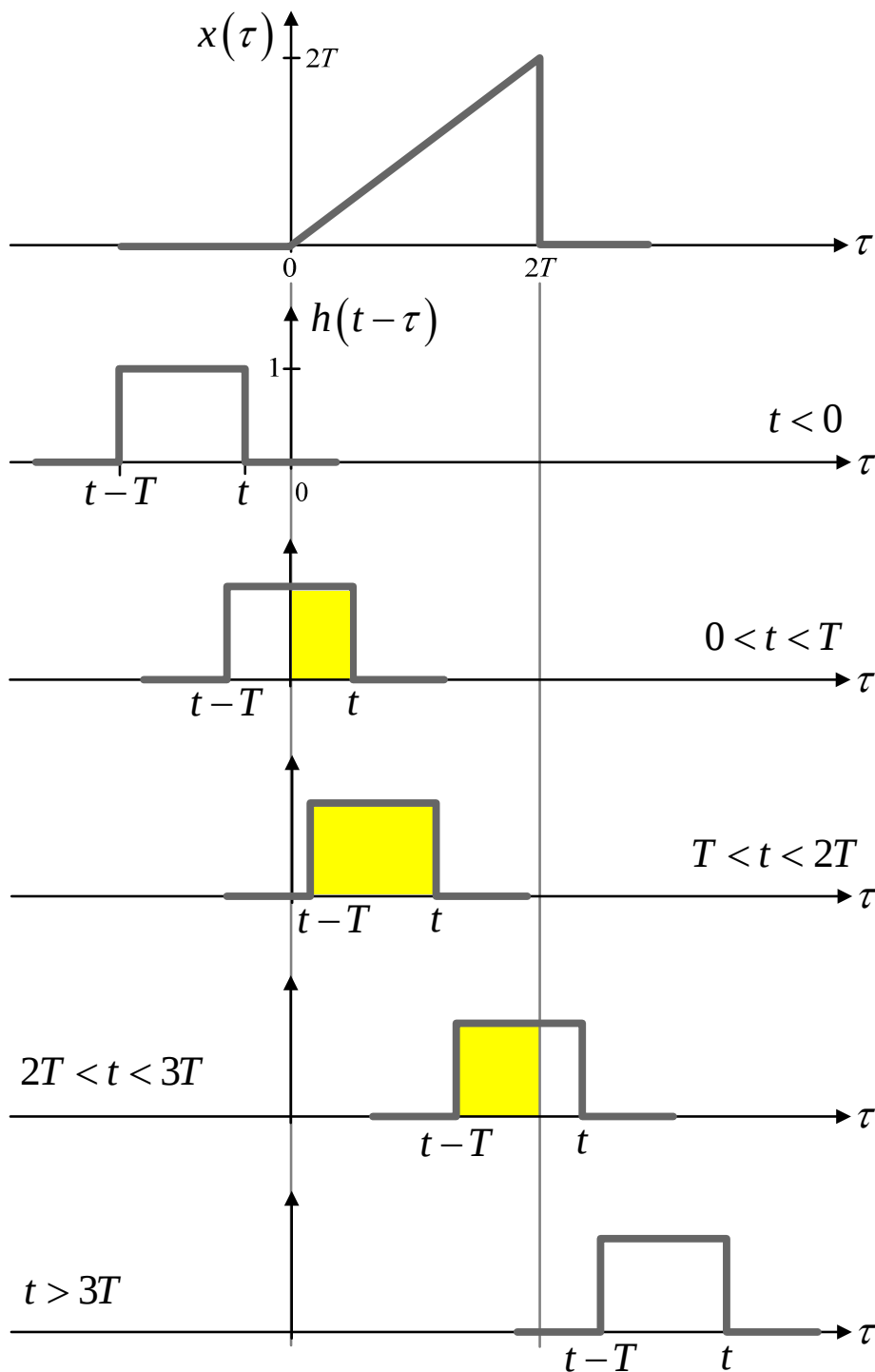
ช่วงเวลาที่ $0 < t < T$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ เริ่มทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ จนถึงช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อน $x(\tau)$ ทั้งหมด ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2} \Big|_{\tau=0}^t = \frac{1}{2}(t^2 - 0) = \frac{t^2}{2}$$

ช่วงเวลาที่ $T < t < 2T$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ ทั้งหมด ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{t-T}^t \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2} \Big|_{\tau=t-T}^t = \frac{1}{2}(t^2 - (t-T)^2) = Tt - \frac{T^2}{2}$$





$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2}, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{T^2}{2}, & T < t < 2T \\ -\frac{t^2}{2} + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & t > 3T \end{cases}$$





ช่วงเวลาที่ $2T < t < 3T$ เป็นช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ เริ่มเคลื่อนที่ออกจากการทับซ้อนกับสัญญาณ $x(\tau)$ ทั้งหมด จนถึงช่วงเวลาที่สัญญาณ $h(t-\tau)$ ทับซ้อนกับ $x(\tau)$ ตัวสุดท้าย ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-T}^{2T} \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2} \Big|_{t-T}^{2T} = \frac{1}{2} \left((2T)^2 - (t-T)^2 \right) = -\frac{t^2}{2} + Tt + \frac{3}{2}T^2$$

ช่วงเวลาที่ $t > 3T$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่มีส่วนใดของสัญญาณ $h(t-\tau)$ และ $x(\tau)$ มาทับซ้อนกัน ดังนั้น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบ LTI มีค่าเท่ากับ

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2}, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{T^2}{2}, & T < t < 2T \\ -\frac{t^2}{2} + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & t > 3T \end{cases}$$



ผลตอบสนองอิมพัลส์และผลตอบสนองขั้นบันได



- ระบบ LTI $\Rightarrow$ ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ $h(t)$ คือสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ เมื่อสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณไคเร็กเดลตา $\delta(t)$ นั่นคือ

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(t)$$

- ถ้าให้ $s(t)$ คือผลตอบสนองขั้นบันได (step response) ของระบบซึ่งมีค่าเท่ากับผลตอบสนองของระบบ เมื่อสัญญาณอินพุตคือสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย $u(t)$ นั่นคือ

$$s(t) = \mathbf{T}[u(t)] = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$



คุณสมบัติของระบบ LTI



□ คุณสมบัติการสลับที่

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

□ คุณสมบัติการแจกแจง

$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = \{x(t) * h_1(t)\} + \{x(t) * h_2(t)\}$$

□ คุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} = \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t)$$



Example 3



พิจารณาระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลาที่มีผลตอบสนองขั้นบันไดคือ $s(t) = e^{-t}u(t)$

ถ้าสัญญาณอินพุต $x(t)$ คือสัญญาณในภาพ (ก) จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ

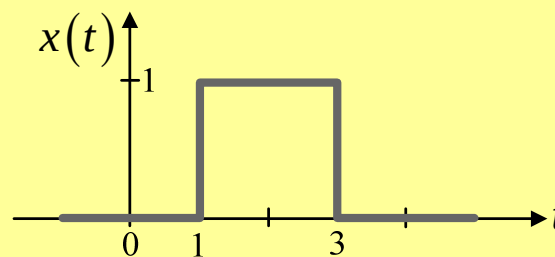
วิธีทำ สัญญาณอินพุต $x(t)$ ในภาพ (ก) เขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้คือ

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

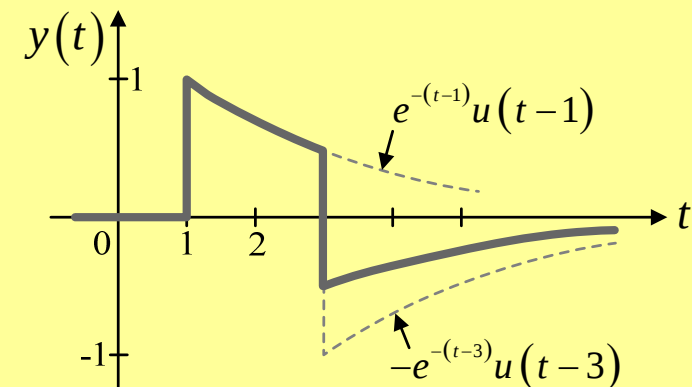
จากผลตอบสนองขั้นบันไดของระบบ LTI ที่กำหนดให้ จะได้ว่าสัญญาณเอาต์พุตของระบบคือ

$$y(t) = \mathbf{T}[u(t-1) - u(t-3)] = s(t-1) - s(t-3) = e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-3)}u(t-3)$$

ซึ่งมีรูปร่างของสัญญาณตามภาพ (ข)



(ก) สัญญาณอินพุต



(ข) สัญญาณเอาต์พุต





□ คุณสมบัติการมีและไม่มีหน่วยความจำ

- ระบบที่ไม่มีหน่วยความจำ ก็ต่อเมื่อ $h(t) = 0$ สำหรับ $t \neq 0 \Rightarrow h(t) = K\delta(t)$

□ คุณสมบัติในการหาตัวผกผันได้ $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$

□ คุณสมบัติคอซอล

- ระบบ LTI ที่มีคุณสมบัติคอซอล (causal) คือระบบที่สัญญาณเอาต์พุตจะขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตในเวลาอดีตและในเวลาปัจจุบันเท่านั้น แต่ไม่ขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตในเวลาอนาคต
- ระบบคอซอลคือระบบที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์คือ $h(t) = 0$ เมื่อ $t < 0$
- สัญญาณเอาต์พุตของระบบคอซอลหาได้จาก

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

- ระบบที่ใช้จริงที่มีลักษณะการตอบสนองแบบเรียลไทม์ จะมีคุณสมบัติคอซอลิตี้ (causality) เสมอ





- ในทางปฏิบัติคุณสมบัติคอชอลสอดคล้องกับเงื่อนไข “การพักเริ่มต้น (initial rest)” $\Rightarrow$ ถ้าสัญญาณอินพุตของระบบคอชอลมีค่าเท่ากับค่าศูนย์จนถึง ณ เวลาหนึ่งแล้ว สัญญาณเอาต์พุตของระบบจะต้องมีค่าเท่ากับค่าศูนย์จนถึง ณ เวลาขณะนั้นด้วยเช่นกัน
- โดยทั่วไปเงื่อนไขการพักเริ่มต้น $\Rightarrow$ ใช้ได้กับระบบเชิงเส้นเท่านั้น
- **Ex:** ระบบ $y(t) = 3x(t) + 2$ เป็นระบบคอชอลและไม่มีหน่วยความจำ แต่ถือว่าเป็นระบบไม่เป็นเชิงเส้น $\Rightarrow$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขการพักเริ่มต้น เนื่องจาก $x(t) = 0$ จะได้ $y(t) = 2$ สำหรับทุกค่า t

□ คุณสมบัติเสถียร

- ระบบเสถียร (stable) หมายถึงระบบที่สัญญาณอินพุตแบบมีขอบเขต (bounded input) และส่งผลทำให้เกิดสัญญาณเอาต์พุตแบบมีขอบเขตด้วย
- พิจารณาสัญญาณอินพุตแบบมีขอบเขต $\Rightarrow$ สัญญาณเอาต์พุตแบบมีขอบเขตจะเกิดขึ้นได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$



สมการเชิงอนุพันธ์



- ระบบ LTI ที่ต่อเนื่องทางเวลาที่พบบ่อย $\Rightarrow$ ระบบที่สัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตมีความสัมพันธ์กันตามสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแบบเชิงเส้น (LCCDE: linear constant-coefficient differential equation)
 - ใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ได้ เช่น พฤติกรรมของกระแสไฟฟ้าในวงจร การเคลื่อนที่ของสปริง และพลังงานจลน์ของปฏิกิริยาทางเคมี

สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแบบเชิงเส้น (อันดับ N)

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

เมื่อ a_k และ b_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่เป็นเลขจำนวนจริง และ N เป็นเลขจำนวนเต็มที่แสดงถึงอันดับอนุพันธ์สูงสุดของ $y(t)$



- การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต้องอาศัยเงื่อนไขช่วย (auxiliary condition) ซึ่งจะอยู่ในรูปของค่า

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} \quad \text{สำหรับค่า } t \text{ หนึ่งๆ}$$

- คำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์จะอยู่ในรูปของ

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

เมื่อ $y_p(t)$ คือผลเฉลยเฉพาะ (particular solution) และ $y_h(t)$ คือผลเฉลยเอกพันธ์ (homogeneous solution)



- ผลเฉลยเอกพันธ์หาได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ (homogeneous differential equation) ดังนี้

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(t) = \sum_{i=1}^N B_i e^{s_i t}$$

ตารางที่ 2.1

สัญญาณอินพุต $x(t)$	ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$	หมายเหตุ
1	A	A และ B คือค่าคงตัว
e^{Bt}	Ae^{Bt}	
$\cos(\omega t)$ หรือ $\sin(\omega t)$	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$	



Example 4



พิจารณาระบบ LTI ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตตามสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t) \quad (1)$$

จงหาสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ ของระบบ เมื่อกำหนดให้สัญญาณอินพุตคือ

$$x(t) = ae^{-2t}u(t) \quad (2)$$

และเงื่อนไขช่วยคือ $y(0) = y_0$ เมื่อ a และ y_0 คือค่าคงตัว



วิธีทำ เริ่มต้นให้คำนวณหาผลเฉลยเฉพาะก่อน โดยผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$ จะมีรูปแบบคล้ายกับสัญญาณอินพุต นั่นคือ

$$y_p(t) = A e^{-2t} \quad \text{สำหรับ } t > 0 \quad (3)$$

เมื่อ A คือค่าคงตัว ซึ่งหาได้จากการแทนค่า $y_p(t)$ และ $x(t)$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$-2A e^{-2t} + 5(A e^{-2t}) = a e^{-2t} \quad (4)$$

นำค่า e^{-2t} มาคูณทั้งสองข้างของสมการ (4) จะได้ $-2A + 5A = a$ หรือ $A = a/3$ จากนั้นให้แทนค่า A นี้ลงในสมการ (3) ก็จะได้

$$y_p(t) = \frac{a}{3} e^{-2t} \quad \text{สำหรับ } t > 0 \quad (5)$$



สำหรับผลเฉลยเอกพันธ์ $y_h(t)$ สามารถหาได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + 5y_h(t) = 0 \quad (6)$$

โดยที่ $y_h(t) = Be^{st}$ เมื่อ B และ s คือค่าคงตัว แทนค่า $y_h(t)$ นี้ลงในสมการ (6) จะได้

$$Bse^{st} + 5(Be^{st}) = Be^{st}(s + 5) = 0 \quad (7)$$

นั่นคือ $s = -5$ และเมื่อแทนค่า s ลงในสมการ (7) ก็จะได้

$$y_h(t) = Be^{-5t} \quad (8)$$



ดังนั้นคำตอบของสมการ (1) หาได้จากการแทนค่า $y_p(t)$ และ $y_h(t)$ ลงในสมการจะได้

$$y(t) = \frac{a}{3}e^{-2t} + Be^{-5t} \quad \text{สำหรับ } t > 0 \quad (9)$$

โดยค่า B หาได้จากเงื่อนไขช่วยตามที่โจทย์กำหนด นั่นคือแทนค่า $y(0) = y_0$ ลงในสมการ (9) จะได้ $y_0 = a/3 + B$ หรือ $B = y_0 - a/3$ และเมื่อแทนค่า B นี้กลับลงในสมการ (8) ก็จะได้

$$y(t) = \left[y_0 e^{-5t} + \frac{a}{3} \{ e^{-2t} - e^{-5t} \} \right] u(t) \quad (10)$$



คุณสมบัติเชิงเส้น

สมการ LCCDE จะมีคุณสมบัติเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขช่วยทั้งหมด มีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่าง ต่อเนื่องจาก Example 4 จงพิสูจน์ว่า

ก) ระบบนี้ไม่เป็นระบบเชิงเส้น ถ้า $y(0) = y_0 \neq 0$

ข) ระบบนี้เป็นระบบเชิงเส้น ถ้า $y(0) = y_0 = 0$

วิธีทำ

ก) เนื่องจากระบบ LTI แบบเชิงเส้นหมายถึง ระบบที่มีสัญญาณเอาต์พุตมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อสัญญาณอินพุตมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $a = 0$ ในสมการ (2) ก็จะได้สัญญาณอินพุต $x(t) = 0$ และสัญญาณเอาต์พุตในสมการ (10) จะมีค่าเท่ากับ

$$y(t) = y_0 e^{-5t} u(t) \neq 0$$

ซึ่งแสดงว่าระบบนี้ไม่เป็นระบบเชิงเส้น



ข) ระบบตามสมการ (1) จะเป็นระบบเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $y(0) = y_0 = 0$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้ กำหนดให้ $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ เป็นสัญญาณอินพุตที่ทำให้เกิดสัญญาณเอาต์พุต $y_1(t)$ และ $y_2(t)$ ตามลำดับ ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้ว่า

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 5y_1(t) = x_1(t) \quad (a1)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + 5y_2(t) = x_2(t) \quad (a2)$$

ซึ่งมีเงื่อนไขช่วยคือ

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad (a3)$$



ให้พิจารณาสัญญาณต่อไปนี้

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad (a4)$$

เมื่อ α และ β คือเลขจำนวนจริง จากนั้นนำค่า α มาคูณสมการ (a1) และนำค่า β มาคูณสมการ (a2) แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มารวมกัน ก็จะได้

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad (a5)$$

ซึ่งยังคงสอดคล้องกับสมการ (1) และสมการ (a3) นั่นคือ

$$y(0) = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) \quad (a6)$$

เพราะฉะนั้นระบบนี้เป็น**ระบบเชิงเส้น**



คุณสมบัติคอซอล

สมการ LCCDE มีคุณสมบัติคอซอล ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขช่วยเป็นแบบเงื่อนไขการพักเริ่มต้น นั่นคือ ถ้า $x(t) = 0$ สำหรับ $t \leq t_0$ และสมมติว่า $y(t) = 0$ สำหรับ $t \leq t_0$ ดังนั้นผลตอบสนองของระบบเมื่อเวลา $t > t_0$ หาได้จาก

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

โดยใช้เงื่อนไขการพักเริ่มต้นคือ

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

$$\text{เมื่อ } \frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=t_0}$$





คุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา

- ระบบเชิงเส้นแบบคอซอลที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการพักเริ่มต้น $\Rightarrow$ เป็นระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาเสมอ

ผลตอบสนองอิมพัลส์

- สมการ LCCDE นำมาใช้ในการคำนวณหาผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(t)$ ของระบบได้



Exercise 2



กำหนดให้ระบบตามสมการ (1) เป็นระบบ LTI แบบเชิงเหตุ จงคำนวณหาผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบนี้

วิธีทำ เริ่มต้นให้หาผลตอบสนองขั้นบันไดของระบบก่อน โดยจะกำหนดให้สัญญาณอินพุต

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (a1)$$

และมีเงื่อนไขช่วยแบบการพักเริ่มต้น $y(0)=0$ ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า $y(t)=0$ สำหรับ $t < 0$ ดังนั้นสิ่งที่ต้องคำนวณหาคือค่า $y(t)$ สำหรับ $t \geq 0$ ซึ่งจะอยู่ในรูปของ $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

เนื่องจากสัญญาณอินพุตเป็นค่าคงตัว $x(t)=1$ จากตารางที่ 2.1 จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)=A$ เมื่อ A คือค่าคงตัว ซึ่งหาได้จากการแทนค่า $y_p(t)$ นี้ลงในสมการ (1) ก็จะได้ $0 + 5A = 1$ หรือ $A = 1/5 = 0.2$ ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะมีค่าเท่ากับ





$$y_p(t) = 0.2, \quad t \geq 0 \quad (\text{a2})$$

จากนั้นหาผลเฉลยเอกพันธ์ $y_h(t)$ จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ จะได้

$$y_h(t) = Be^{-5t} \quad (\text{a3})$$

เพราะฉะนั้นผลตอบสนองขึ้นบันไดของระบบมีค่าเท่ากับ

$$y(t) = 0.2 + Be^{-5t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{a4})$$

โดยที่ค่าคงตัว B หาได้จากเงื่อนไขช่วย $y(0) = 0$ นั่นคือให้แทนค่า $t = 0$ ลงในสมการ (a4) จะได้ $y(0) = 0.2 + B = 0$ หรือ $B = -0.2$ ก็จะได้

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0.2(1 - e^{-5t}), & t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{a5})$$



จากนั้นทำการหาอนุพันธ์ของผลตอบสนองขั้นบันได $y(t)$ ในสมการ (a5) ก็จะได้ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบดังนี้

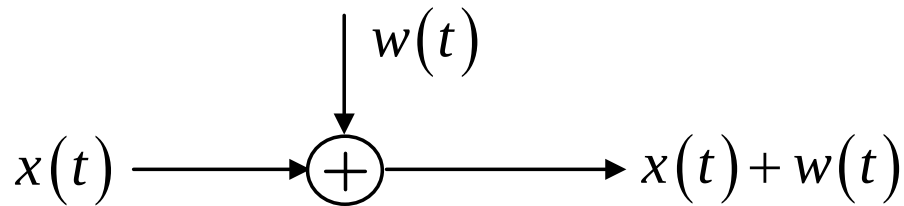
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{d}{dt} \{0.2(1 - e^{-5t})\} = e^{-5t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (a6)$$



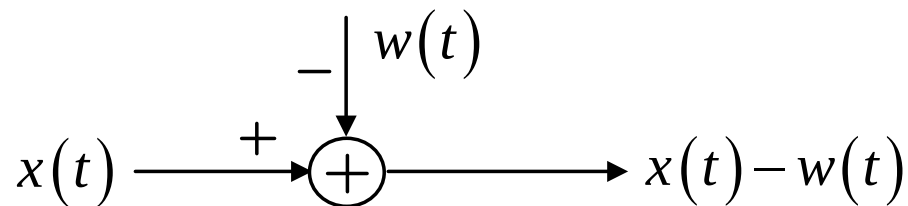
แผนภาพบล็อก



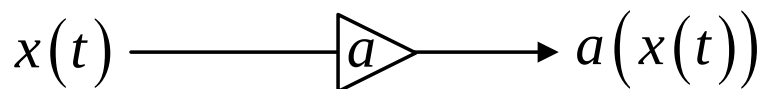
□ ระบบ LTI จะถูกกำหนดด้วยสมการคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุต $\Rightarrow$ ยุกต่อการทำความเข้าใจ $\Rightarrow$ ใช้แผนภาพบล็อก (block diagram) โดยอาศัยชิ้นส่วนพื้นฐาน



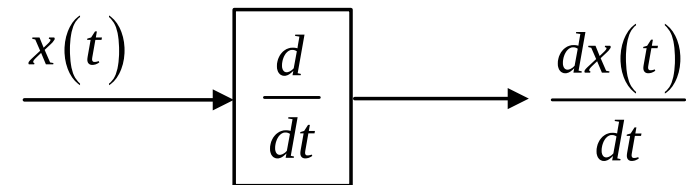
(ก) การบวก (addition)



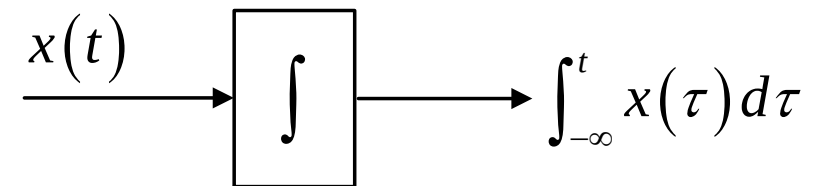
(ข) การลบ (subtraction)



(ค) การคูณ (multiplication)



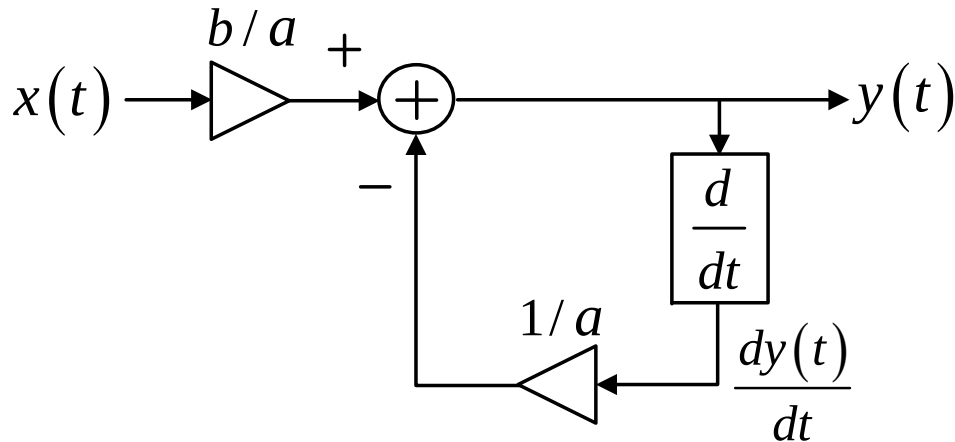
(ง) วงจรอนุพันธ์ (differentiator)



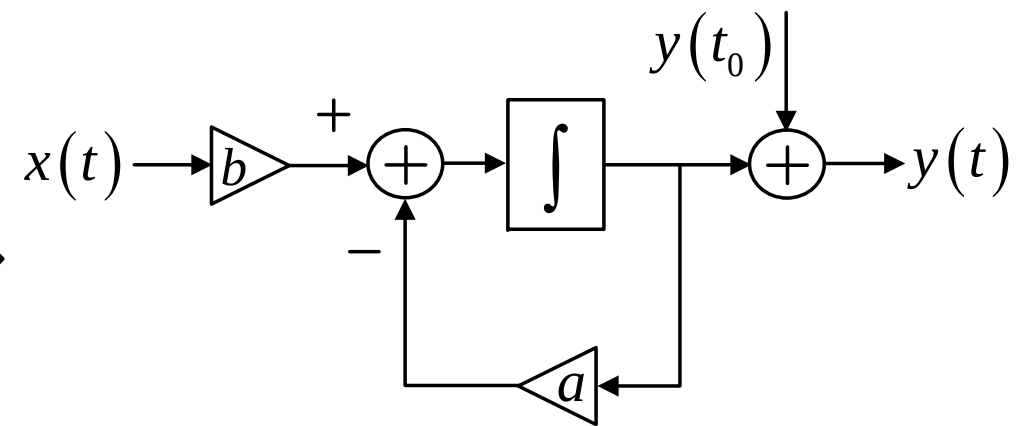
(จ) วงจรปริพันธ์ (integrator)



❑ พิจารณาระบบ LTI ที่ถูกกำหนดด้วย $\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t)$



(ก) แผนภาพบล็อกที่ใช้วงจรอนุพันธ์



(ข) แผนภาพบล็อกที่ใช้วงจรปริพันธ์

- ภาพ (ก) ไม่นิยมใช้นำมาสร้างเป็นวงจร $\Rightarrow$ วงจรอนุพันธ์สร้างได้ยากและอ่อนไหวต่อข้อผิดพลาดและสัญญาณรบกวน
- ในทางปฏิบัติจะจัดรูปสมการใหม่โดยการหาปริพันธ์ดังนี้

$$\int_{t_0}^t \left\{ \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right\} d\tau = \int_{t_0}^t \{ bx(\tau) - ay(\tau) \} d\tau \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_{t_0}^t \{ bx(\tau) - ay(\tau) \} d\tau + y(t_0)$$

ภาพ (ข)

วงจรปริพันธ์สามารถสร้างได้จากวงจรออปแอมป์ (operational amplifier) ซึ่งหาซื้อได้ง่าย



Example 5



จงสร้างแผนภาพบล็อกของระบบ LTI ที่ถูกกำหนดด้วย

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) - 3y(t)$$

วิธีทำ หาปริพันธ์ของสมการข้างต้น จากเวลา $-\infty$ ถึงเวลา τ และกำหนดให้ $y(-\infty) = x(-\infty) = 0$ ตามเงื่อนไขการพักเริ่มต้นจะได้

$$\int_{-\infty}^{\tau} \frac{d^2 y(u)}{dt^2} du = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{dx(u)}{dt} du + 2 \int_{-\infty}^{\tau} x(u) du - 3 \int_{-\infty}^{\tau} y(u) du$$

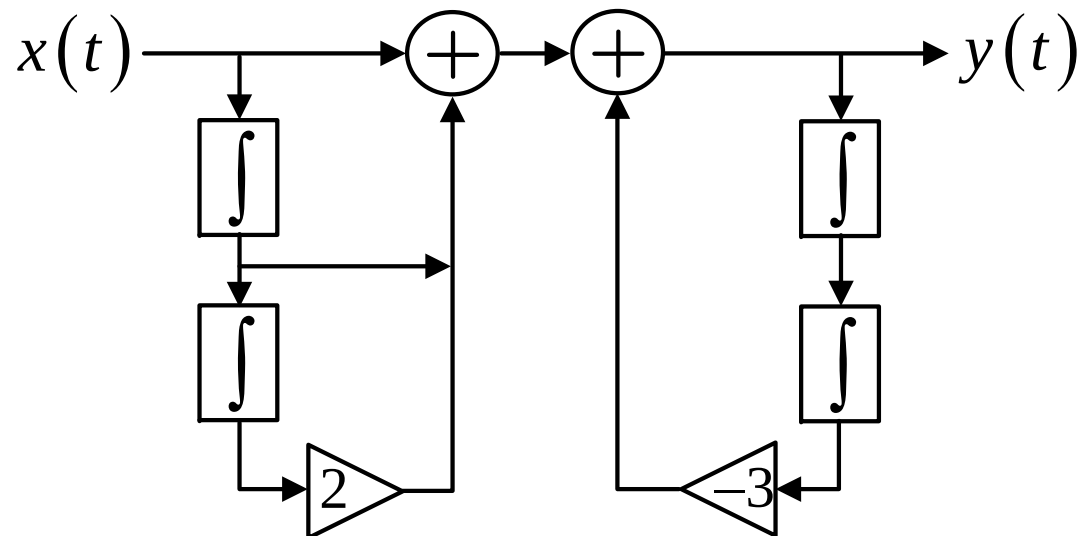
$$\frac{dy(\tau)}{dt} = x(\tau) + 2 \int_{-\infty}^{\tau} x(u) du - 3 \int_{-\infty}^{\tau} y(u) du$$



หาปริพันธ์ของสมการอีกครั้ง จากเวลา $-\infty$ ถึงเวลา τ และกำหนดให้ $y(-\infty) = x(-\infty) = 0$ จะได้

$$\int_{-\infty}^t \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} x(u) du d\tau - 3 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} y(u) du d\tau$$

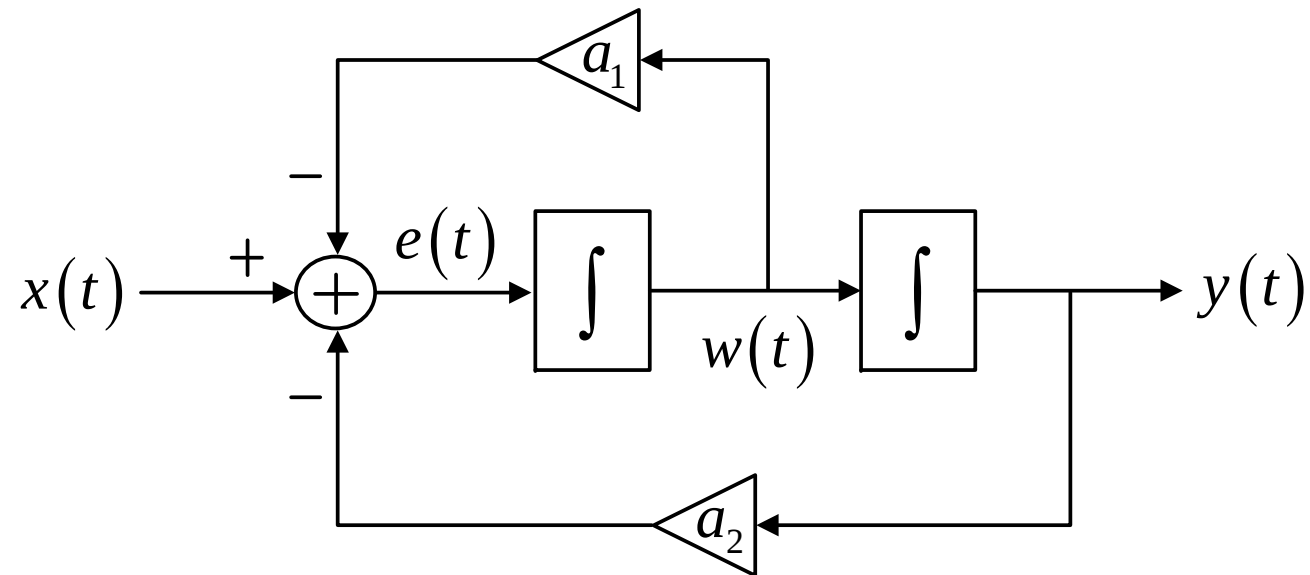
$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} x(u) du d\tau - 3 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} y(u) du d\tau$$



Exercise 3



□ จงหาสมการ LCCDE จากแผนภาพบล็อกในภาพต่อไปนี้



วิธีทำ จากแผนภาพบล็อกจะได้ว่า

$$e(t) = \frac{dw(t)}{dt} = x(t) - a_1 w(t) - a_2 y(t)$$

และ

$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

แทนค่า $w(t)$ ลงในสมการ $e(t)$ จะได้สมการ LCCDE ของแผนภาพบล็อกนี้คือ

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t)$$

