สัญญาณและระบบ

พื้นฐานของสัญญาณและระบบ (1-2)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.
Data Storage Technology Research Center
Nakhon Pathom Rajabhat University
http://home.npru.ac.th/piya

Course Information

- Instructor: Assoc.Prof. Piya Kovintavewat, Ph.D.
- Office Hours: Before/After class 30 min.

- Book:

ปิยะ โควินท์ทวีวัฒน์, *สัญญาณและระบบ กับการประยุกต์ใช้โปรแกรม SCILAB*, 2552.

A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, Signals and systems. New Jersey: Prentice Hall, 2nd-edition, 1997.

- Reference: http://home.npru.ac.th/piya/Signal

- Grading:

Attendance	10%	Homework/Quiz	10%
Report/Project	20%	Midterm Exam	30%
Final Exam	30%		

Course Syllabus

- **Course description:** สัญญาณและระบบแบบที่ต่อเนื่องทางเวลาและแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา ระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาแบบเชิงเส้น การทำคอนโวลูชัน การหาผลตอบสนองของระบบ การวิเคราะห์สัญญาณโดยใช้การแปลงฟูเรียร์ การแปลงลาปลาส การแปลงซี การประยุกต์ใช้งานของสัญญาณและระบบ เทคนิคแบบใหม่ในการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ การใช้โปรแกรมประยุกต์ในการจำลองระบบ

- **Q&A Session:** Should one has any question or help on the homework, ask me after class or email me at piya@npru.ac.th

- **Homework:** Be distributed weekly. HW is due at the beginning of the next class. No late HW is accepted.

- **Absence of Exams:** Please tell me in advance if you will be absent, only legitimate reasons are noticed. In case of sickness, bring proof together with the doctor's phone number.

แผนการสอน (15 weeks)

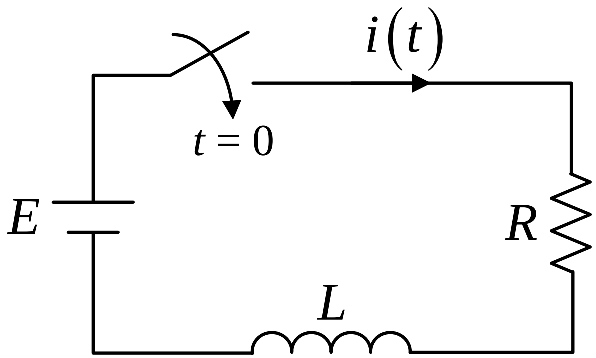
❑ บทที่ 1 พื้นฐานของสัญญาณและระบบ	2 (อาทิตย์)
❑ บทที่ 2 ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่**ต่อเนื่อง**ทางเวลา	2
❑ บทที่ 3 ระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่**ไม่**ต่อเนื่องทางเวลา	2
❑ บทที่ 6 การแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา	1.5
❑ บทที่ 7 การแปลงฟูเรียร์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา	1.5
❑ บทที่ 9 การแปลงลาปลาซ	2
❑ บทที่ 10 การแปลงซี	2
❑ การประยุกต์ใช้งานของสัญญาณและระบบ	1
❑ เทคนิคแบบใหม่ในการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ	1

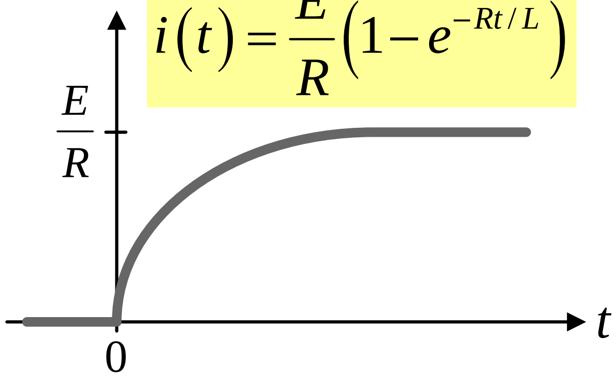
Outline – Chapter 1

- สัญญาณ
- ประเภทของสัญญาณ
- การแปลงลักษณะของสัญญาณ
- สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อน
- สัญญาณพื้นฐานที่น่าสนใจ
- ระบบ

สัญญาณ

- ปรากฏการณ์ทางกายภาพ ⇒ อธิบายได้ด้วย “สัญญาณ (signal)”
  - ข้อมูลที่ต้องการจะแฝงอยู่ในรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณ เช่น





$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

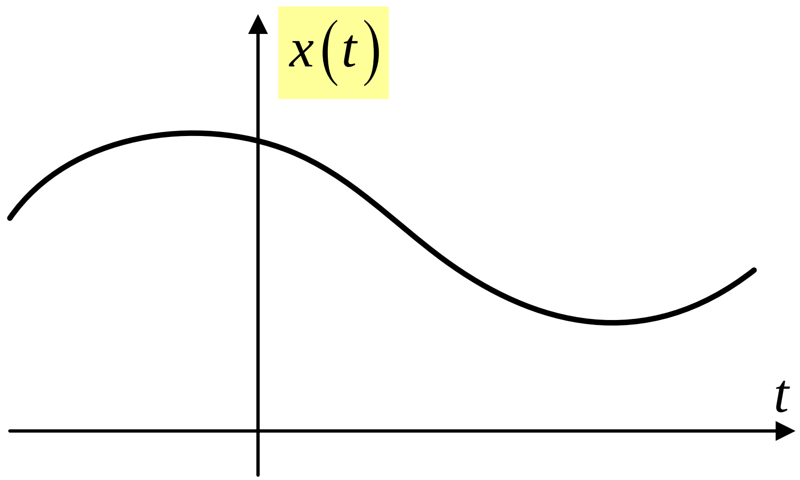
  - สัญญาณ ⇒ รูปแบบการเปลี่ยนแปลงของกระแสไฟฟ้าเมื่อเทียบกับเวลา
- **สัญญาณ** คือฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แสดงปริมาณทางกายภาพ ⇒ แทนด้วยฟังก์ชันของตัวแปรอิสระหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งตัวแปร เช่น สัญญาณ x(t) หมายถึงสัญญาณ x ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t
  - เช่น สัญญาณเสียง สัญญาณภาพ สัญญาณคลื่นหัวใจ สัญญาณราคาหลักทรัพย์

ประเภทของสัญญาณ

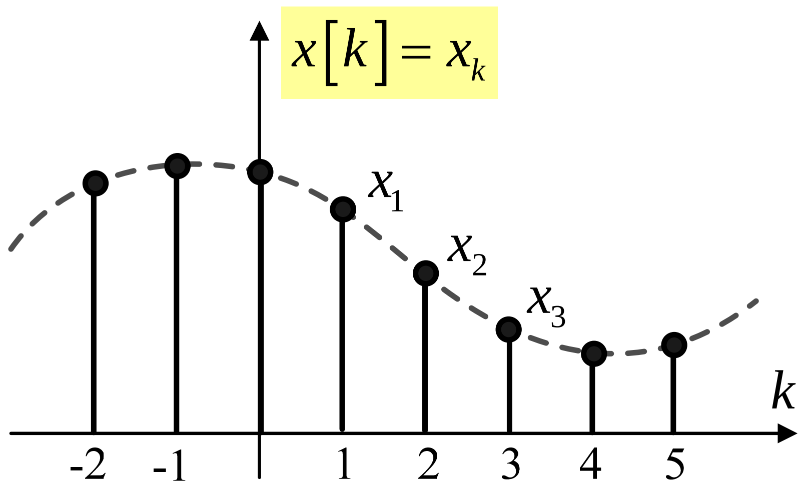
❑ สัญญาณที่ใช้งานทั่วไป ⇒ แบ่งได้หลายประเภทตามคุณลักษณะของสัญญาณ

สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาและสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

- สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา ⇒ x(t)
- สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ⇒ x[k] หรือ x_k



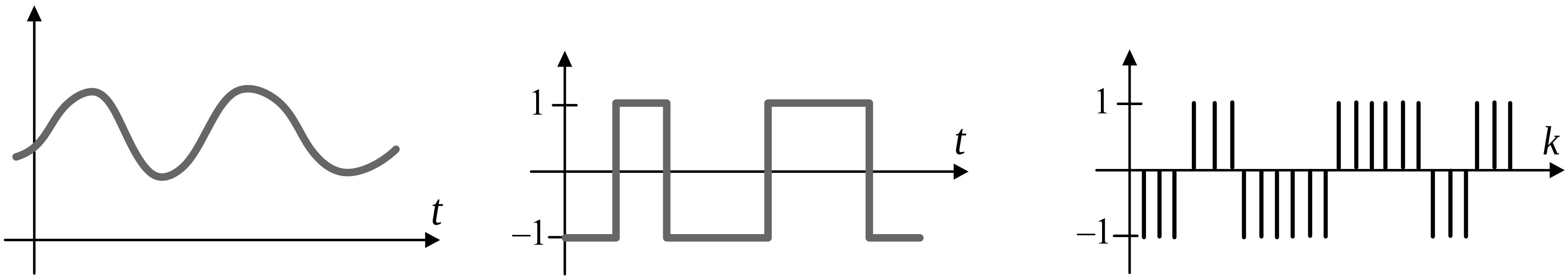
(ก) สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา



(ข) สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

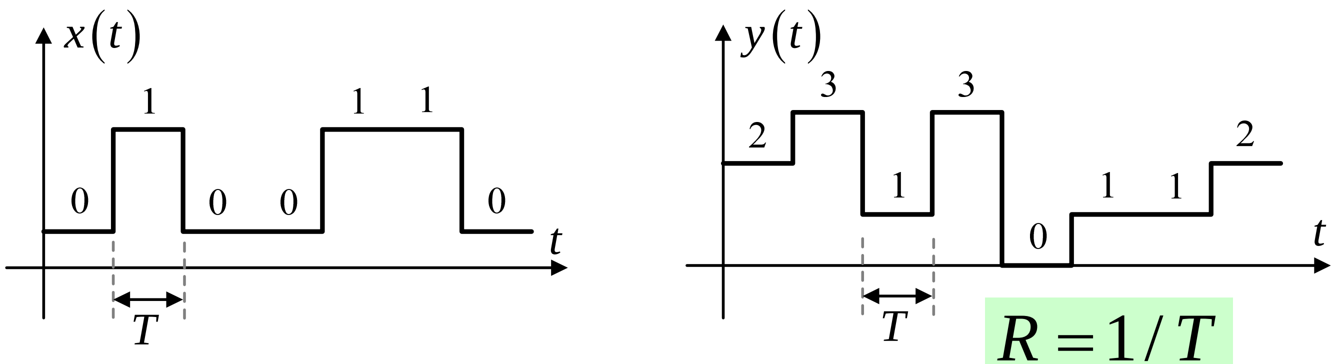
สัญญาณแอนะล็อกและสัญญาณดิจิทัล

- **สัญญาณแอนะล็อก**คือสัญญาณที่แอมพลิจูดมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องทางเวลา (สัญญาณแอนะล็อกทุกสัญญาณเป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา นั่นคือค่าของสัญญาณแอนะล็อกจะเป็นสมาชิกของเซตจำนวนจริง)



(ก) สัญญาณแอนะล็อก (ข) สัญญาณดิจิทัลแบบที่ต่อเนื่องทางเวลา (ค) สัญญาณดิจิทัลแบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

- **สัญญาณดิจิทัล** $\Rightarrow$ สัญญาณที่มีแอมพลิจูดหรือค่าของสัญญาณภายในเซตจำกัด
  - สัญญาณไบนารี
  - สัญญาณหลายระดับ



$R = 1/T$

สัญญาณคาบและสัญญาณไม่เป็นคาบ

- สัญญาณคาบ (periodic) คือสัญญาณที่มีรูปร่างซ้ำตัวมันเองทุกๆ ช่วงเวลา **T** ที่กำหนด โดยจะเรียก **T** ว่า**คาบ** (period) ของสัญญาณ

$$x(t) = x(t + mT)$$

สำหรับทุกค่า t เมื่อ m เป็นเลขจำนวนเต็ม

T ที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการข้างต้นเป็นจริง $\Rightarrow$ **คาบมูลฐาน** (fundamental period) $\Rightarrow$ T_0

  - ส่วนกลับของคาบเวลา T_0 เรียกว่า**ความถี่มูลฐาน** $f_0 = 1/T_0$

- สำหรับสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $\Rightarrow$ $x[k] = x[k+N]$
  - N ที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการเป็นจริง $\Rightarrow$ **คาบมูลฐาน** $\mathbf{N_0}$

- สัญญาณคาบเพียงหนึ่งคาบจะมีคุณลักษณะเทียบเท่ากับสัญญาณคาบทั้งหมด
- สัญญาณอื่นๆ ที่ไม่มีลักษณะเป็นสัญญาณคาบ $\Rightarrow$ สัญญาณไม่เป็นคาบ (aperiodic หรือ non-periodic signal)

Example 1

กำหนดให้ $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ เป็นสัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับ T_1 และ T_2 ตามลำดับ จงพิจารณาว่าสัญญาณ $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ เป็นสัญญาณคาบหรือไม่

วิธีทำ จากคุณสมบัติของสัญญาณคาบจะได้ว่า

$$x_1(t) = x_1(t + mT_1) \quad \text{และ} \quad x_2(t) = x_2(t + nT_2)$$

เมื่อ m และ n เป็นเลขจำนวนเต็มใดๆ ถ้ากำหนดให้ $mT_1 = nT_2 = T$ แล้วจะได้ว่า

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t + mT_1) + x_2(t + nT_2)$$

$$= x_1(t + T) + x_2(t + T) = x(t + T)$$

ดังนั้นสัญญาณ $x(t)$ จะเป็นสัญญาณคาบ ก็ต่อเมื่ออัตราส่วน T_1 / T_2 เป็นจำนวนตรรกยะ และคาบเวลาของ $x(t)$ มีค่าเท่ากับตัวคูณร่วมน้อย (least common multiple) ของค่า T_1 และ T_2

Example 2

จงหาคาบมูลฐาน T_0 ของสัญญาณไซนูซอยด์ (sinusoidal signal) $x(t) = \sin(0.4\pi t)$

วิธีทำ สัญญาณ $x(t)$ มีคาบมูลฐานเท่ากับ T_0 ก็ต่อเมื่อสามารถหาค่า T_0 ที่ทำให้ $x(t) = x(t + T_0)$ นั่นคือ

$$\sin(0.4\pi t) = \sin\left(0.4\pi\left[t + T_0\right]\right) = \sin(0.4\pi t + 0.4\pi T_0)$$

เนื่องจาก $\sin(\theta) = \sin(\theta + 2n\pi)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นคาบมูลฐาน T_0 หาได้จาก $0.4\pi T_0 = 2n\pi$ ซึ่งจะได้ว่า

$$T_0 = \frac{2n\pi}{0.4\pi} = 5n = 5$$

เมื่อ $n = 1$ นั่นคือคาบมูลฐานของสัญญาณ $x(t)$ มีค่าเท่ากับ $T_0 = 5$ หน่วย

สัญญาณเชิงกำหนดและสัญญาณสุ่ม

- **สัญญาณเชิงกำหนด** (deterministic signal) คือสัญญาณที่สามารถระบุได้แน่นอนว่าค่าหรือคุณสมบัติของสัญญาณ ณ เวลาใดๆ จะเป็น
  - เขียนให้อยู่ในรูปของสมการคณิตศาสตร์ได้

- **สัญญาณสุ่ม** (random signal) คือสัญญาณที่ไม่สามารถระบุได้แน่นอนว่าคุณสมบัติของสัญญาณ ณ เวลาใดๆ จะเป็นอย่างไร
  - สัญญาณที่พบมาก ⇒ **สัญญาณสุ่ม** ⇒ อยู่ในรูปของ
    - สัญญาณข่าวสาร เช่น สัญญาณเสียงในระบบโทรศัพท์, สัญญาณภาพผ่านดาวเทียม, และสัญญาณข้อมูลที่จัดเก็บในฮาร์ดดิสก์ไดรฟ์
    - สัญญาณรบกวน (noise) เช่น สัญญาณรบกวนเชิงความร้อน (thermal noise) ที่เกิดจากการเคลื่อนไหวของอิเล็กตรอนในขณะใช้งานอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ ทำให้เกิดการแผ่ความร้อนออกมาในรูปของสัญญาณรบกวน

สัญญาณพลังงานและสัญญาณกำลัง

- **สัญญาณกำลัง** (power signal) $\Rightarrow$ สัญญาณมีค่ากำลัง P จำกัด เมื่อ

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|x(t)\right|^2 dt$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \left|x[k]\right|^2$$

  - สัญญาณคาบที่มีคาบเวลา $T_0 \Rightarrow$ $P = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} \left|x(t)\right|^2 dt$

- **สัญญาณพลังงาน** (energy signal) $\Rightarrow$ สัญญาณมีค่าพลังงาน E จำกัด เมื่อ

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt$$

$$E = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \left|x[k]\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|x[k]\right|^2$$

- โดยทั่วไปสัญญาณคาบเป็นสัญญาณกำลัง และสัญญาณไม่เป็นคาบเป็นสัญญาณพลังงาน

Example 3

จงหากำลังของสัญญาณ $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ เมื่อ $\omega = 2\pi f_0$ มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที, f_0 คือความถี่มูลฐาน, และ ϕ เป็นค่าคงตัวของมุมเฟส

วิธีทำ เนื่องจาก $x(t)$ เป็นสัญญาณคาบที่มี $T_0 = 1/f_0$ ดังนั้นกำลังของสัญญาณหาได้จาก

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |A\cos(\omega t + \phi)|^2\, dt$$

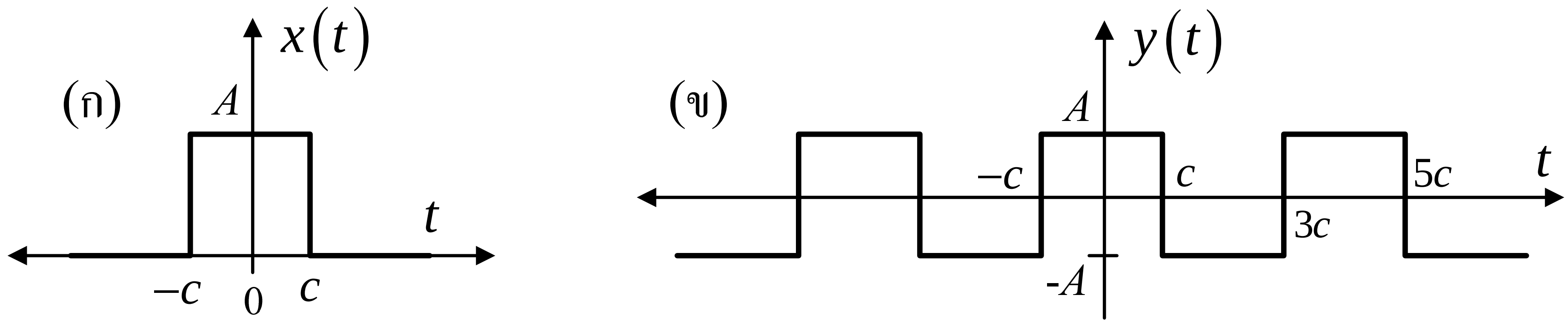
$$= \frac{1}{T_0} A^2 \int_0^{T_0} \left[\frac{1 + \cos(2\omega t + 2\phi)}{2}\right] dt$$

$$= \frac{A^2}{2T_0}\left[\int_0^{T_0} 1 dt + \int_0^{T_0} \cos(2\omega t + 2\phi)\, dt\right] = \frac{A^2}{2T_0}[T_0 + 0] = \frac{A^2}{2}$$

เนื่องจาก $\int_0^{T_0} \cos(2\omega t + 2\phi) dt = 0$

Exercise 1

จงพิจารณาว่าสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาในภาพต่อไปนี้เป็นสัญญาณกำลัง หรือสัญญาณพลังงาน เมื่อ c เป็นค่าคงตัว



SOLUTION

จากภาพ (ก) กำลังของสัญญาณ $x(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-c}^{c} |A|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}(2c) = 0$$

และพลังงานของสัญญาณ $x(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-c}^{c} |A|^2 dt = 2cA^2$$

ดังนั้นสัญญาณ $x(t)$ เป็นสัญญาณพลังงาน เพราะว่า $P = 0$ และ $0 < E < \infty$

จากภาพ (ข) กำลังของสัญญาณ $y(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{4c} \int_{-c}^{3c} |y(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{4c}\left[\int_{-c}^{c} |A|^2 dt + \int_{c}^{3c} |-A|^2 dt \right]$$

$$= \frac{1}{4c}\left[2cA^2 + 2cA^2 \right] = \frac{A^2}{2}$$

และพลังงานของสัญญาณ $y(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \infty$$

ดังนั้นสัญญาณ $y(t)$ เป็นสัญญาณกำลัง เนื่องจาก $0 < P < \infty$ และ $E = \infty$

สัญญาณคอซอล แอนไทคอซอล และนอนคอซอล

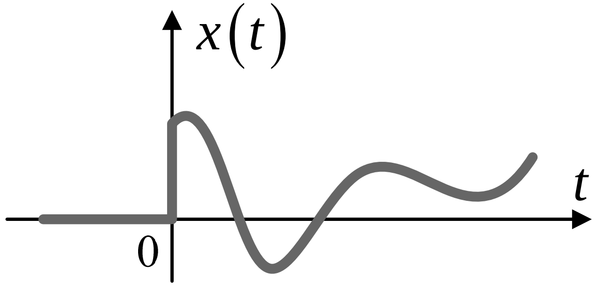
- สัญญาณคอซอล (causal signal) คือสัญญาณที่มีค่าเป็นค่าศูนย์สำหรับช่วงเวลาที่เป็นลบ

$$x(t) = 0, \quad \text{สำหรับ } t < 0$$

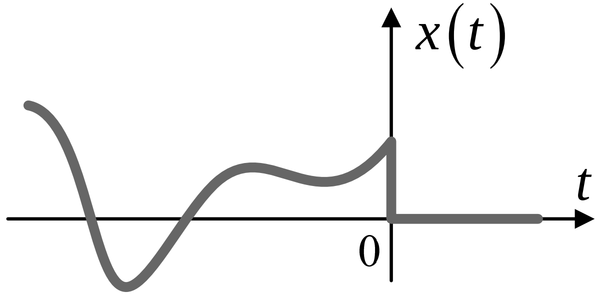
- สัญญาณแอนไทคอซอล (anticausal signal) คือสัญญาณที่มีค่าเป็นค่าศูนย์สำหรับช่วงเวลาที่เป็นบวก

$$x(t) = 0, \quad \text{สำหรับ } t > 0$$

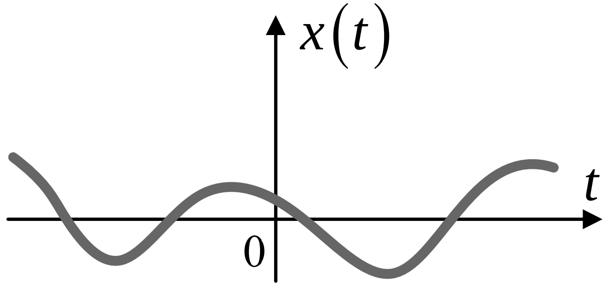
- สัญญาณนอนคอซอล (noncausal signal) คือสัญญาณที่มีค่าไม่เท่ากับค่าศูนย์ปรากฏอยู่ในทั้งช่วงเวลาที่เป็นบวกและช่วงเวลาที่เป็นลบ



(ก) สัญญาณคอซอล

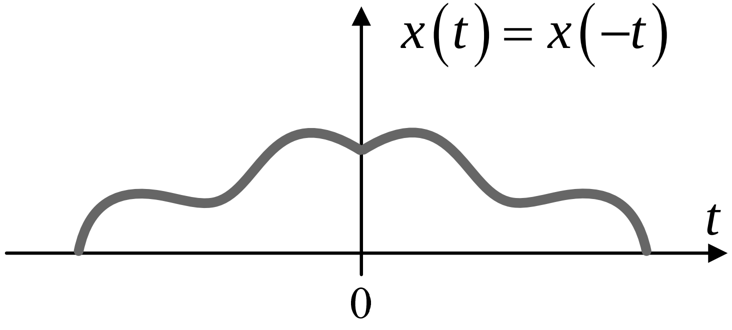


(ข) สัญญาณแอนไทคอซอล

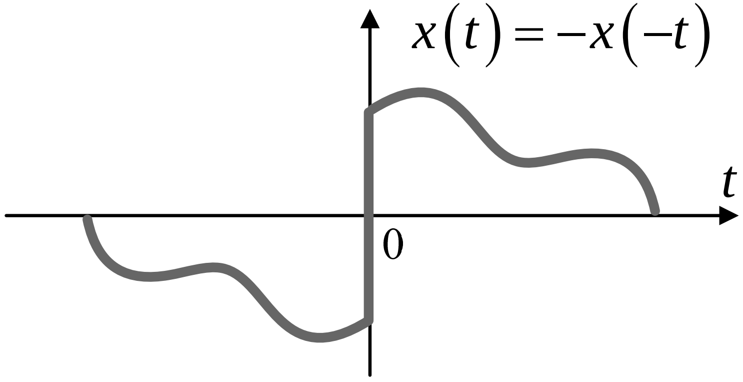


(ค) สัญญาณนอนคอซอล

สัญญาณคู่และสัญญาณคี่



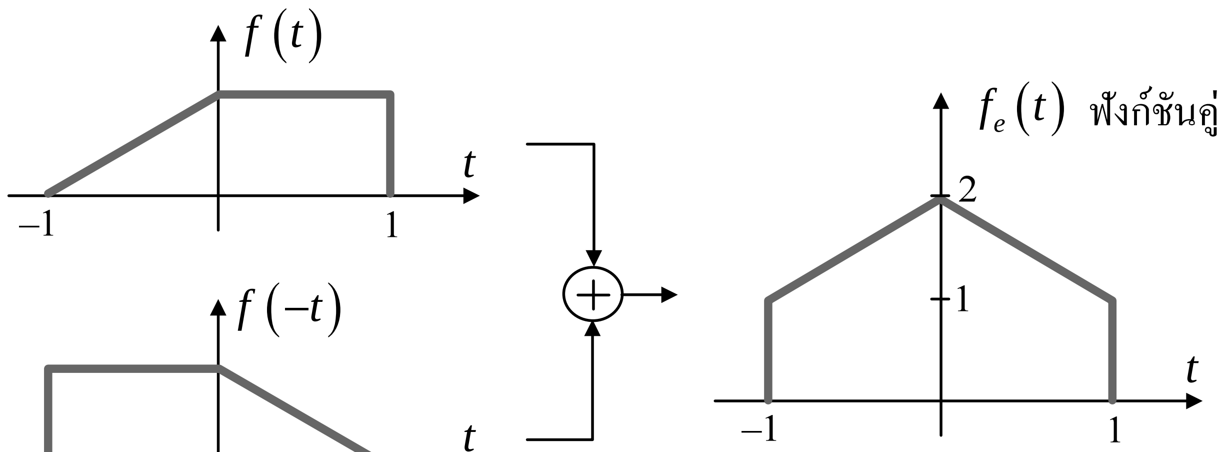
(ก) สัญญาณคู่



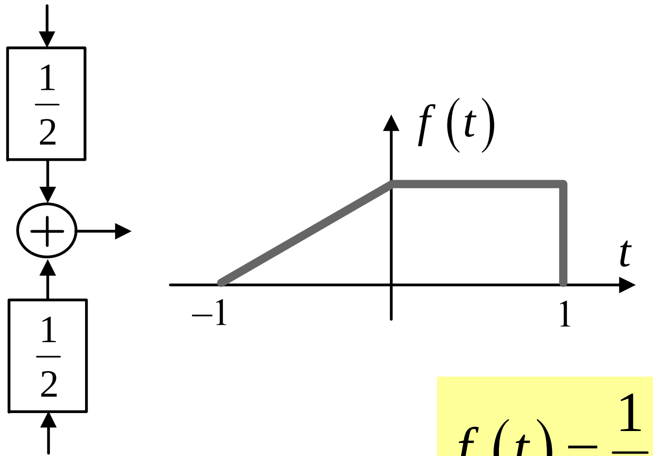
(ข) สัญญาณคี่

- สัญญาณ f(t) ใดๆ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลรวมของสัญญาณคู่และสัญญาณคี่ได้ดังนี้

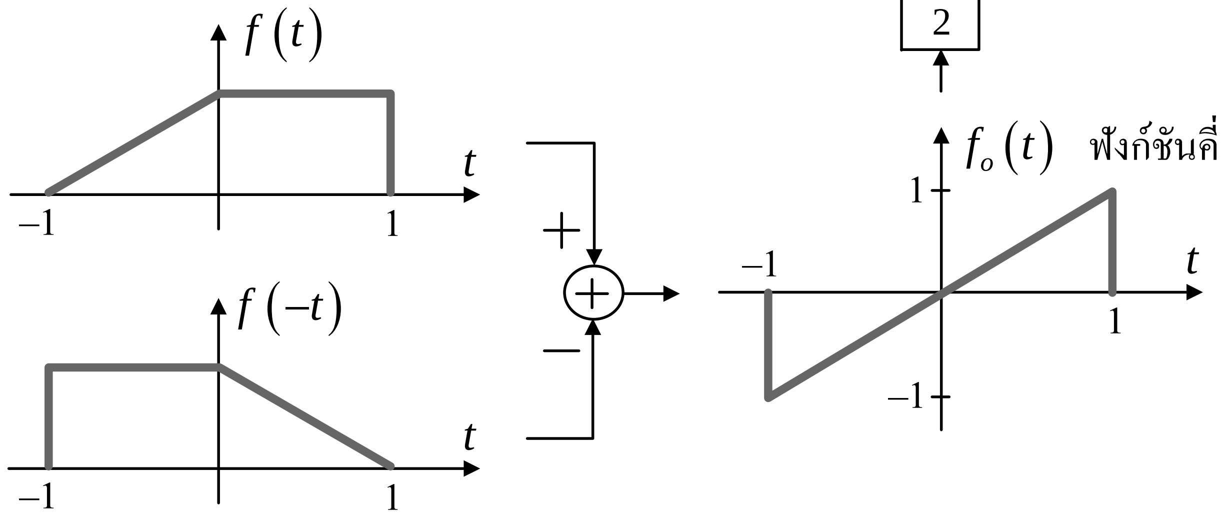
$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\{f(t) + f(-t)\}}_{\text{even}} + \underbrace{\frac{1}{2}\{f(t) - f(-t)\}}_{\text{odd}}$$



$$f(t)=\frac{1}{2}\underbrace{\{f(t)+f(-t)\}}_{\text{even}}+\frac{1}{2}\underbrace{\{f(t)-f(-t)\}}_{\text{odd}}$$



$$f(t)=\frac{1}{2}f_e(t)+\frac{1}{2}f_o(t)$$

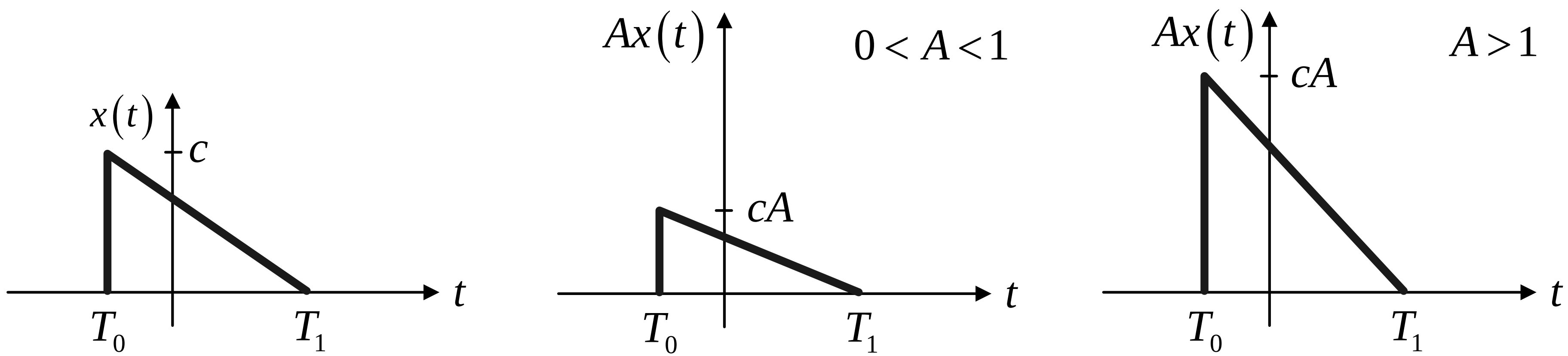


การแปลงลักษณะของสัญญาณ

- ในการวิเคราะห์สัญญาณ ⇒ มีความจำเป็นต้องเปลี่ยนแปลงลักษณะหรือรูปแบบของสัญญาณ เช่น การย่อและการขยายขนาดของสัญญาณ การเลื่อนเวลาของสัญญาณ การบีบและการขยายเวลาของสัญญาณ และการพับสัญญาณ เพื่อช่วยทำให้การวิเคราะห์ข้อมูลของสัญญาณมีความง่ายขึ้น

การย่อและการขยายขนาดของสัญญาณ

- การย่อและการขยายขนาดของสัญญาณ ⇒ นำค่าสเกลาร์มาคูณกับสัญญาณ เช่น y(t) = Ax(t)

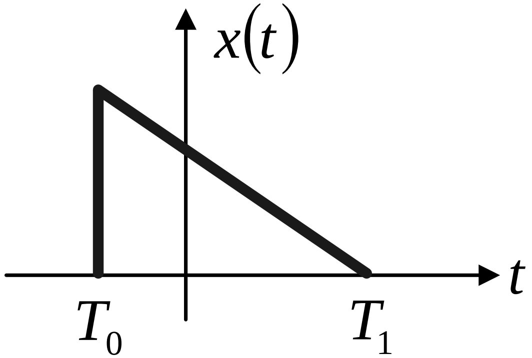


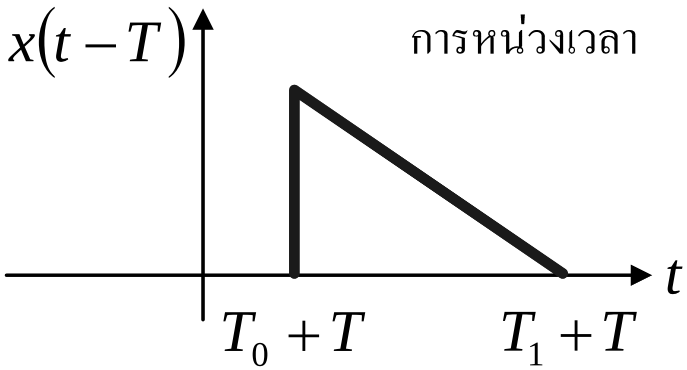
การเลื่อนเวลาของสัญญาณ

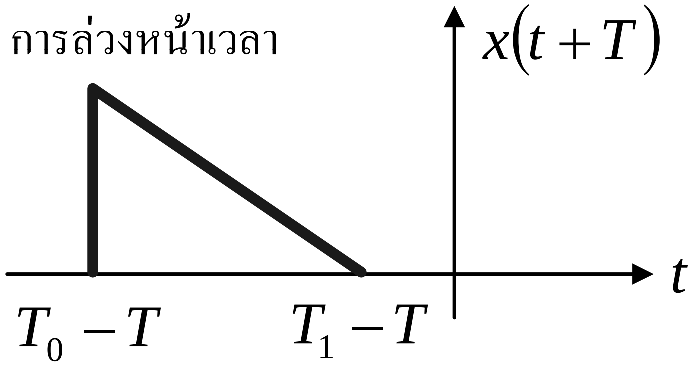
- การเลื่อนเวลา (time-shifting) ⇒ ทำได้ง่ายโดยการเปลี่ยนตัวแปร
  - ทำได้ทั้งแบบหน่วงเวลา (delay) และแบบล่วงหน้าเวลา (advance)
  - ถ้าต้องการให้สัญญาณ y(t) มีค่าเท่ากับ x(t) ที่ถูก**หน่วงเวลา**ไป T > 0 หน่วย ⇒ เปลี่ยนตัวแปรอิสระของ x(t) จาก t ไปเป็น t – T
  - ถ้าต้องการให้สัญญาณ y(t) มีค่าเท่ากับ x(t) ที่ถูก**ล่วงหน้าเวลา**ไป T > 0 หน่วย ⇒ เปลี่ยนตัวแปรอิสระของ x(t) จาก t ไปเป็น t + T

$$y(t)=x(t)\big|_{t\to(t-T)}=x(t-T)$$

$$y(t)=x(t)\big|_{t\to(t+T)}=x(t+T)$$





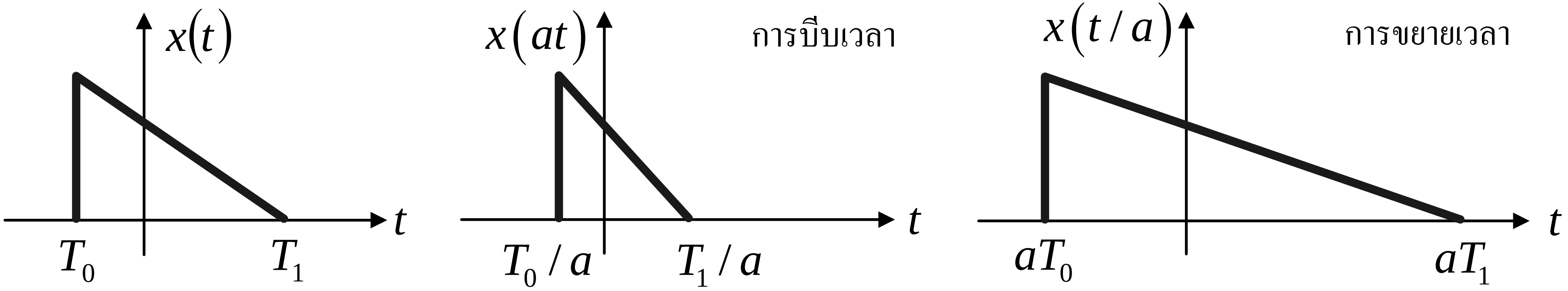


การสเกลเวลาของสัญญาณ

- การสเกลเวลา (time-scaling) คือการบีบเวลา (time-compression) หรือการขยายเวลา (time-expansion) ของสัญญาณ ⇒ ทำได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร
  - ถ้าต้องการให้สัญญาณ y(t) มีค่าเท่ากับ x(t) ที่ถูก**บีบเวลา**ไปเป็นจำนวน a เท่า ⇒ เปลี่ยนตัวแปรอิสระของ x(t) จาก t ไปเป็น at
  - ถ้าต้องการให้สัญญาณ y(t) มีค่าเท่ากับ x(t) ที่ถูก**ขยายเวลา**ไปเป็นจำนวน a เท่า ⇒ เปลี่ยนตัวแปรอิสระของ x(t) จาก t ไปเป็น t/a

$$y(t) = x(t)\big|_{t\to(at)} = x(at)$$

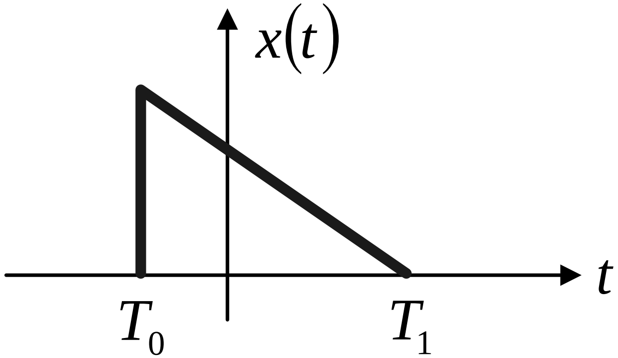
$$y(t) = x(t)\big|_{t\to(t/a)} = x\left(\frac{t}{a}\right)$$



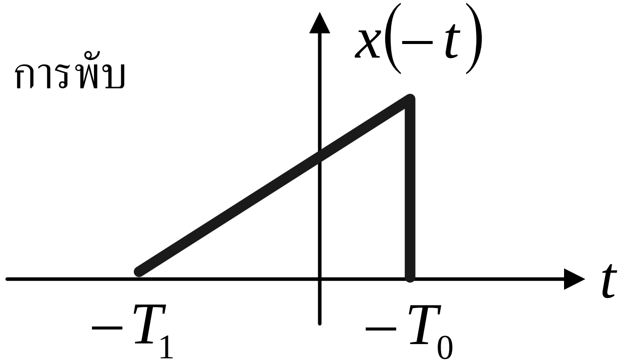
การพับสัญญาณ

- สมมุติว่าสัญญาณ x(t) แสดงอยู่ในระนาบพิกัดฉาก (x, y)
- การพับ (folding) สัญญาณ ⇒ เปรียบเสมือนกับการสะท้อน (reflect หรือ mirror) สัญญาณ x(t) รอบแกน y ซึ่งทำได้โดยการเปลี่ยนตัวแปรอิสระของสัญญาณ x(t) จาก t ไปเป็น –t

$$y(t) = x(t)\big|_{t \to -t} = x(-t)$$



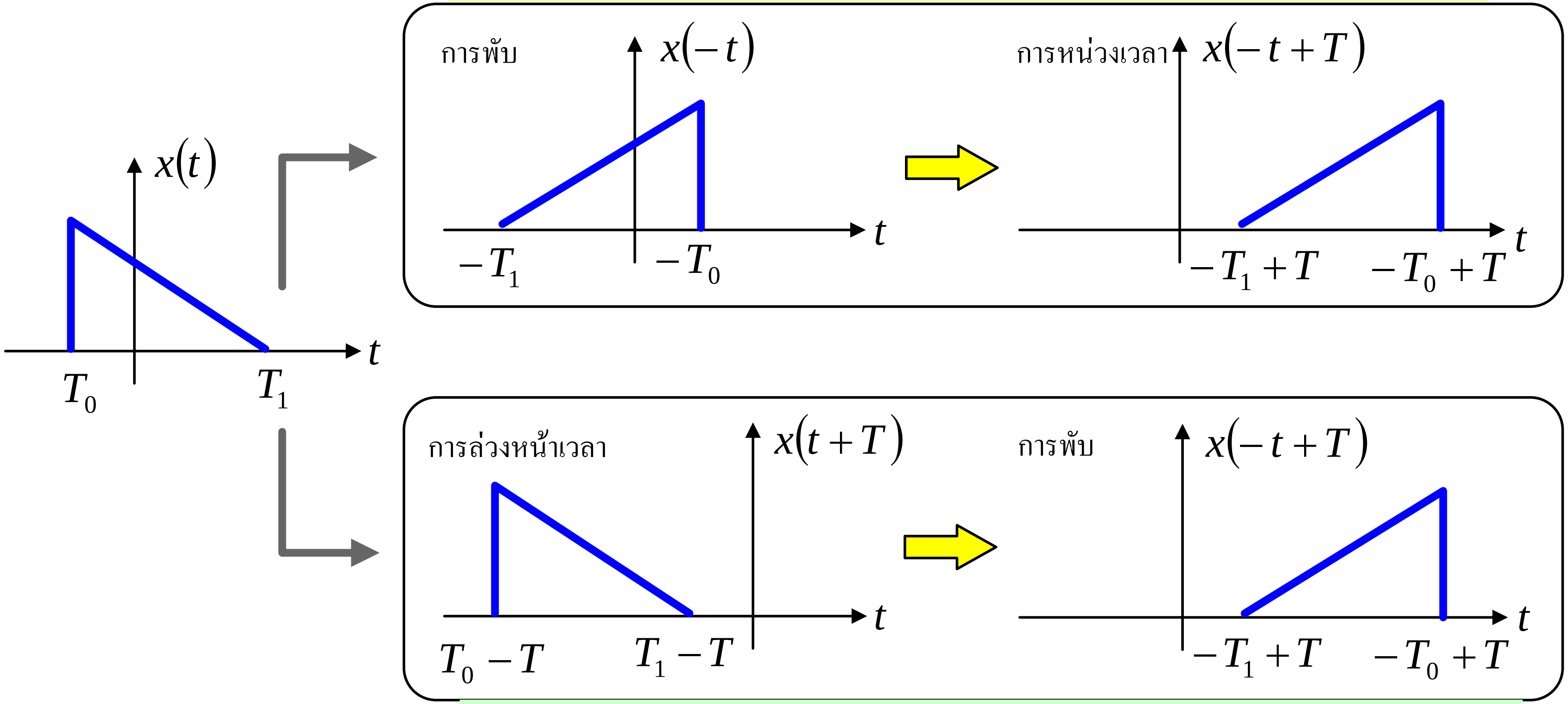
การพับ



การผสมระหว่างการเลื่อนเวลาและการพับสัญญาณ

- การเปลี่ยนตัวแปรอิสระ ⇒ นำมาผสมกัน ⇒ เป็นการแปลงที่ซับซ้อนมากขึ้น
  - เช่น ถ้าต้องการพับสัญญาณ x(t) และหน่วงเวลาของผลลัพธ์ที่ได้เป็นเวลา T หน่วย **มีค่าเท่ากับ**การล่วงหน้าเวลาของสัญญาณเป็นเวลา T หน่วยก่อน แล้วจึงทำการพับสัญญาณ

$$x(t) \xrightarrow[\text{fold}]{t \to -t} x(-t) \xrightarrow[\text{delay}]{t \to (t-T)} x(-(t-T)) = x(T-t)$$



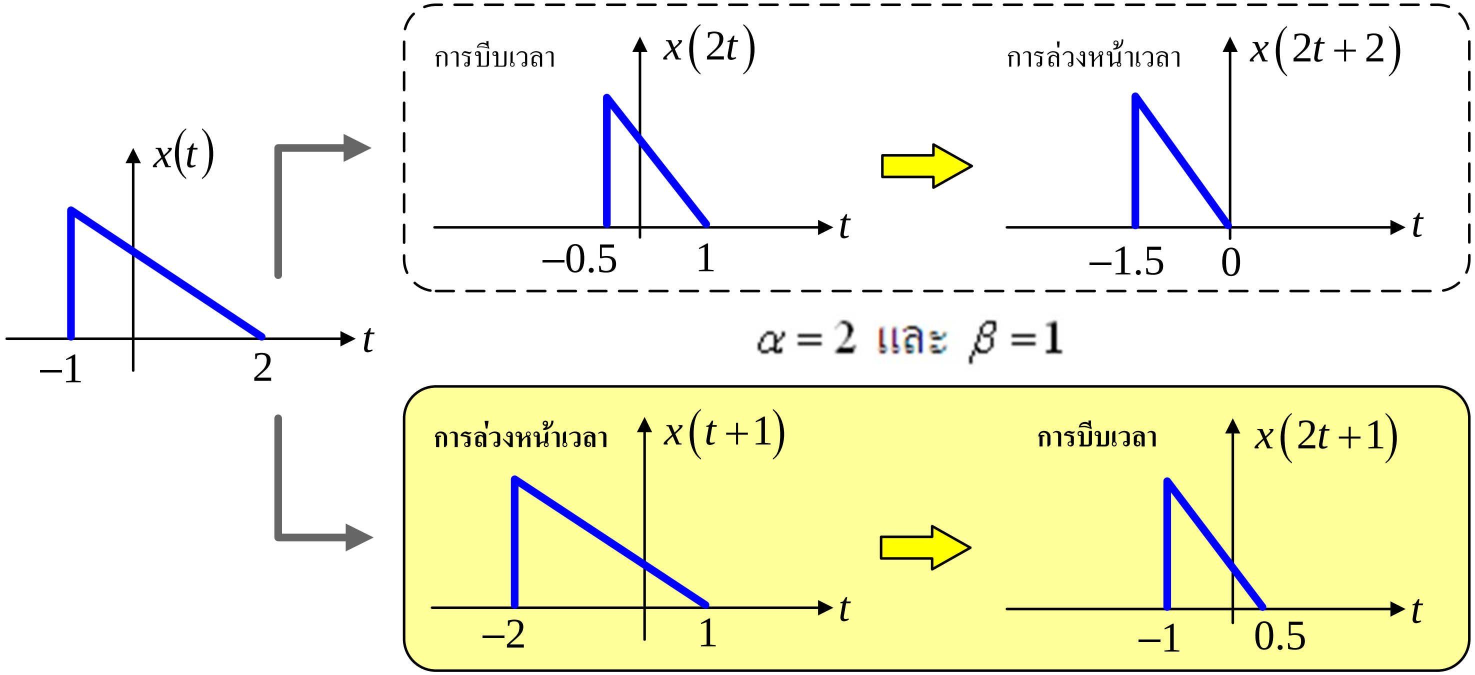
$$x(t) \xrightarrow[\text{advance}]{t \to (t+T)} x(t+T) \xrightarrow[\text{fold}]{t \to -t} x(-t+T) = x(T-t)$$

การผสมระหว่างการเลื่อนเวลาและการสเกลเวลาของสัญญาณ

- ถ้าต้องการให้สัญญาณ $y(t) = x(\alpha t + \beta)$ เมื่อ $\alpha > 0$ และ $\beta > 0$ ก็ทำได้โดยการเลื่อนเวลาของสัญญาณก่อน แล้วจึงนำผลลัพธ์ที่ได้มาทำการสเกลเวลา

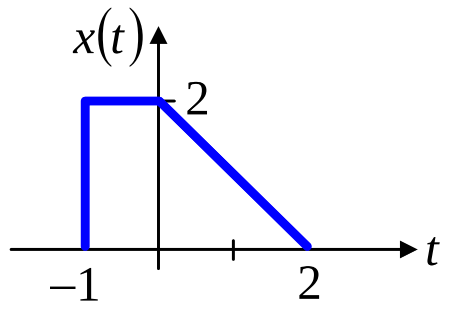
$$x(t) \xrightarrow[\text{time-shifting}]{t \to (t+\beta)} x(t+\beta) \xrightarrow[\text{time-scaling}]{t \to \alpha t} x(\alpha t + \beta)$$

- หากทำการสเกลเวลาของสัญญาณก่อน แล้วจึงนำผลลัพธ์ที่ได้มาทำการเลื่อนเวลา ก็จะได้ผลลัพธ์ที่ผิดไปจากที่ต้องการ $x(t) \xrightarrow[\text{time-scaling}]{t \to \alpha t} x(\alpha t) \xrightarrow[\text{time-shifting}]{t \to (t+\beta)} x(\alpha(t+\beta)) = x(\alpha t + \alpha\beta)$

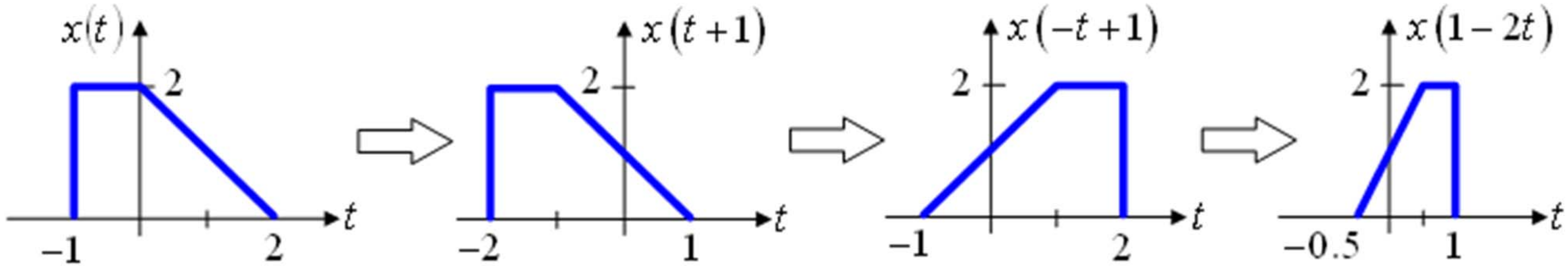


Example 4

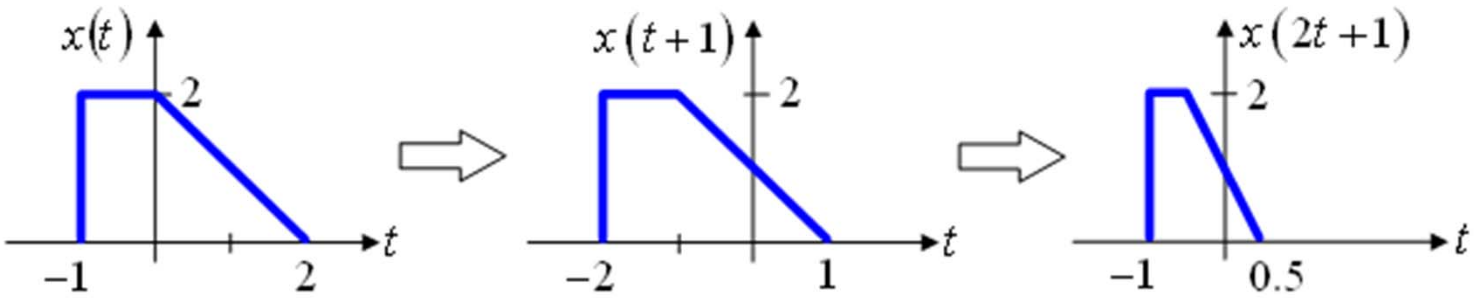
จงวาดรูปของสัญญาณ $x(1-2t)$, $x(2t+1)$, $x(2-t)$, และ $x\left(-\frac{t}{2}\right)$



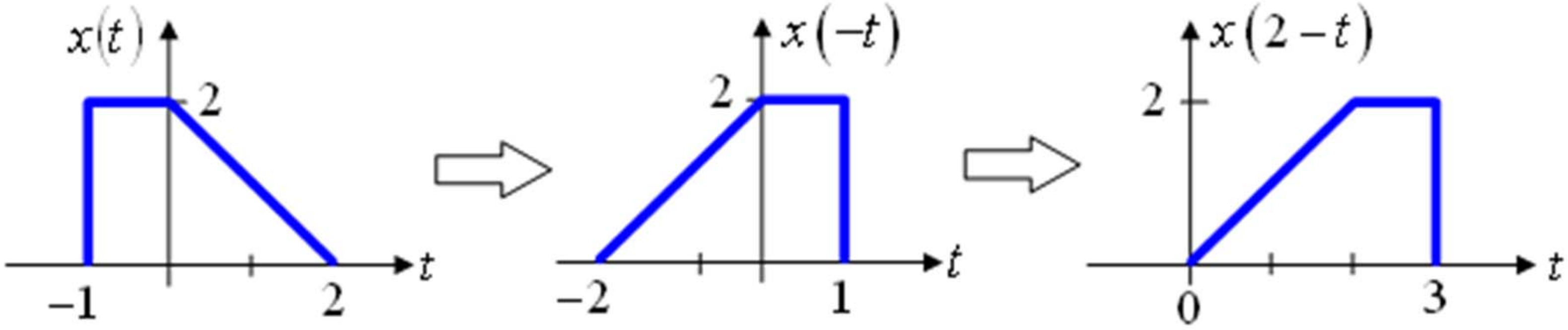
- สัญญาณ $x(1-2t)$ หาได้จาก



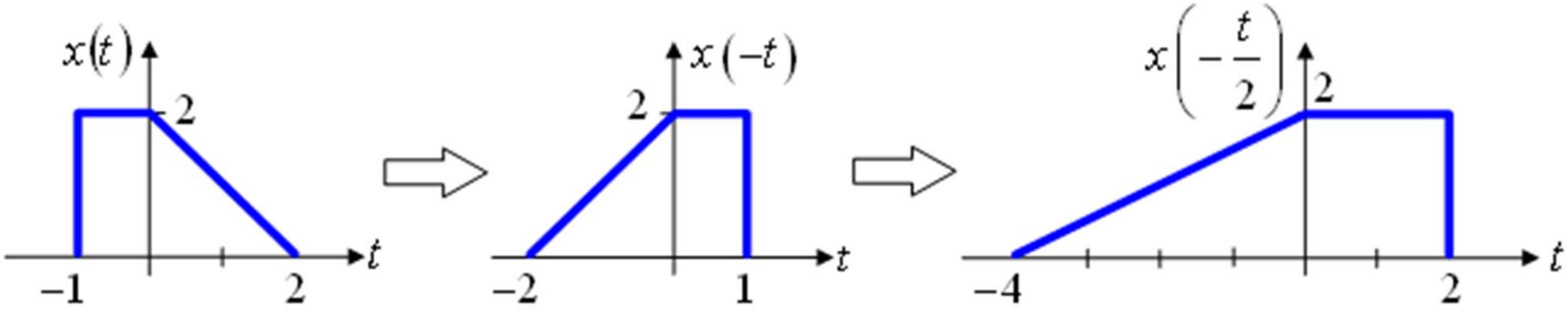
- สัญญาณ $x(2t+1)$ หาได้จาก



- สัญญาณ $x(2-t)$ หาได้จาก

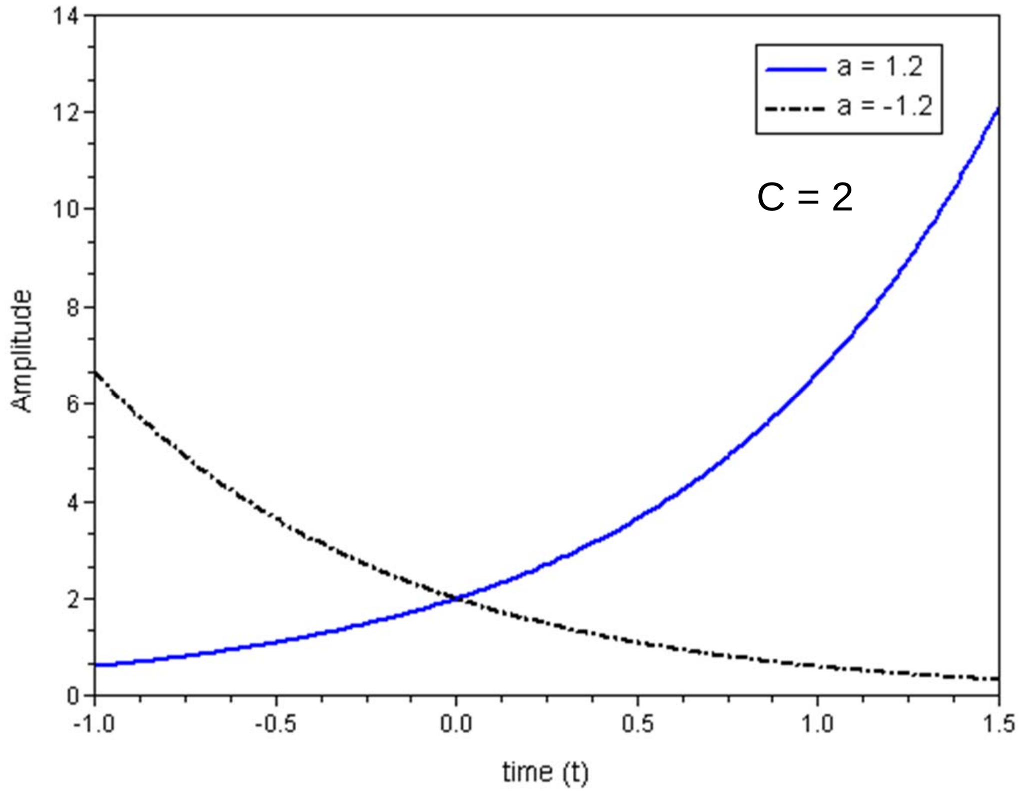


- สัญญาณ $x\left(-\frac{t}{2}\right)$ หาได้จาก



สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่ต่อเนื่องทางเวลา

- สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อน (complex exponential signal) พบมากในการใช้งานทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม เนื่องจากปัญหาส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนและฟังก์ชันเชิงซ้อน
- สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่ต่อเนื่องทางเวลา $x(t) = Ce^{at}$
  - เมื่อ C และ a คือเลขจำนวนเชิงซ้อน



สัญญาณเลขชี้กำลังจำนวนจริง

$\Rightarrow$ เมื่อ C และ a คือเลขจำนวนจริง

สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนแบบคาบ

$j = \sqrt{-1}$

$\omega = 2\pi f$

⇒ เมื่อ C = 1 และ a = jω เป็นจำนวนจินตภาพแท้ ⇒ $x(t) = e^{j\omega t}$

⇒ x(t) เป็นสัญญาณเลขชี้กำลังแบบคาบ

⇒ พิจารณา x(t) เป็นสัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับ T จะได้

$$x(t) = e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T)} = e^{j\omega t}e^{j\omega T}$$

ก็ต่อเมื่อ $e^{j\omega T} = 1$ นั่นคือคาบมูลฐานของ x(t) คือ $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$

สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนแบบทั่วไป

⇒ เมื่อ $C = |C|e^{j\theta}$ และ a = r + jω คือเลขจำนวนเชิงซ้อน จะได้

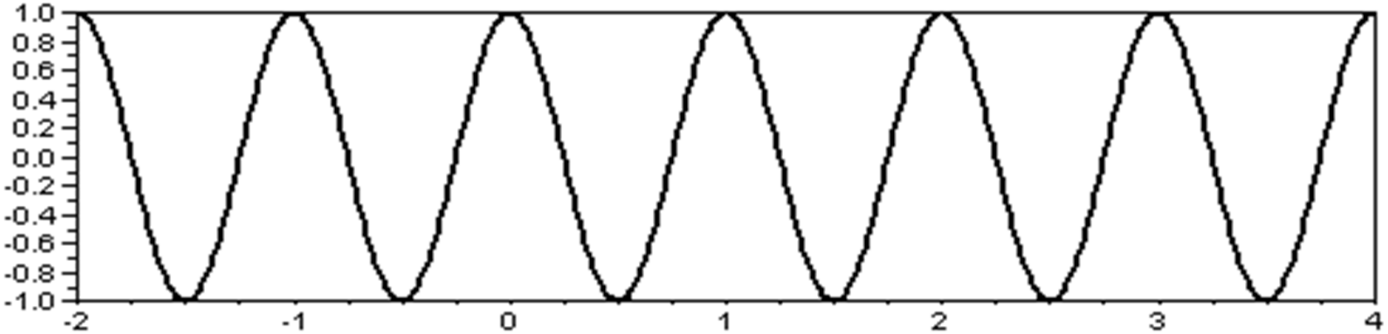
$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega t+\theta)}$$

จากความสัมพันธ์ของออยเลอร์ (Euler's relation) ⇒ $e^{j\beta} = \cos(\beta) + j\sin(\beta)$

เมื่อ β คือเลขจำนวนจริง

❑ สัญญาณ x(t) เขียนใหม่ได้เป็น

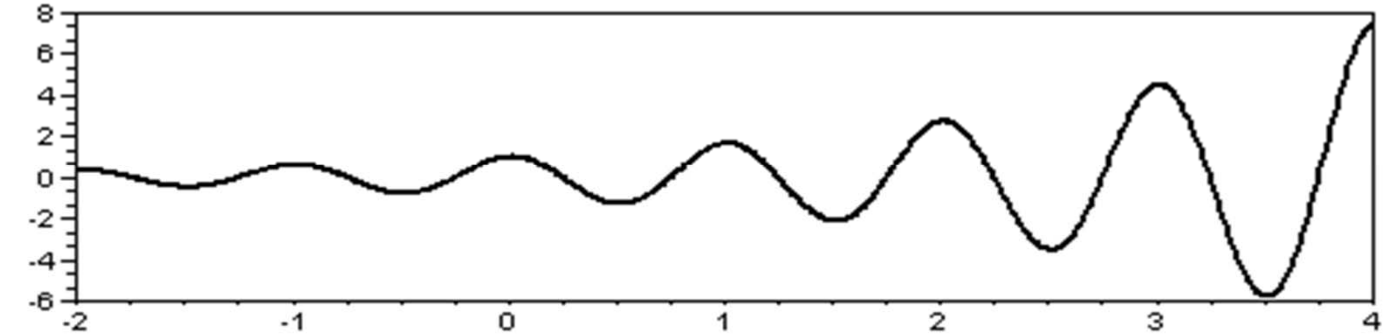
$$x(t)=|C|e^{rt}e^{j(\omega t+\theta)}=|C|e^{rt}\cos(\omega t+\theta)+j|C|e^{rt}\sin(\omega t+\theta)$$



r = 0

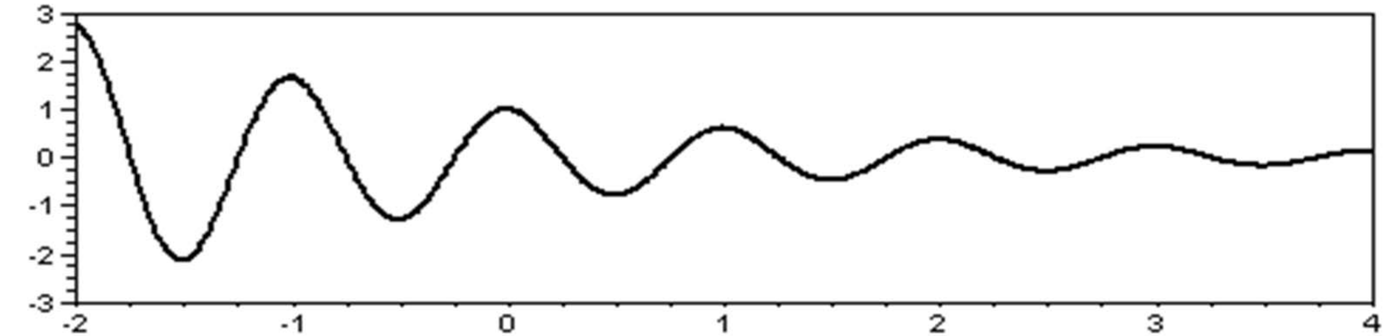
$C=1$, $r=0.5$

$\omega=2\pi$ และ $\theta=0$



r > 0

คลื่นรูปไซน์ที่คูณกับ
สัญญาณเลขชี้กำลังแบบ**เพิ่มขึ้น**



r < 0

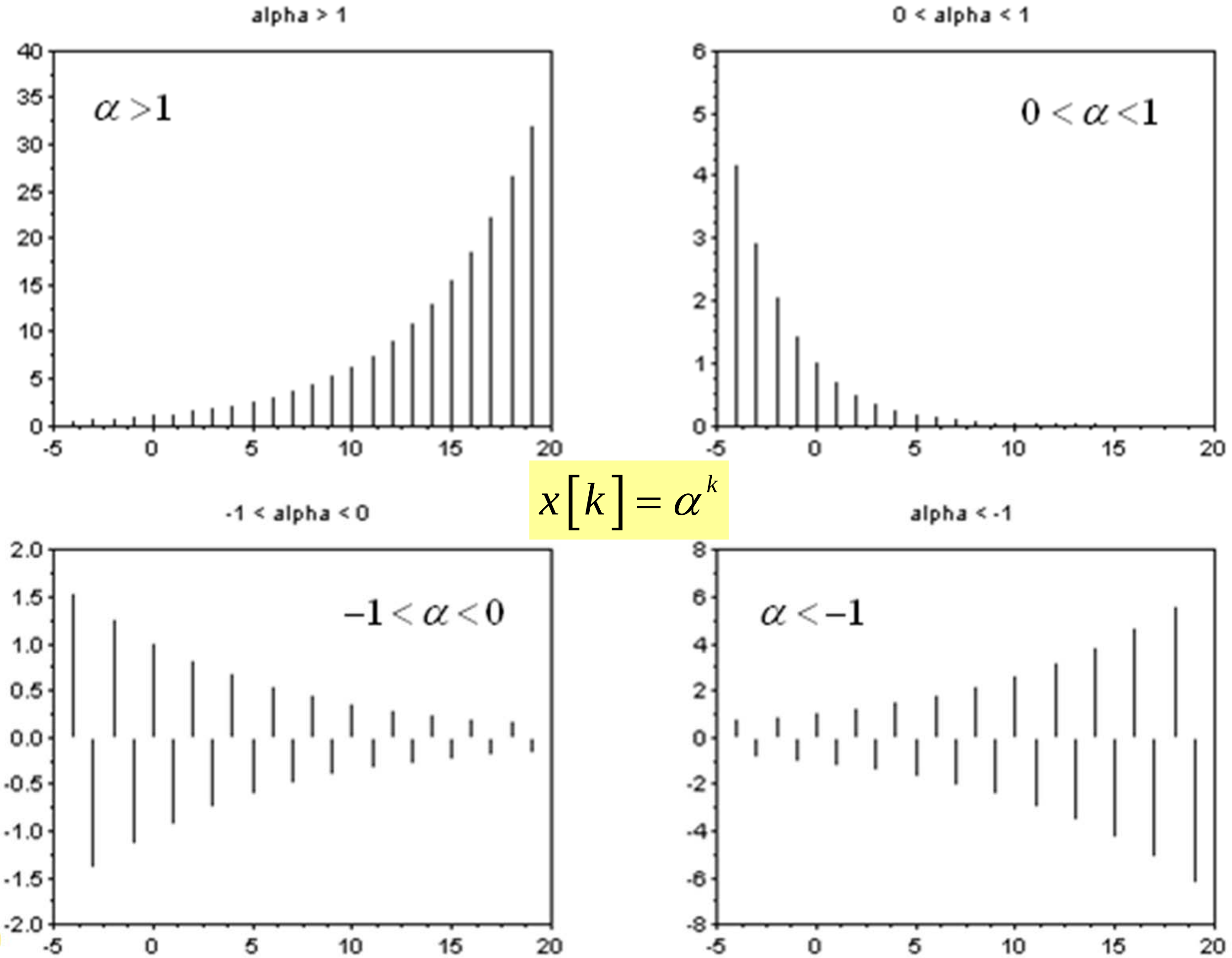
คลื่นรูปไซน์ที่คูณกับ
สัญญาณเลขชี้กำลังแบบ**ลดลง**

สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่**ไม่**ต่อเนื่องทางเวลา

- สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา $x[k] = C\alpha^k = Ce^{\beta k}$
  - เมื่อ C และ $\alpha = e^{\beta}$ คือเลขจำนวนเชิงซ้อน

สัญญาณเลขชี้กำลังจำนวนจริง

$\Rightarrow$ C และ α คือเลขจำนวนจริง



สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนแบบคาบ

⇒ เมื่อ C = 1 และ β = jω เป็นจำนวนจินตภาพแท้ ⇒ $x[k] = Ce^{\beta k} = e^{j\omega k}$

⇒ x[k] มีลักษณะใกล้เคียงกับสัญญาณคลื่นรูปไซน์ที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

$$x[k] = A\cos(\omega k + \theta) = \frac{A}{2}e^{j\omega k}e^{j\theta} + \frac{A}{2}e^{-j\omega k}e^{-j\theta}$$

⇒ สัญญาณนี้เป็นสัญญาณกำลัง เนื่องจากกำลังเฉลี่ยของสัญญาณมีค่าจำกัดเท่ากับ 1

⇒ ถ้าให้ N เป็นคาบเวลาของ $x[k] = e^{j\omega k}$

$$e^{j\omega k} = e^{j\omega(k+N)} = e^{j\omega k}e^{j\omega N}$$

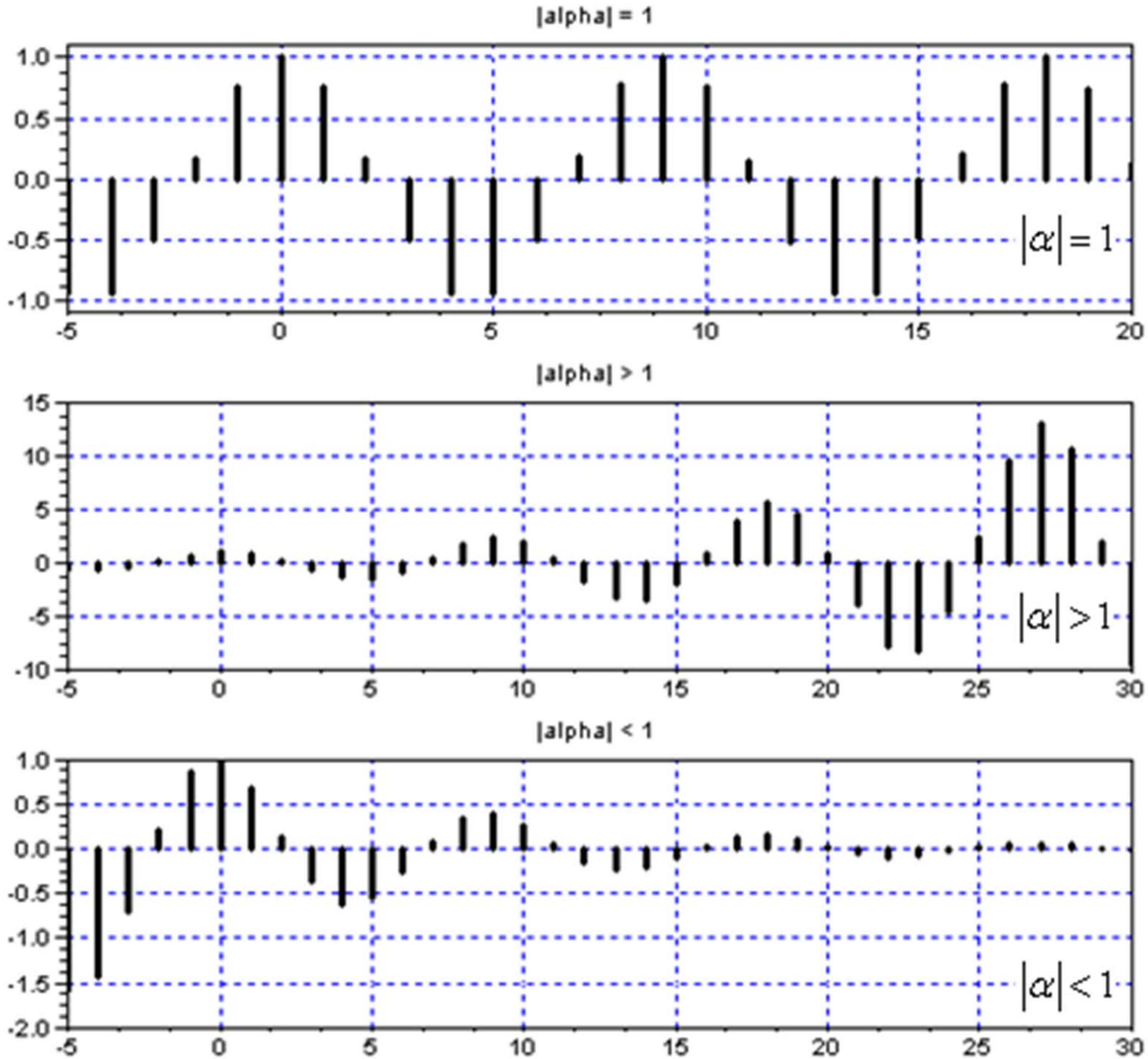
ก็ต่อเมื่อ $\omega N = 2\pi m$ หรือ $N = m\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$

สัญญาณเลขชี้กำลังเชิงซ้อนแบบทั่วไป

⇒ เมื่อ $C = |C|e^{j\theta}$ และ $\alpha = |\alpha|e^{j\omega}$ คือเลขจำนวนเชิงซ้อน จะได้ (ถ้าให้ $|\alpha| = 1$)

$$x[k] = C\alpha^k = |C||\alpha|^k\cos(\omega k + \theta) + j|C||\alpha|^k\sin(\omega k + \theta)$$

$$x[k] = C\alpha^k = |C||\alpha|^k \cos(\omega k + \theta) + j|C||\alpha|^k \sin(\omega k + \theta)$$



$C = 1$

$\omega = 0.7$ และ $\theta = 0$

Example 5

จงหาคาบมูลฐานของสัญญาณ $x[k] = e^{j(2\pi/3)k} + e^{j(3\pi/4)k}$

วิธีทำ เริ่มต้นให้หาคาบมูลฐานของสัญญาณย่อยแต่ละสัญญาณจะได้

- คาบมูลฐาน N_1 ของสัญญาณ $e^{j(2\pi/3)k}$ $\Rightarrow N_1 = m\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = m\left(\frac{2\pi}{2\pi/3}\right) = 3m$

  ค่า m ที่น้อยสุดที่ทำให้ค่า N_1 เป็นเลขจำนวนเต็ม คือ $m = 1$ $\Rightarrow N_1 = 3$

- คาบมูลฐาน N_2 ของสัญญาณ $e^{j(3\pi/4)k}$ $\Rightarrow N_2 = m\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = m\left(\frac{2\pi}{3\pi/4}\right) = \frac{8}{3}m$

  ค่า m ที่น้อยสุดที่ทำให้ค่า N_2 เป็นเลขจำนวนเต็ม คือ $m = 3$ $\Rightarrow N_2 = 8$

- คาบมูลฐาน N ของสัญญาณ $x[k]$ คือ ค.ร.น. ของ 3 และ 8 $\Rightarrow N = 24$

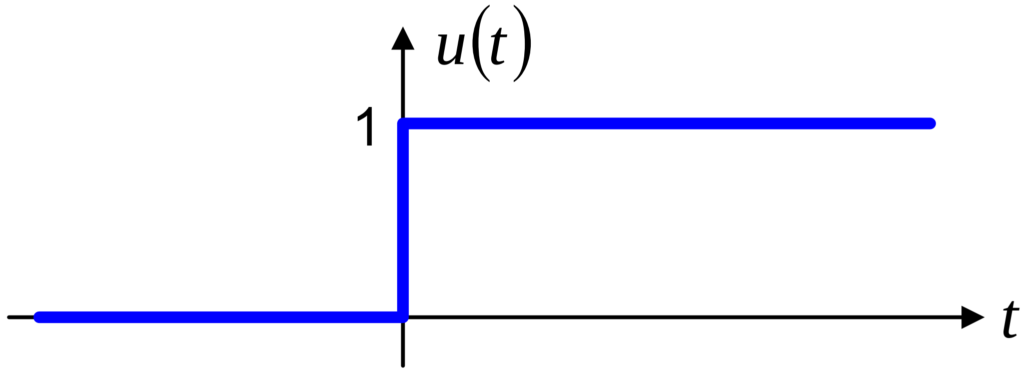
สัญญาณพื้นฐานที่น่าสนใจ

- ในส่วนนี้จะกล่าวถึงลักษณะและคุณสมบัติของสัญญาณพื้นฐานที่พบมากในทางปฏิบัติ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ
  - สัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (unit step function)
  - สัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย (unit impulse function)
  - สัญญาณทางลาด (ramp function)
  - สัญญาณซิงก์ (sinc function)

สัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

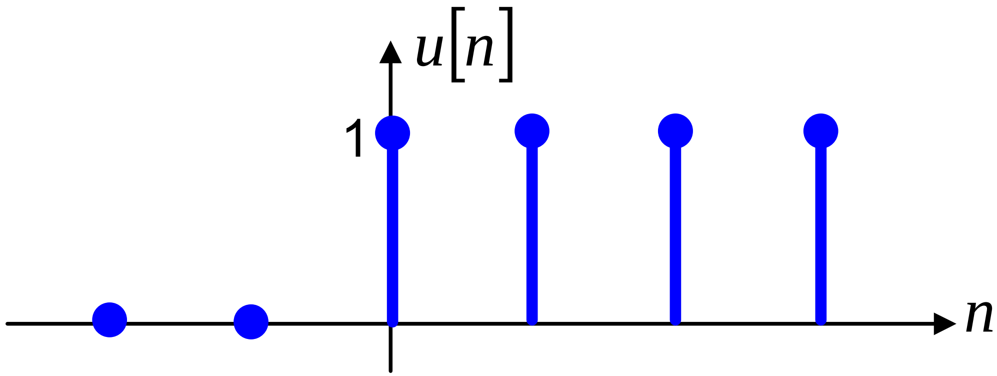
- Continuous-time unit step function:

$$u(t)=\begin{cases}1 & ,t>0\\ 0 & ,t<0\end{cases}$$



- Discrete-time unit step function:

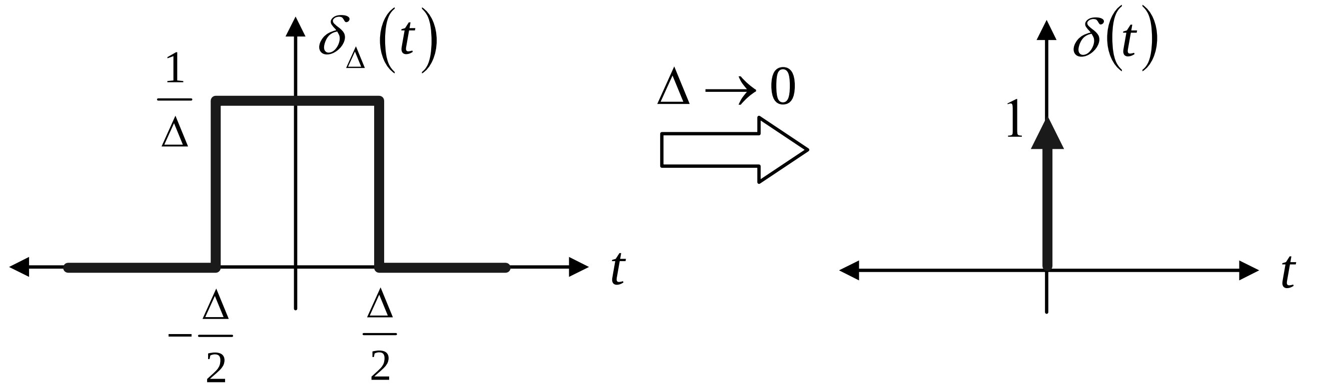
$$u[n]=\begin{cases}1 & ,n\geq 0\\ 0 & ,n<0\end{cases}$$



สัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย

- Dirac delta function (continuous-time)

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}, & |t|\le\dfrac{\Delta}{2}\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$



เมื่อค่า “1” ใช้แทนพื้นที่ใต้กราฟทั้งหมดของสัญญาณอิมพัลส์หนึ่งหน่วย

$$\lim_{\Delta\to 0}\delta_{\Delta}(t)=\delta(t)=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

คุณสมบัติที่สำคัญ

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$ (หมายถึงพื้นที่ใต้กราฟของสัญญาณไดแร็กเดลตามีค่าเท่ากับ 1 หน่วย)

2) $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

3) $\delta(t) = \delta(-t)$

4) $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

5) $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} f(t_0), & t_1 < t < t_2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

6) $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$ เมื่อ * คือตัวดำเนินการคอนโวลูชัน

7) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{n}(t-t_0)\,dt = (-1)^{n} \left.\dfrac{d^{n}f(t)}{dt^{n}}\right|_{t=t_0}$

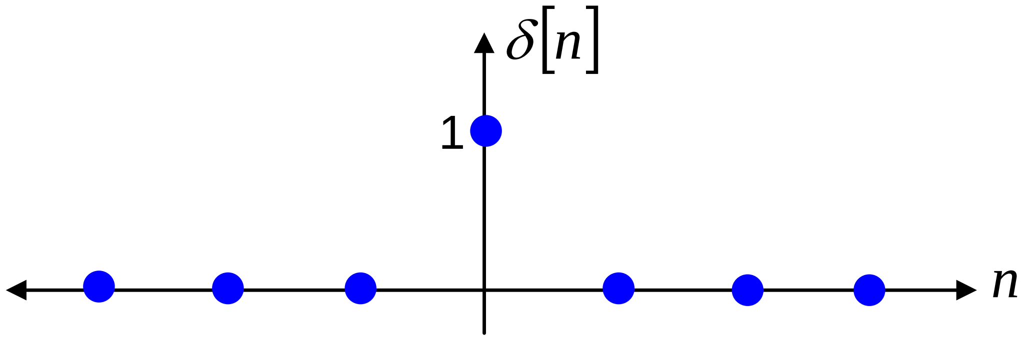
1) $\dfrac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

2) $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$

3) $\delta^{n}(t) = \dfrac{d^{n}u(t)}{dt^{n}}$

Kronecker delta function (discrete-time)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$



คุณสมบัติที่สำคัญ

1) $\delta[k] = u[k] - u[k-1]$

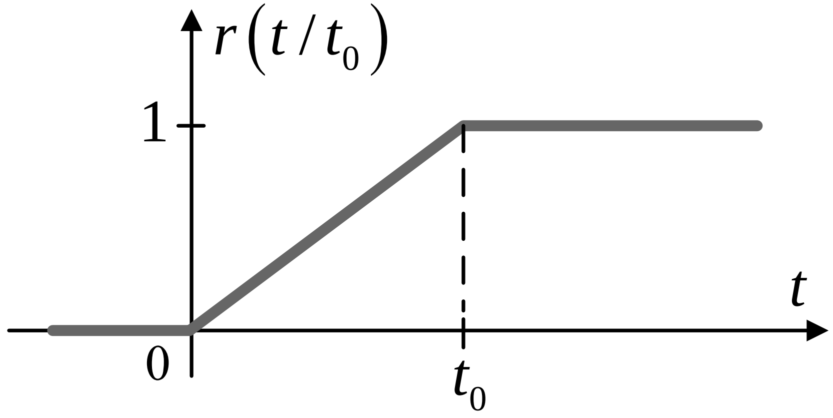
2) $x[k]\delta[k] = x[0]\delta[k]$

3) $x[k]\delta[k-k_0] = x[k_0]\delta[k-k_0]$

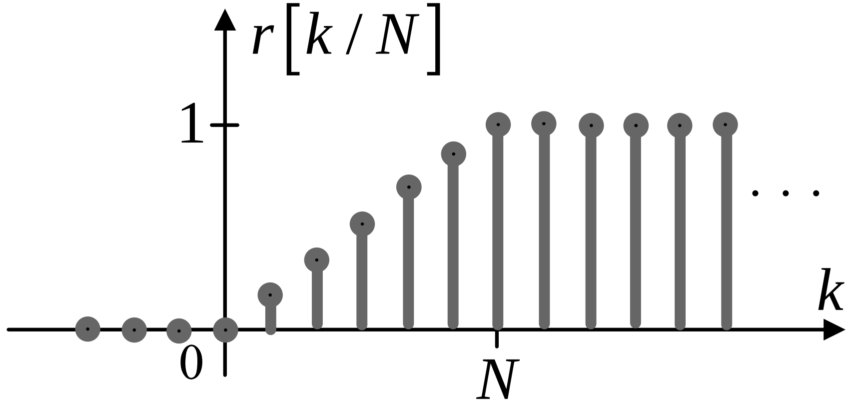
4) $x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[k-m]$

5) $u[k] = \sum_{m=-\infty}^{k} \delta[m]$

สัญญาณทางลาด



(ก) สัญญาณทางลาดที่ต่อเนื่องทางเวลา



(ข) สัญญาณทางลาดที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

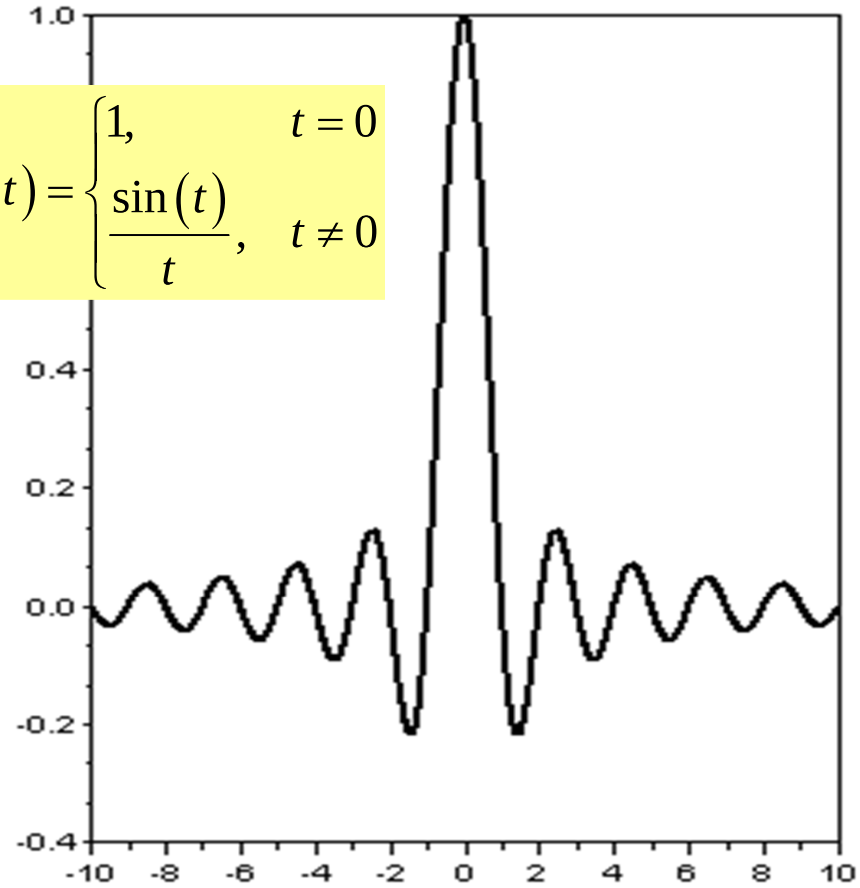
$$r\left(\frac{t}{t_0}\right)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t}{t_0}, & 0\le t\le t_0\\ 1, & t>t_0\end{cases}$$

$$r\left[\frac{k}{N}\right]=\begin{cases}0, & k<0\\ \dfrac{k}{N}, & 0\le k\le N\\ 1, & k>N\end{cases}$$

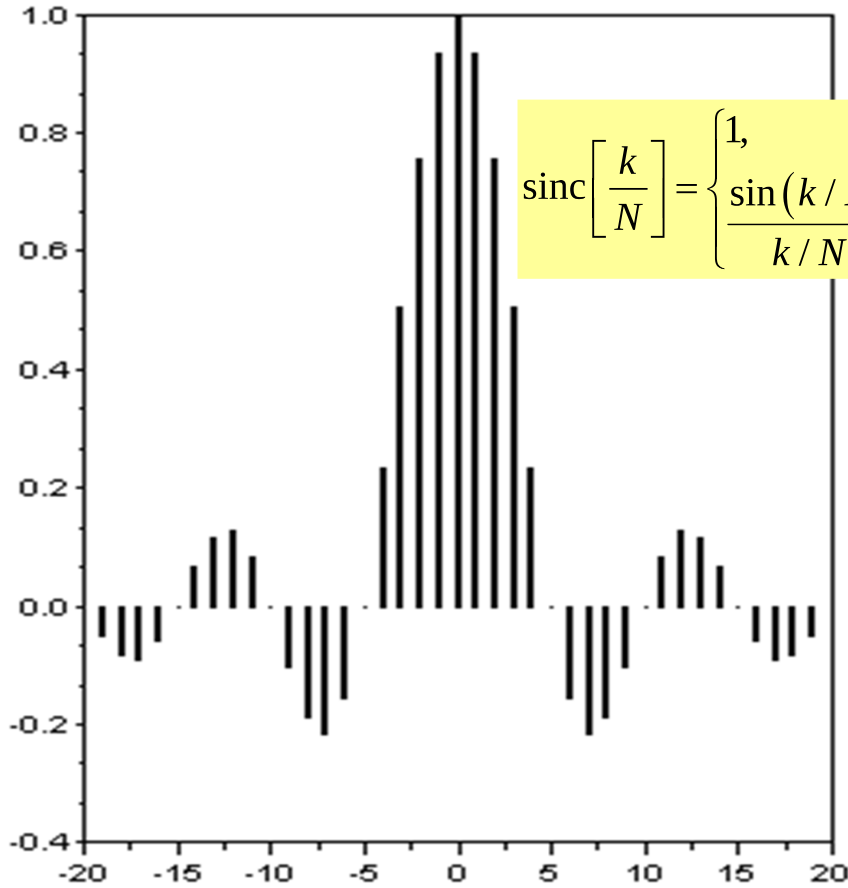
สัญญาณซิงก์

- ใช้มากในระบบสื่อสาร (โดยเฉพาะในทฤษฎีบทการชักตัวอย่าง)
- อาจเรียกว่า “สัญญาณการประมาณค่าในช่วง (interpolation signal)”

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \dfrac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{sinc}\left[\frac{k}{N}\right] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{\sin(k/N)}{k/N}, & k \neq 0 \end{cases}$$



คุณสมบัติที่สำคัญ

1) $\mathrm{sinc}(t) = 0$ เมื่อ $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(t)\,dt = \pi$

3) $\int_{0}^{\infty} \mathrm{sinc}(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$

4) $\lim_{a\to 0} \frac{1}{\pi a}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{a}\right) = \delta(t)$

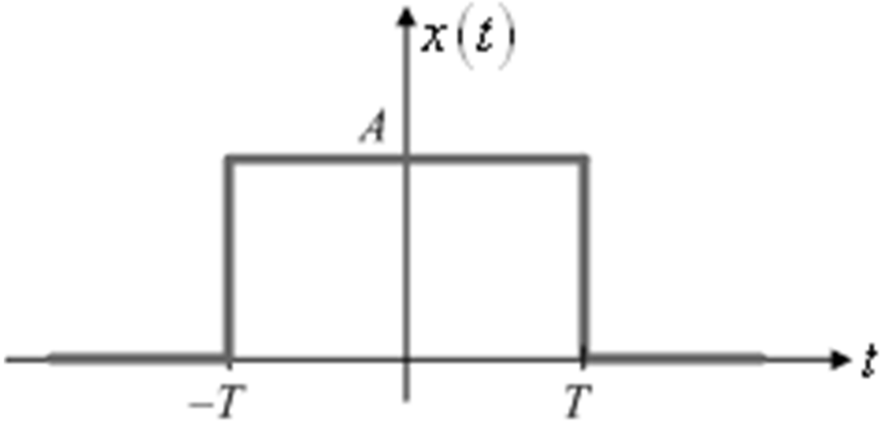
5) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t)\,dt = \pi$ นั่นคือพื้นที่ใต้กราฟของสัญญาณ $\mathrm{sinc}(t)$ มีค่าเท่ากับ π

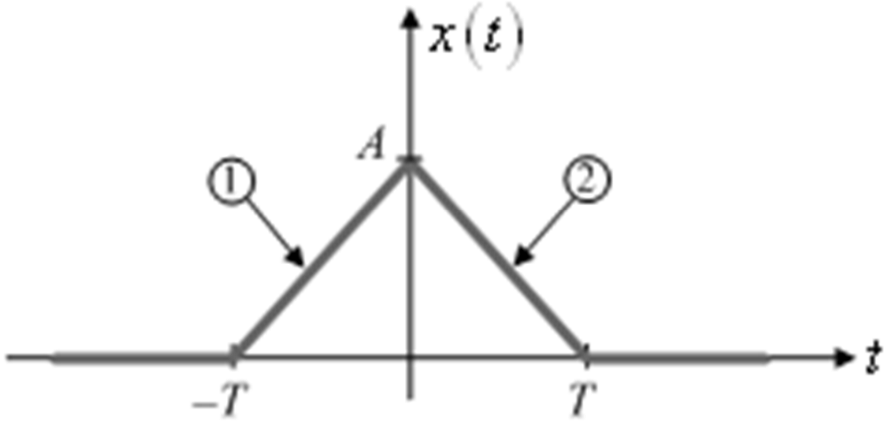
6) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\pi(x-y))\,\mathrm{sinc}(\pi y)\,dy = \mathrm{sinc}(\pi x)$

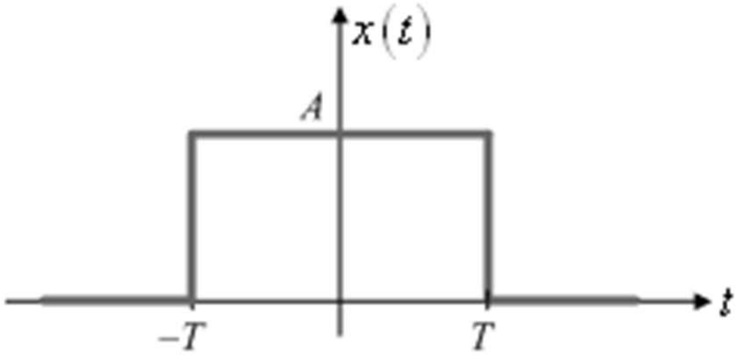
7) $\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi a}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{a}\right) f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,dt = f(0)$

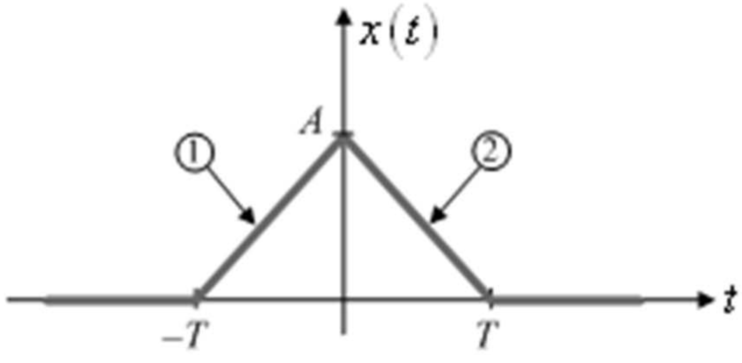
Exercise 2

- จงแสดงสัญญาณรูปสี่เหลี่ยมและสัญญาณรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย









วิธีทำ

ก) สัญญาณรูปสี่เหลี่ยมมีแอมพลิจูดเท่ากับ A ซึ่งเกิดจากสัญญาณขั้นบันไดที่เริ่มต้นที่เวลา $t = -T$ หักลบกับสัญญาณขั้นบันไดที่เริ่มต้นที่เวลา $t = T$ นั่นคือ

$$x(t) = A\{u(t+T) - u(t-T)\}$$

ข) สัญญาณรูปสามเหลี่ยมเกิดจากส่วนของเส้นตรงสองเส้นมารวมกัน โดยเส้นตรงส่วนที่หนึ่งและสองคือ

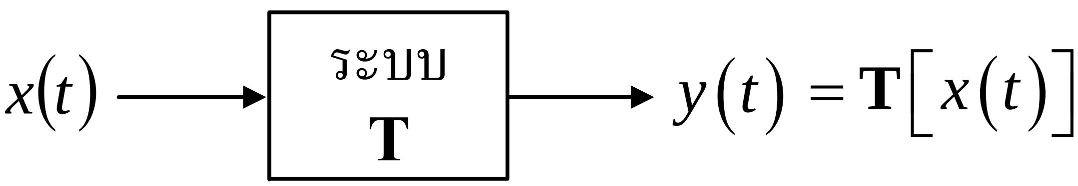
$$x_1(t) = A(t/T+1)\{u(t+T) - u(t)\} \quad \text{และ} \quad x_2(t) = A(1-t/T)\{u(t) - u(t-T)\}$$

ดังนั้นสัญญาณรูปสามเหลี่ยม มีรูปสมการคือ

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad = A\left(\frac{t}{T}+1\right)\{u(t+T) - u(t)\} + A\left(1-\frac{t}{T}\right)\{u(t+T) - u(t)\}$$

ระบบ (system)

- ระบบ $\Rightarrow$ เอนทิตี (entity) หรืออุปกรณ์หนึ่งที่ตอบสนองกับสัญญาณอินพุต (input signal) แล้วให้ผลลัพธ์เป็นสัญญาณเอาต์พุต (output signal)
  - อาจมีคุณสมบัติเหมือนกันหรือต่างกันกับสัญญาณอินพุตก็ได้
  - สัญญาณอินพุตของระบบเรียกว่า “สัญญาณกระตุ้น (excitation signal)”
  - สัญญาณเอาต์พุตเรียกว่า “สัญญาณตอบสนอง (response signal)” หรือผลตอบสนองของระบบ (system response)
  - เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้คือ



- **ระบบที่ต่อเนื่องทางเวลา** หมายถึงระบบที่มีสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตของระบบเป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา
- **ระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา** หมายถึงระบบที่มีสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตของระบบเป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา

ระบบเชิงเส้นและระบบไม่เชิงเส้น

- กำหนดให้ $y_1(t) = \mathbf{T}\left[x_1(t)\right]$ และ $y_2(t) = \mathbf{T}\left[x_2(t)\right]$
- **ระบบเชิงเส้น** $\Rightarrow$ ระบบที่มีคุณสมบัติ 2 ข้อดังนี้

1) คุณสมบัติการบวก (additivity property) นั่นคือผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุต $x_1(t) + x_2(t)$ คือสัญญาณเอาต์พุต $y_1(t) + y_2(t)$
2) คุณสมบัติเอกพันธ์ (homogeneity หรือ scaling property) กล่าวคือผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุต $ax_1(t)$ คือสัญญาณเอาต์พุต $ay_1(t)$ เมื่อ a คือค่าคงตัว

- คุณสมบัติทั้งสองข้อรวมกันเรียกว่า**คุณสมบัติการซ้อนทับ** (superposition property)

  - ผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุต $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ เมื่อ a_1 และ a_2 คือค่าคงตัว คือสัญญาณเอาต์พุต $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$

- ระบบที่ไม่มีคุณสมบัติการซ้อนทับเรียกว่า **ระบบไม่เชิงเส้น**

Example 7

จงพิจารณาว่าระบบต่อไปนี้เป็นระบบเชิงเส้นหรือไม่

ก) $y(t) = tx(t)$ ข) $y(t) = x^2(t)$

วิธีทำ

ก) พิจารณาสัญญาณอินพุต 2 สัญญาณใดๆ นั่นคือ $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ จะได้ว่า

$$y_1(t) = \mathbf{T}\left[x_1(t)\right] = tx_1(t) \quad \text{และ} \quad y_2(t) = \mathbf{T}\left[x_2(t)\right] = tx_2(t)$$

ถ้าให้สัญญาณอินพุต $x_3(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ เมื่อ a_1 และ a_2 คือค่าคงตัว จะได้ว่า

$$y_3(t) = \mathbf{T}\left[x_3(t)\right] = tx_3(t) = t\left\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\right\} = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

ดังนั้นระบบ $y(t) = tx(t)$ เป็นระบบเชิงเส้น

ข) ในทำนองเดียวกันพิจารณาสัญญาณอินพุต $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ จะได้ว่า

$$y_1(t) = \mathbf{T}\left[x_1(t)\right] = x_1^2(t) \quad \text{และ} \quad y_2(t) = \mathbf{T}\left[x_2(t)\right] = x_2^2(t)$$

ถ้าให้สัญญาณอินพุต $x_3(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ จะได้ว่า

$$y_3(t) = \mathbf{T}\left[x_3(t)\right] = x_3^2(t) = \left(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\right)^2 = a_1^2x_1^2(t) + 2a_1a_2x_1(t)x_2(t) + a_2^2x_2^2(t)$$

$$= a_1^2y_1(t) + a_2^2y_2(t) + 2a_1a_2x_1(t)x_2(t)$$

$$\neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

เนื่องจาก $y_3(t) \neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ ดังนั้นระบบ $y(t) = x^2(t)$ จึงไม่เป็นระบบเชิงเส้น

ระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาและระบบที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

- กำหนดให้ $y(t)=\mathbf{T}\left[x(t)\right]$
- ระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (time-invariant system) คือระบบที่รับสัญญาณอินพุตที่ถูกเลื่อนเวลาออกไป T หน่วย นั่นคือ **x(t – T)** แล้วให้สัญญาณเอาต์พุตที่ถูกเลื่อนเวลาออกไป T หน่วย นั่นคือ **y(t – T)** เช่นกัน
- ระบบที่ไม่มีคุณสมบัตินี้ $\Rightarrow$ ระบบที่แปรเปลี่ยนตามเวลา (time-varying system)

Exercise 3

จงพิจารณาว่าระบบต่อไปนี้เป็นระบบที่แปรเปลี่ยนตามเวลาหรือระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา

ก) $y[k] = \cos\left(x[k]\right)$

ข) $y(t) = tx(t)$

SOLUTION

ก) พิจารณาการป้อนสัญญาณอินพุต $x_2[k] = x[k-n]$ เข้าไปในระบบ จะทำให้ได้สัญญาณเอาต์พุตคือ

$$y_2[k] = \cos(x_2[k]) = \cos(x[k-n]) = y[k-n]$$

นั่นคือ เมื่อป้อนสัญญาณอินพุตที่ถูกเลื่อนเวลาออกไป n หน่วย สัญญาณเอาต์พุตที่ได้ก็จะถูกเลื่อนเวลาออกไป n หน่วย เช่นกัน ดังนั้นระบบ $y[k] = \cos(x[k])$ จึงเป็นระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา

ข) ในทำนองเดียวกันลองแทนสัญญาณอินพุตด้วย $x_2(t) = \delta(t-1)$ เข้าไปในระบบ เมื่อ $\delta(t)$ คือสัญญาณอิมพัลส์ จะได้ว่าสัญญาณเอาต์พุตคือ

$$y_2(t) = tx_2(t) = t\delta(t-1) \neq y(t-1)$$

เนื่องจาก $y(t-1) = (t-1)x(t-1)$ ดังนั้นระบบ $y(t) = tx(t)$ เป็นระบบที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

ระบบที่ไม่มีหน่วยความจำและระบบที่มีหน่วยความจำ

- ระบบที่ไม่มีหน่วยความจำ (memoryless system) คือระบบที่สัญญาณเอาต์พุต ณ เวลาหนึ่งๆ จะขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตที่เวลาเดียวกันเท่านั้น (จะไม่ขึ้นกับสัญญาณอินพุตในเวลาอดีตหรือในเวลาอนาคต) เช่น

$$y[k]=x^2[k]-2x[k],\ y[k]=\frac{1}{a}x[k] \text{ หรือ } y(t)=ax(t) \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

- ระบบที่มีหน่วยความจำ (system with memory) คือระบบที่สัญญาณเอาต์พุต ณ เวลาหนึ่งๆ จะขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตในเวลาอดีต ปัจจุบัน หรืออนาคต ก็ได้ เช่น

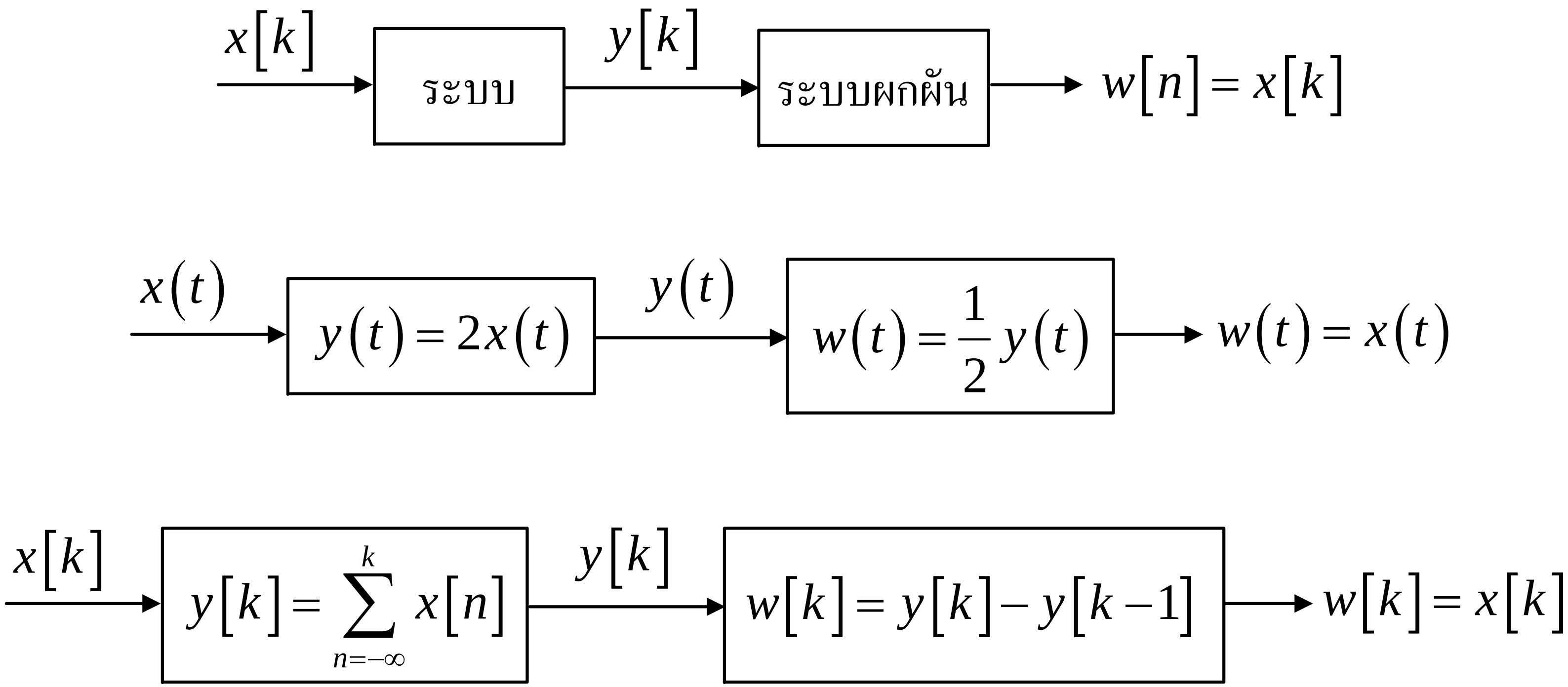
$$y[k]=\sum_{n=-\infty}^{k}x[n],\ y[k]=ax[k-1] \text{ หรือ } y(t)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

ระบบที่หาตัวผกผันได้และระบบที่ไม่สามารถหาตัวผกผันได้

- ระบบที่หาตัวผกผันได้ (invertible system) คือระบบที่ทำให้เกิดสัญญาณเอาต์พุตที่เป็นได้อย่างเดียวสำหรับสัญญาณอินพุตแต่ละแบบ

$$y(t)=2x(t) \Rightarrow w(t)=\frac{1}{2}y(t)$$ **ระบบผกผัน (inverse system)**

ตัวอย่างระบบที่หาตัวผกผันได้



ระบบที่ไม่สามารถหาตัวผกผันได้ (noninvertible system) เช่น $y[k]=0$ หรือ $y(t)=3x^2(t)$

ระบบคอซอลและระบบนอนคอซอล

- ระบบคอซอล (causal system) ⇒ ระบบที่สัญญาณเอาต์พุตจะขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตในเวลาขณะนั้นและสัญญาณอินพุตในเวลาอดีต (แต่ไม่ขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตในเวลาอนาคต)
  - ระบบเวลาจริง (real-time system) ทุกระบบเป็นระบบคอซอล
- ระบบนอนคอซอล (noncausal system) ⇒ ระบบที่สัญญาณเอาต์พุตขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตในเวลาอดีต ปัจจุบัน และอนาคต

- **Example:** ระบบ $y[k] = x[-k]$ ⇒ **ไม่เป็น**ระบบคอซอล

ระบบเสถียรและระบบไม่เสถียร

- ระบบเสถียร (stable system) คือระบบที่สัญญาณเอาต์พุต y(t) มีค่าไม่ลู่ออกเมื่อสัญญาณอินพุต x(t) มีค่าไม่ลู่ออก
  - สัญญาณอินพุตแบบมีขอบเขต (bounded input) $\Rightarrow$ ทำให้เกิดสัญญาณเอาต์พุตแบบมีขอบเขต
  - คุณสมบัติ**ความเสถียรแบบบีไอบีโอ** (BIBO: bounded-input bounded-output)

- ระบบไม่เสถียร (unstable system) คือระบบที่ทำให้สัญญาณเอาต์พุตมีค่าลู่ออกเมื่อป้อนสัญญาณอินพุตแบบมีขอบเขตเข้าไปในระบบ

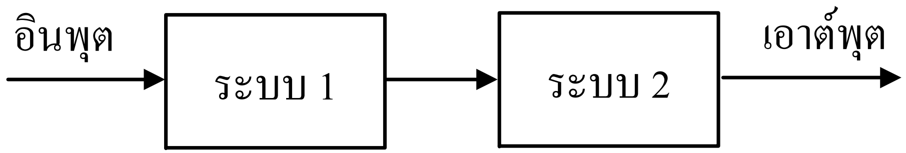
- **Example:** ระบบ $y(t)=tx(t)$ $\Rightarrow$ ระบบไม่เสถียร

  ระบบ $y(t)=e^{x(t)}$ $\Rightarrow$ ระบบเสถียร

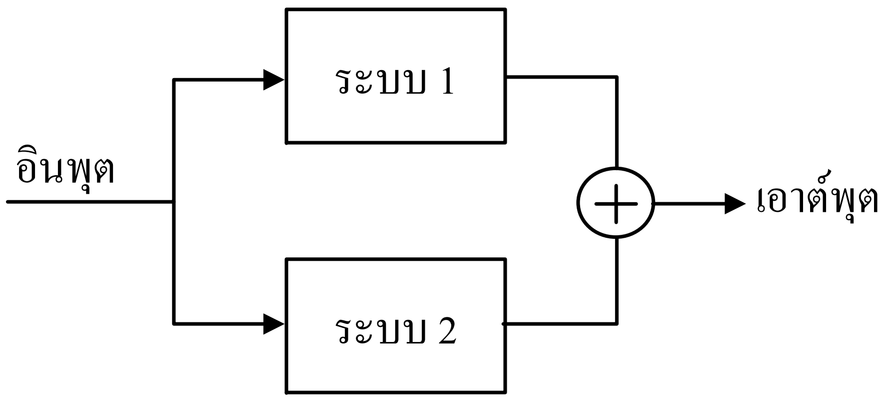
การต่อกันของระบบ

- ระบบที่ใช้งานจริงประกอบด้วยระบบย่อยหลายระบบมาต่อกัน
  - เช่น ระบบเครื่องเสียงรถยนต์ ประกอบด้วยวงจรภาครับคลื่นวิทยุ เครื่องเล่นแผ่นซีดี วงจรขยายสัญญาณ และลำโพง เป็นต้น
- การวิเคราะห์ระบบขนาดใหญ่ที่ซับซ้อน $\Rightarrow$ ควรแบ่งออกเป็นระบบย่อยเพื่อจะได้ศึกษาและวิเคราะห์ระบบย่อยเหล่านี้ทีละส่วน $\Rightarrow$ วิเคราะห์ง่ายขึ้น
- การต่อกันของระบบ (system interconnection) ทำได้หลายรูปแบบ

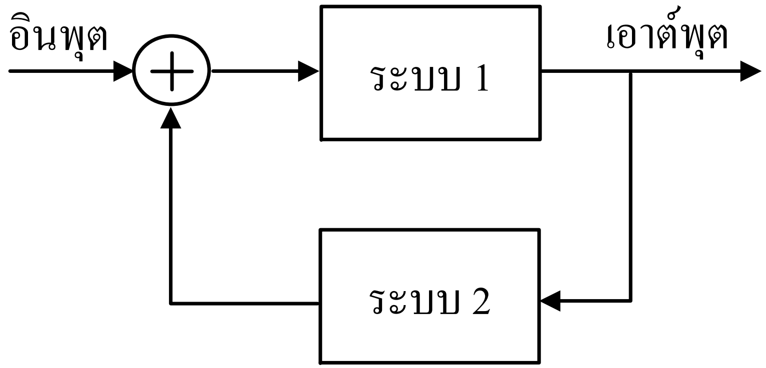
(ก) การต่อกันแบบอนุกรม



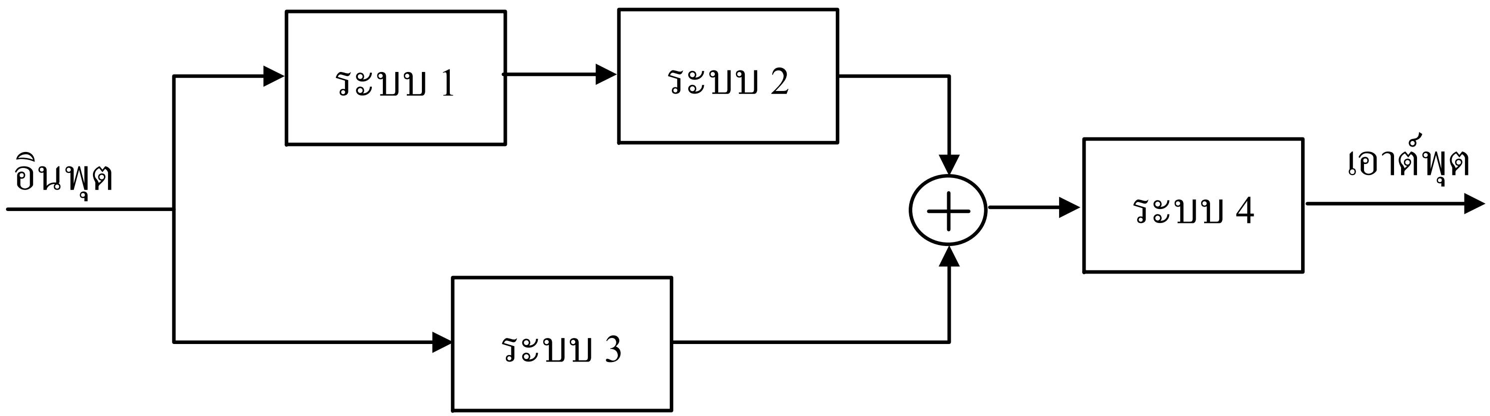
(ข) การต่อกันแบบขนาน



(ง) การต่อกันแบบป้อนกลับ



(ค) การต่อกันแบบผสม

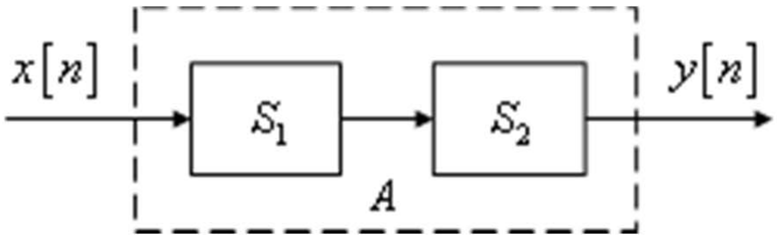


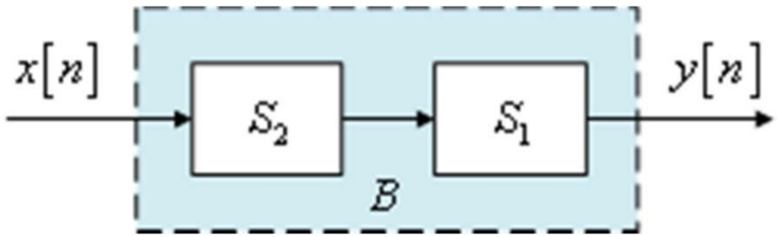
Example

กำหนดให้ระบบ $S_1 \Rightarrow y_1[n] = x_1[n] + 2x_1[n-1]$

ระบบ $S_2 \Rightarrow y_2[n] = 3x_2[n-1] + x_2[n-2]$

พิจารณาระบบ A และ B



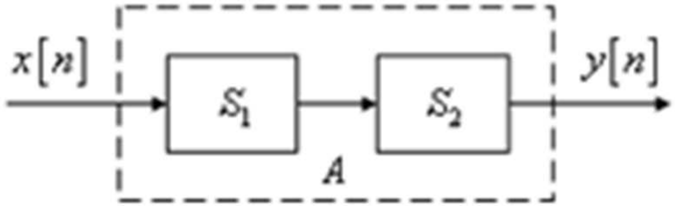


ก) จงหาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุต $x[n]$ และสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบ A เมื่อนำระบบ S_1 และระบบ S_2 มาต่อแบบอนุกรม

ข) ถ้าระบบ S_1 และระบบ S_2 สลับตำแหน่งกัน จงหาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุต $x[n]$ และสัญญาณเอาต์พุต $y[n]$ ของระบบ B

SOLUTION

ก) สัญญาณเอาต์พุตของระบบ S_1 เป็นสัญญาณอินพุตของระบบ S_2 $\Rightarrow$ แทนค่า $x_2[n] = y_1[n]$ จะได้



$$y_2[n] = 3y_1[n-1] + y_1[n-2]$$

แทนค่า $y_1[n] = x_1[n] + 2x_1[n-1]$ จะได้

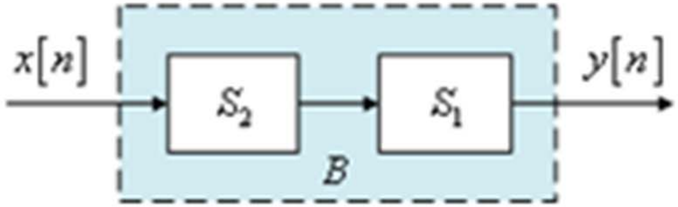
$$y_2[n] = 3\{x_1[n-1] + 2x_1[n-2]\} + \{x_1[n-2] + 2x_1[n-3]\}$$

$$= 3x_1[n-1] + 7x_1[n-2] + 2x_1[n-3]$$

เนื่องจาก $x_1[n] = x[n]$ และ $y_2[n] = y[n]$ ดังนั้นระบบ A จะมีความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตคือ

$$y[n] = 3x[n-1] + 7x[n-2] + 2x[n-3]$$

ข) เมื่อทำการสลับตำแหน่งของระบบ S_1 และระบบ S_2 จะได้ว่าสัญญาณเอาต์พุตของระบบ S_2 เป็นสัญญาณอินพุตของระบบ S_1 $\Longrightarrow$ แทนค่า $x_1[n] = y_2[n]$ จะได้



$$y_1[n] = y_2[n] + 2y_2[n-1]$$

แทนค่า $y_2[n] = 3x_2[n-1] + x_2[n-2]$ จะได้

$$y_1[n] = \{3x_2[n-1] + x_2[n-2]\} + 2\{3x_2[n-2] + x_2[n-3]\}$$

$$= 3x_2[n-1] + 7x_2[n-2] + 2x_2[n-3]$$

เนื่องจาก $x_2[n] = x[n]$ และ $y_1[n] = y[n]$ ดังนั้นระบบ B มีความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตคือ

$$y[n] = 3x[n-1] + 7x[n-2] + 2x[n-3]$$