การสื่อสารดิจิทัล

การส่งผ่านสัญญาณพัลส์แถบความถี่ฐาน (10 – 11)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

http://home.npru.ac.th/piya

Outline

- การส่งสัญญาณที่ไม่มีความผิดเพี้ยน
- การแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์
  - การตรวจสอบระดับความรุนแรงของ ISI
  - การคำนวณหาค่าระดับความรุนแรงของ ISI
  - ผลกระทบของ ISI ต่ออัตราข้อผิดพลาดบิต
- ทฤษฎีบทของไนควิสต์
  - สัญญาณพัลส์ไนควิสต์อุดมคติ
  - แบนด์วิดท์น้อยสุด
  - สัญญาณพัลส์ RC / RRC
- อีควอไลเซอร์ ZF / DFE / MMSE / แบบปรับตัว

บทนำ

- บทที่ 6 กล่าวถึงวงจรภาครับเหมาะสุดที่ใช้ตรวจหาข้อมูลที่ส่งมาจากต้นทางผ่านช่องสัญญาณ(หรือตัวกลาง) ที่มี**แบนด์วิดท์อนันต์**
  - สัญญาณที่ส่งผ่านช่องสัญญาณนี้จะไม่เกิดความผิดเพี้ยน (distortion)
- อย่างไรก็ตามช่องสัญญาณส่วนมากที่ใช้งานจริง เช่น สายตีเกลียวคู่ สายเคเบิลหรือเส้นใยนำแสง เป็นต้น มี**แบนด์วิดท์จำกัด**
- โดยทั่วไปข้อมูลจากแหล่งต้นทาง (source) ต้องการแบนด์วิดท์น้อยสุดสำหรับส่งข้อมูลเท่ากับ $R_s = 1/T_s$ เมื่อ R_s คืออัตราสัญลักษณ์ (สัญลักษณ์ต่อวินาที)
- ถ้าแบนด์วิดท์ของช่องสัญญาณ $< R_s \Rightarrow$ สัญญาณ (แอนะล็อก) ที่ส่งผ่านช่องสัญญาณนี้เกิดความผิดเพี้ยนและ ISI
- ในที่นี้จะอธิบายกระบวนการแยกสัญญาณที่ถูกรบกวนด้วย AWGN
  - การส่งสัญญาณที่ไม่มีความผิดเพี้ยน ISI ทฤษฎีบทของไนควิสต์ และการเข้ารหัสสหสัมพันธ์ และอีควอไลเซอร์แบบต่างๆ

การส่งสัญญาณที่ไม่มีความผิดเพี้ยน

- สัญญาณที่ส่งผ่านระบบ LTI จะ**ไม่มี**ความผิดเพี้ยน ก็ต่อเมื่อสัญญาณเอาต์พุต **ต้อง**มีรูปร่างเหมือนกับสัญญาณอินพุต แต่อาจมีแอมพลิจูดเปลี่ยนไปหรือมีการหน่วงเวลาของสัญญาณก็ได้

$$y(t) = Kx(t - t_d) \quad \Rightarrow \quad Y(f) = Ke^{-j\omega t_d} X(f)$$

เมื่อ $x(t)$ คือสัญญาณอินพุตของระบบ, K คือค่าคงตัว และ t_d คือปริมาณหน่วงเวลา

- ระบบ LTI ไม่ก่อให้เกิดความผิดเพี้ยน ก็ต่อเมื่อผลตอบสนองเชิงความถี่ของระบบมีค่าเท่ากับ

$$H(f) = Ke^{-j\omega t_d} = |H(f)| e^{j\angle H(f)} \quad \Rightarrow \quad |H(f)| = K, \quad \angle H(f) = -2\pi f t_d$$

ความผิดเพี้ยนแบ่งออกเป็น 2 ประเภทหลักคือ

1) ความผิดเพี้ยนแบบเชิงเส้น แบ่งออกเป็น

   1.1) ความผิดเพี้ยนเชิงแอมพลิจูด เกิดขึ้นเมื่อ $\left|H(f)\right| \neq K$

   1.2) ความผิดเพี้ยนเชิงเฟส เกิดขึ้นเมื่อ $\angle H(f) \neq -2\pi f t_d$

2) ความผิดเพี้ยนแบบไม่เชิงเส้น $\Rightarrow$ เกิดขึ้นเมื่อมีอุปกรณ์หรือชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์ที่มีคุณสมบัติไม่เป็นเชิงเส้นอยู่ในระบบ

ในทางปฏิบัติผลกระทบที่เกิดจากความผิดเพี้ยนแบบเชิงเส้น $\Rightarrow$ แก้ไขได้โดยการใช้**อีควอไลเซอร์** ในขณะที่ต้องใช้เทคนิคขั้นสูงในการจัดการกับความผิดเพี้ยนแบบไม่เชิงเส้น

- นอกจากการส่งผ่านที่ไม่มีความผิดเพี้ยนแล้ว ในทางปฏิบัติองค์ประกอบของสัญญาณทุกความถี่ก็**ควร**เดินทางมาถึงวงจรภาครับพร้อมกัน ณ เวลาที่ช้ากว่าปรกติ t_d วินาที ซึ่งหาได้จาก

$$t_d \text{ (second)} = \frac{\theta \text{ (radian)}}{2\pi f \text{ (radian/second)}}$$

เมื่อ $\theta = \angle H(f) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(f)\}}{\mathrm{Re}\{H(f)\}}\right)$

คือปริมาณการเลื่อนเฟส (phase shift) ที่เป็นสัดส่วนกับความถี่ f

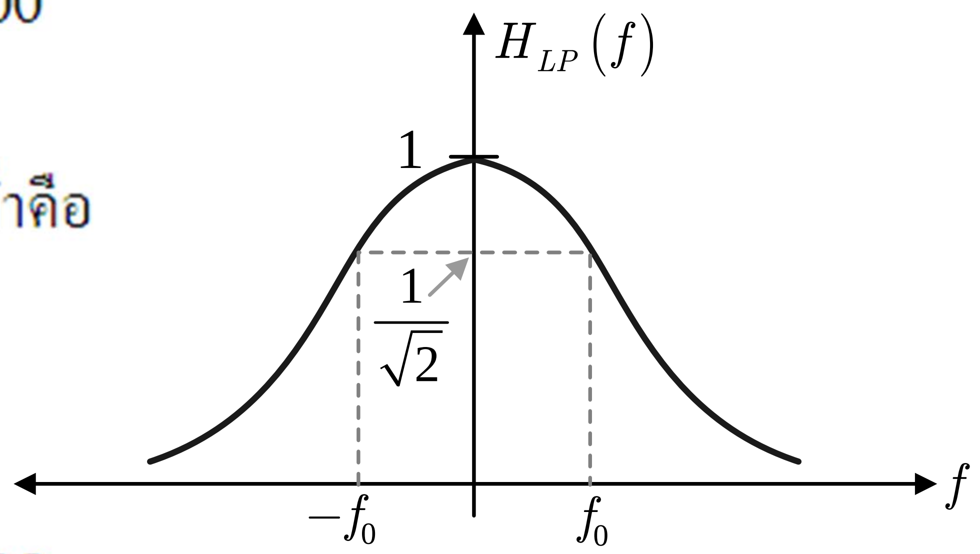
- นอกจากนี้ค่าลักษณะเฉพาะที่ใช้วัด**ความผิดเพี้ยนเชิงหน่วงเวลา** (delay distortion) ของสัญญาณ เรียกว่า**การหน่วงเวลากลุ่ม** (group delay หรือ envelope delay) ซึ่งนิยามโดย

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(f)}{df}$$

Example 1

พิจารณาระบบการส่งสัญญาณแอนะล็อกแถบความถี่ฐานที่ไม่มีความผิดเพี้ยน และในระบบมีสัญญาณรบกวนสีขาว $w(t)$ ที่มีความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังแบบสองด้าน $N_0/2$ เมื่อ $N_0 = 10^{-9}$ วัตต์ต่อเฮิรตซ์ ถ้าสัญญาณที่ส่งไปในระบบคือสัญญาณเสียงที่มีแบนด์วิดท์ 4000 เฮิรตซ์ โดยวงจรภาครับใช้วงจรกรองผ่านต่ำที่มีความถี่ตัด $f_0 = 8000$ เฮิรตซ์ เพื่อกำจัดสัญญาณรบกวนให้ลดน้อยลง ถ้าให้ผลตอบสนองเชิงความถี่ของวงจรกรองผ่านต่ำคือ

$$H_{LP}(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_0)}$$



จงคำนวณหากำลังของสัญญาณรบกวนที่ด้านขาออกของวงจรกรองผ่านต่ำนี้

วิธีทำ กำลังของสัญญาณรบกวนที่ด้านขาออกของวงจรกรองผ่านต่ำหาได้จาก

$$P_{\text{ш}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \left| H_{LP}(f) \right|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(f/f_0\right)^2} df = \frac{N_0 f_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f_0^2 + f^2} df$$

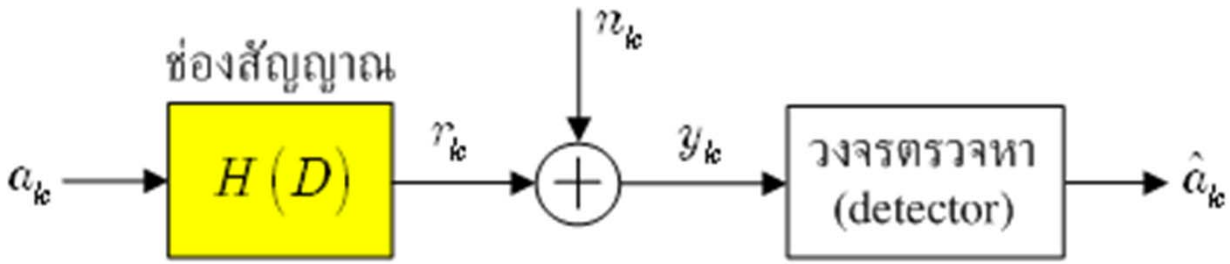
$$= \frac{N_0 f_0^2}{2} \left[\frac{1}{f_0} \tan^{-1}\left(\frac{f}{f_0} \right) \right]_{f=-\infty}^{\infty} = \frac{N_0 f_0}{2} \left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty) \right]$$

$$= \frac{N_0 f_0}{2} \pi = \frac{10^{-9} \times 8000}{2} \times \pi = 0.0000126 \text{ วัตต์}$$

เมื่อ $\tan^{-1}(\infty) = \pi/2$, $\tan^{-1}(-\infty) = -\pi/2$ และ $\int 1/\left(a^2+u^2\right) du = \frac{1}{a} \tan^{-1}(u/a)$

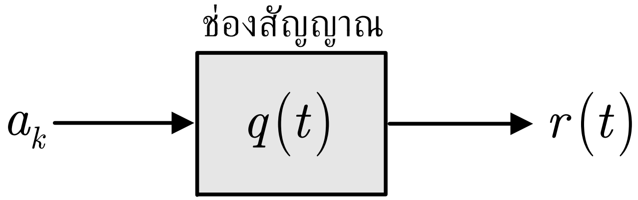
การแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์

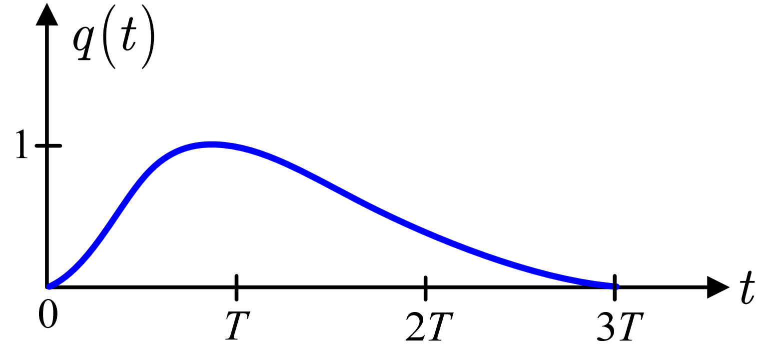
- ปรากฏการณ์ที่สัญญาณพัลส์ลำดับที่ k ที่ส่งออกจากต้นทางไปแทรกสอดกับสัญญาณพัลส์ที่อยู่ติดกัน
- ถ้าผลตอบสนองอิมพัลส์ของช่องสัญญาณมีรูปร่างครอบคลุมช่วงเวลาเกินหนึ่งคาบเวลาของบิต (bit period) $\Rightarrow$ **ช่องสัญญาณนี้ก่อให้เกิด ISI**
- พิจารณาแบบจำลองช่องสัญญาณ $H(D)=\sum_{k=0}^{\nu} h_k D^k$

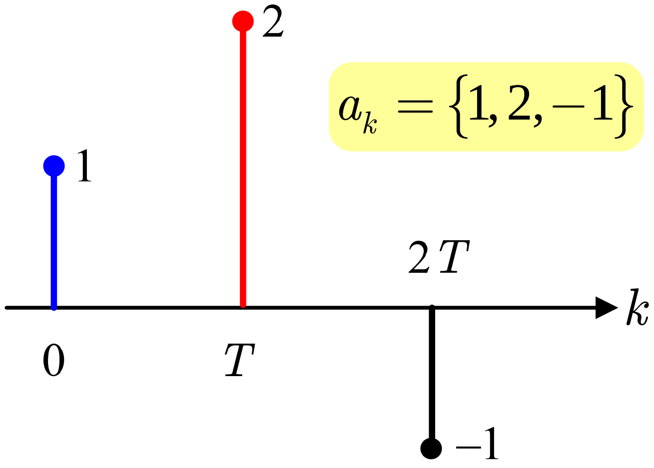


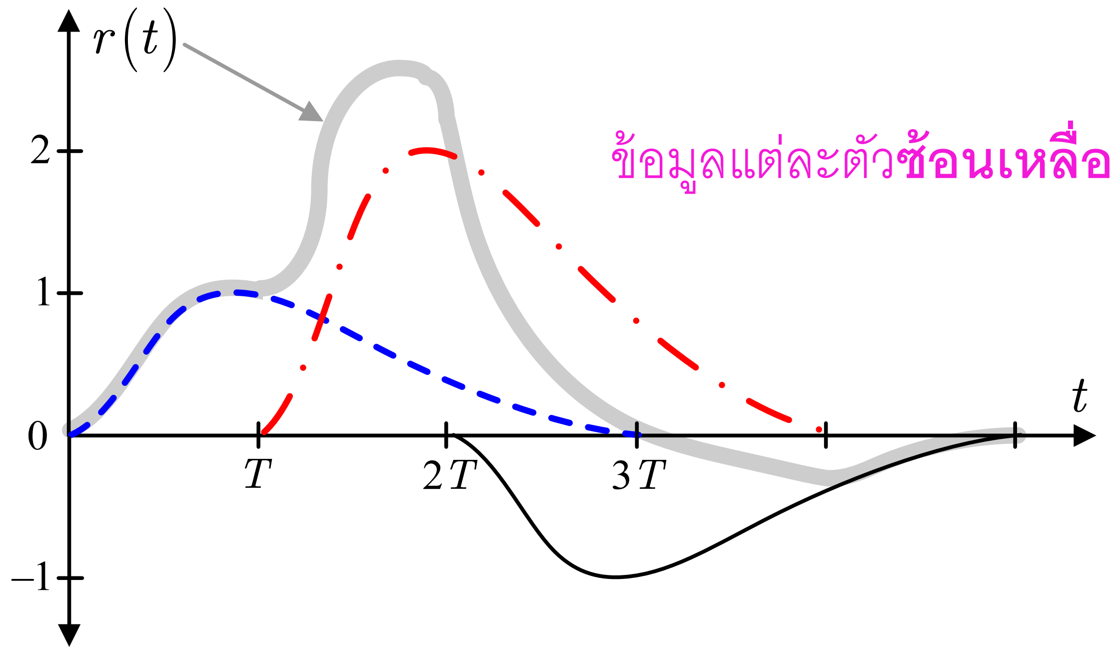
$$r_k = a_k * h_k = \sum_{i=0}^{\nu} a_{k-i}h_i = \underbrace{a_k h_0}_{\text{wanted signal}} + \underbrace{a_{k-1}h_1 + \ldots + a_{k-\nu}h_\nu}_{\text{ISI}}$$

- ช่องสัญญาณที่ไม่มีหน่วยความจำ สัญญาณเอาต์พุตของช่องสัญญาณก็จะ**ไม่มี** ISI





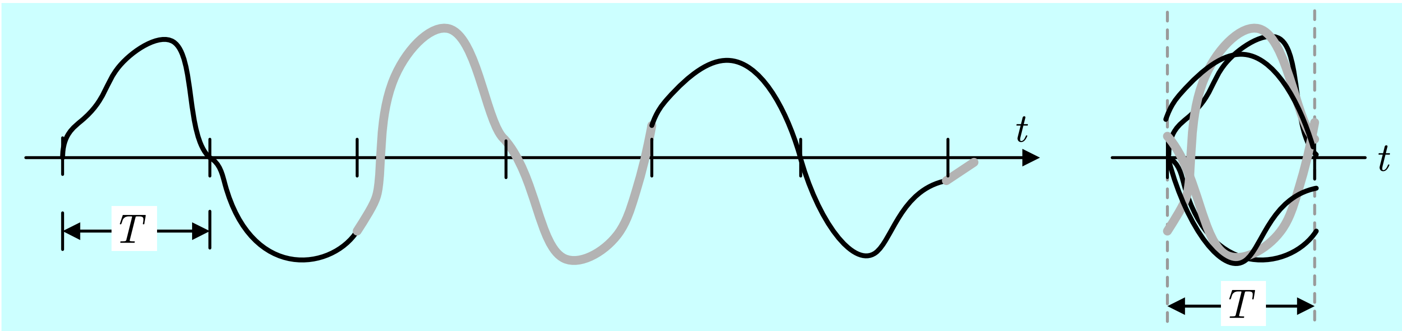




ข้อมูลแต่ละตัว**ซ้อนเหลื่อมกัน**

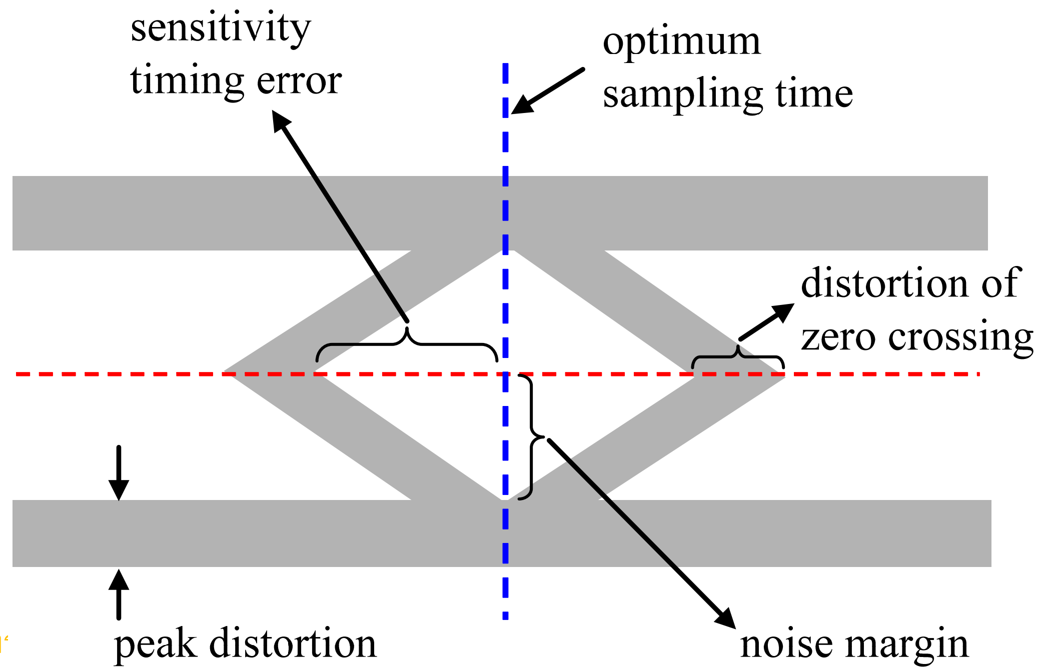
การตรวจสอบระดับความรุนแรงของ ISI

- ระดับความรุนแรงของ ISI พิจารณาได้จาก**แผนภาพดวงตา** (eye diagram)
  - ถ้าลักษณะของดวงตาหรี่หรือปิด ⇒ สัญญาณรบกวนและ ISI รุนแรงมาก



- แผนภาพดวงตาบอกให้ทราบถึง เวลาการชักตัวอย่างที่เหมาะสุด
- ค่าระดับความรุนแรงของ ISI

$$\xi = \frac{\sum_k |h_k| - \max_k |h_k|}{\max_k |h_k|}$$



Example 2

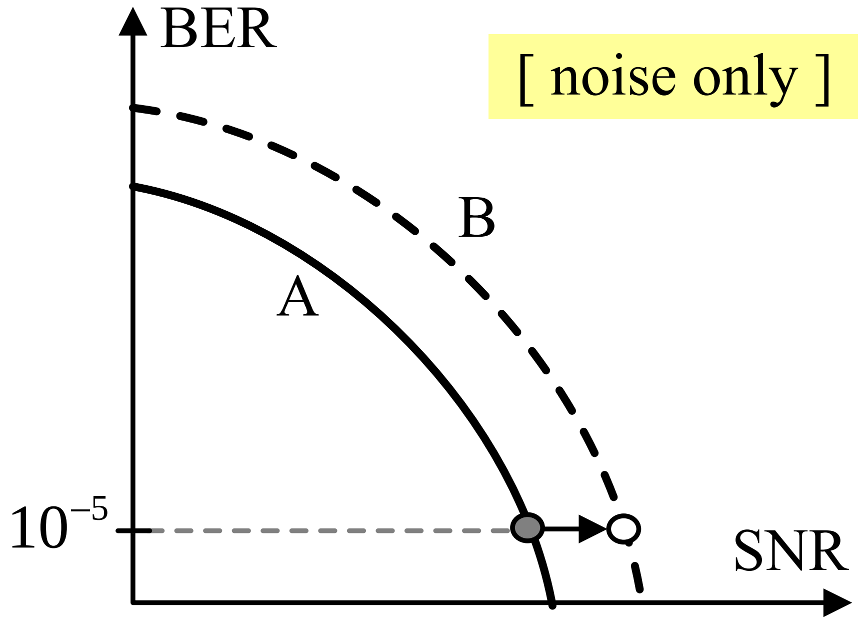
จงพิจารณาว่าช่องสัญญาณใดก่อให้เกิด ISI มากกว่า ระหว่าง $H_1(D)=1-D^2$ และ $H_2(D)=1+D-D^2-D^3$

วิธีทำ ช่องสัญญาณ $H_1(D)$ และ $H_2(D)$ มีค่า ξ_1 และ ξ_2 เท่ากับ

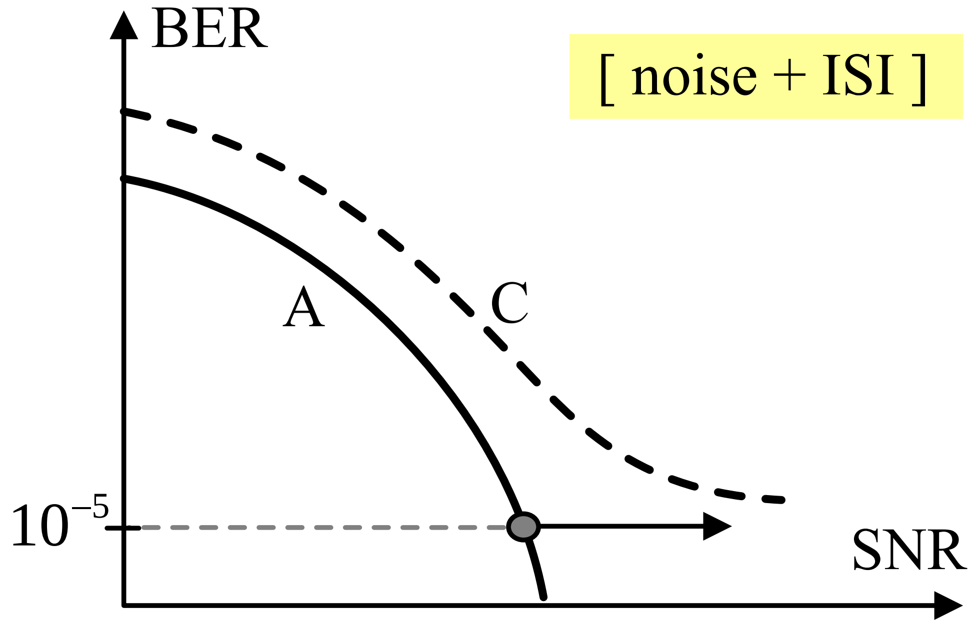
$$\xi_1=\frac{\left(|1|+|0|+|-1|\right)-|1|}{|1|}=1 \quad \text{และ} \quad \xi_2=\frac{\left(|1|+|1|+|-1|+|-1|\right)-|1|}{|1|}=3$$

เนื่องจาก $\xi_2>\xi_1$ แสดงว่าช่องสัญญาณ $H_2(D)$ ก่อให้เกิด ISI มากกว่าช่องสัญญาณ $H_1(D)$ ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยหลักความจริงทั่วไปที่ว่า โดยทั่วไปถ้าช่องสัญญาณมีจำนวนแท็ป (หรือหน่วยความจำ) มาก ก็มีโอกาสที่จะก่อให้เกิด ISI มาก

ผลกระทบของ ISI ต่ออัตราข้อผิดพลาดบิต



(ก)

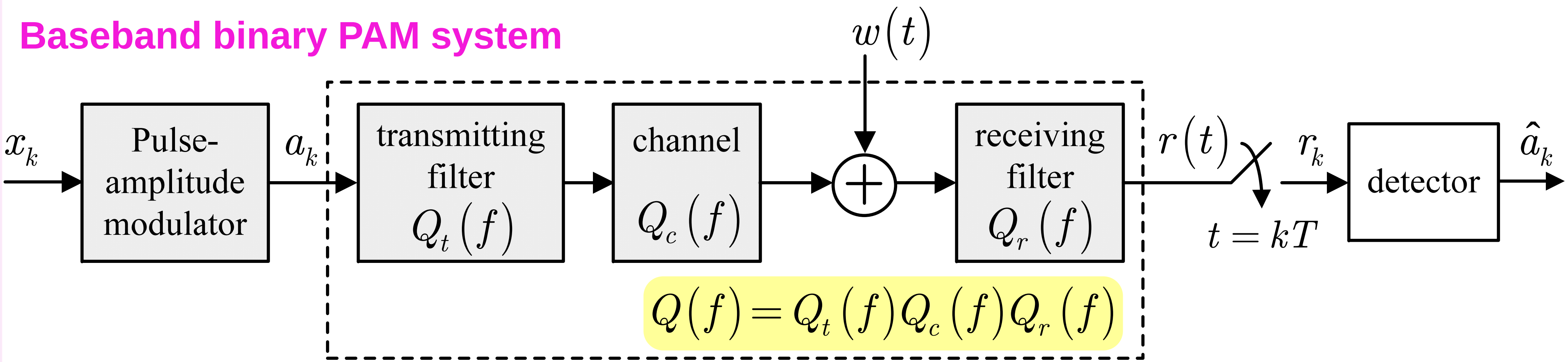


(ข)

- วิธี**กำจัด**หรือ**ลด**ผลกระทบของ ISI $\Rightarrow$ **อีควอไลเซอร์ (equalizer)**

ทฤษฎีบทของไนควิสต์

Baseband binary PAM system



$$r(t) = \sum_m a_m q(t - mT) + n(t)$$

$$q(t) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

สัญญาณพัลส์ไนควิสต์

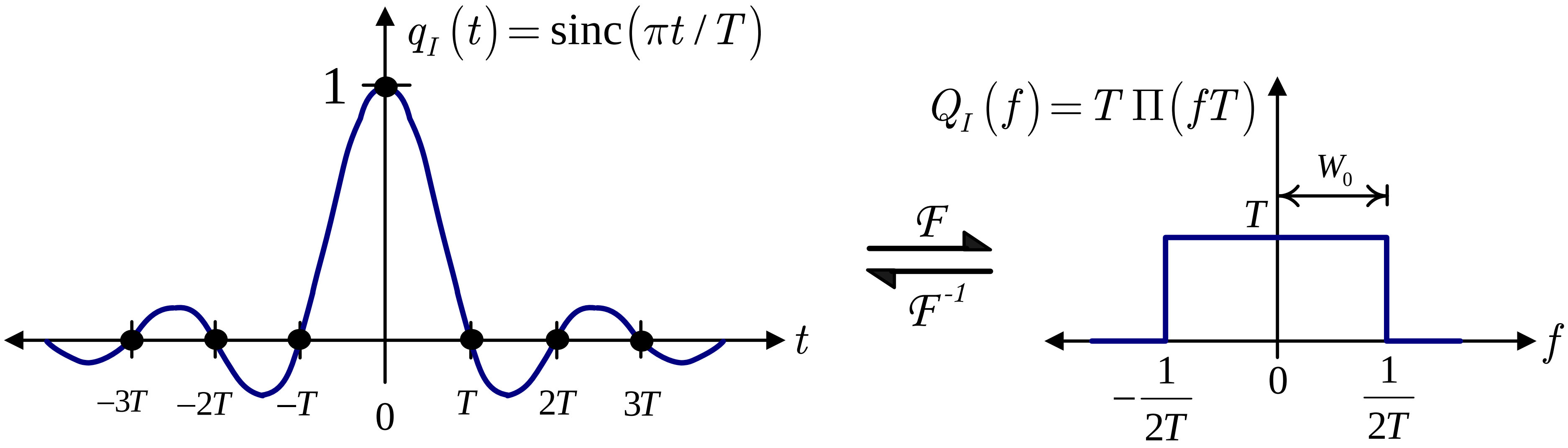
- ไนควิสต์อุดมคติ
- RC
- RRC

$$r_k = r(t)\big|_{t=kT} = r(kT) = \sum_m a_m q(kT - mT) + n(kT)$$

$$= \underbrace{a_k q(0)}_{\text{wanted signal}} + \underbrace{\sum_{m \neq k} a_m q(kT - mT)}_{\text{ISI}} + \underbrace{n(kT)}_{\text{noise}}$$

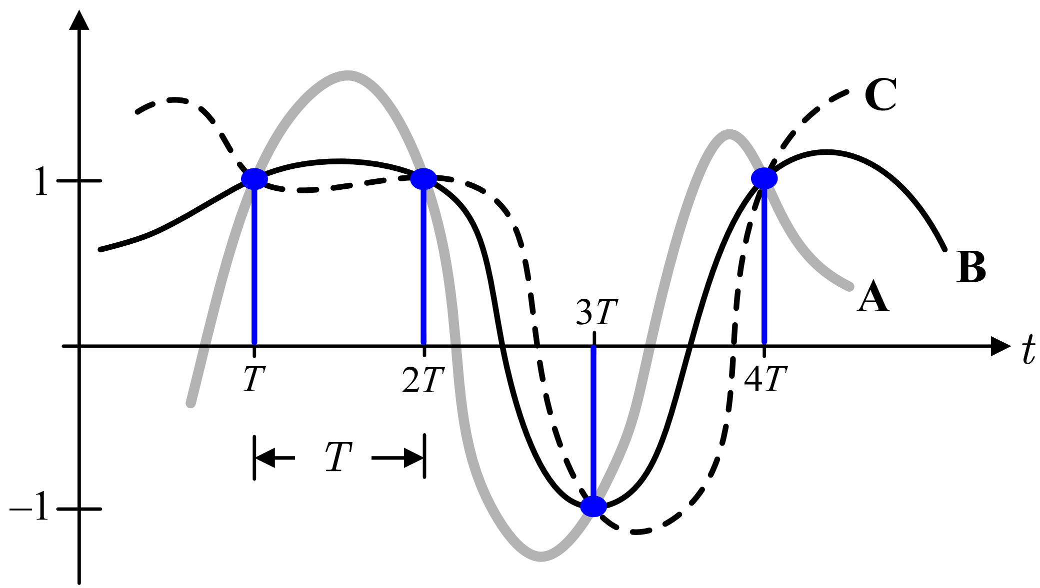
$$r_k = a_k q(0) + n(kT)$$

สัญญาณพัลส์ในควิสต์อุดมคติ

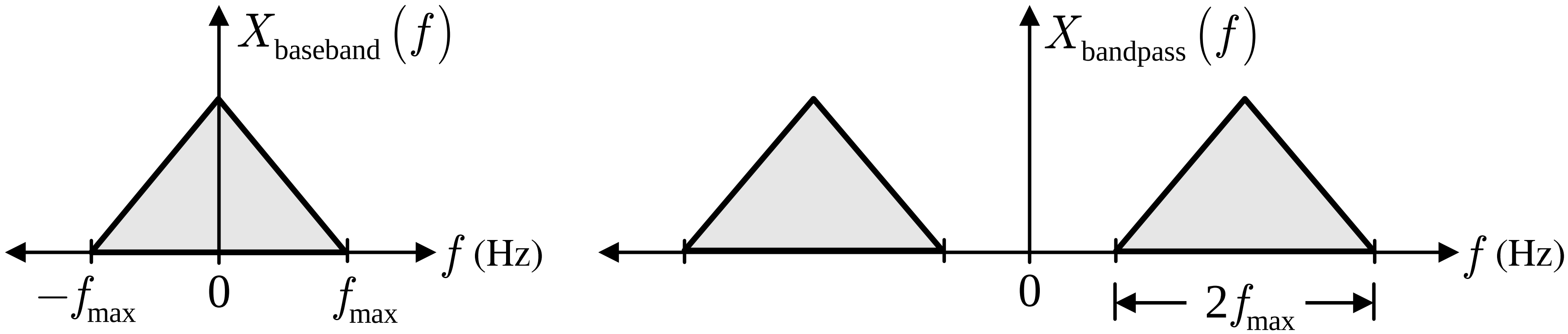


- มีความสำคัญมากในเรื่องของ**กระบวนการสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมา**

สัญญาณพัลส์ที่เกิดจากข้อมูลบิตข้างเคียง **ไม่แทรกสอด**กับสัญญาณพัลส์ของข้อมูลบิตที่ต้องการ **ณ ตำแหน่ง**ที่ทำการชักตัวอย่างตราบใดที่ในระบบไม่มีจิตเตอร์ทางเวลา (timing jitter)



แบนด์วิดท์น้อยสุด



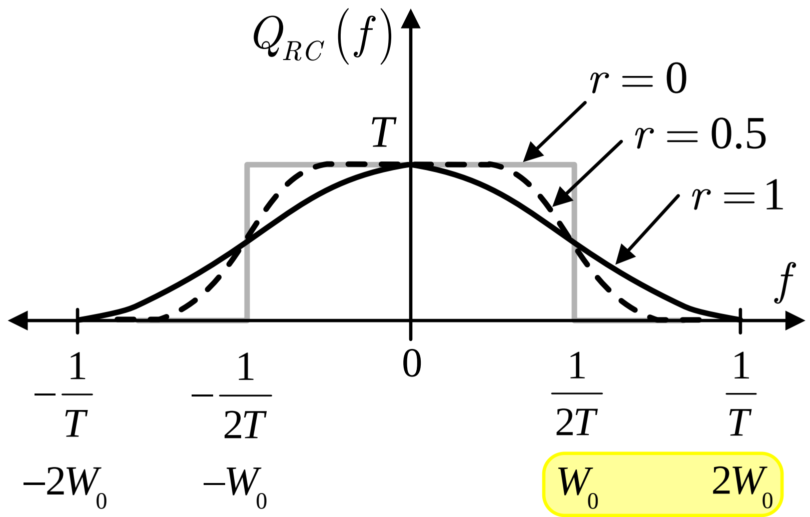
W = f_{max} W = $2f_{max}$

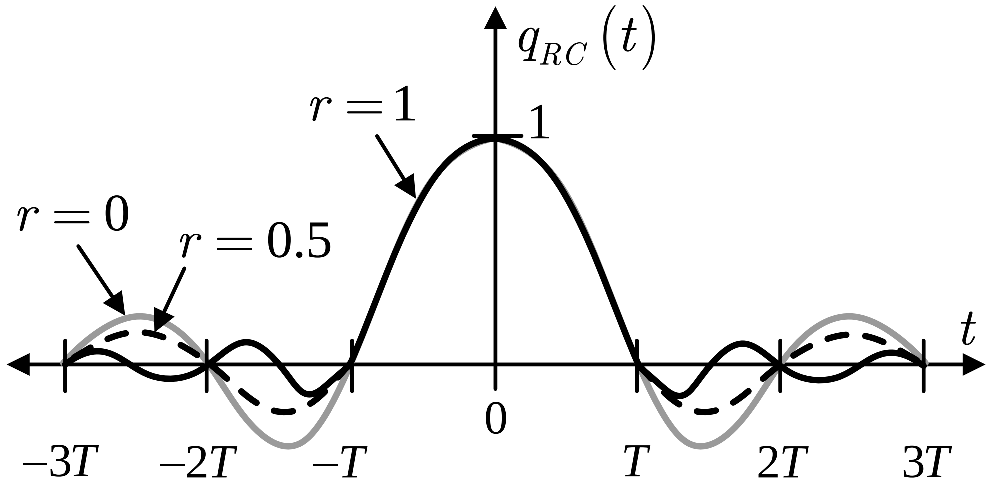
- ❑ แบนด์วิดท์ (bandwidth) $\Rightarrow$ ช่วงแถบความถี่ด้านบวกของสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดที่มีขนาดไม่เท่ากับค่าศูนย์ มีหน่วยเป็นเฮิรตซ์ (Hz)
  - นิยามได้หลายแบบ เช่น null-to-null bandwidth, 3-dB bandwidth, etc.
- ❑ **แบนด์วิดท์น้อยสุด** W_0 ที่ต้องการสำหรับการส่งข้อมูลด้วยอัตราสัญลักษณ์ R_s สัญลักษณ์ต่อวินาที โดยปราศจาก ISI มีค่าเท่ากับ

$$W_0 = \frac{R_s}{2}$$ ⇒ ประสิทธิภาพแบนด์วิดท์ $$\eta = \frac{R_b}{W_0}$$ ((bit/sec)/hertz)

สัญญาณพัลส์ RC

- สัญญาณพัลส์ในควิสต์อุดมคติ $\Rightarrow W_0 = 1/(2T) = R_s/2 \Rightarrow$ ประสิทธิภาพแบนด์วิดท์ $\Rightarrow \eta = R_b / W_0 = 2$ (ระบบสื่อสารไบนารี $R_s = R_b$)
- **สัญญาณพัลส์ RC**





$$q_{RC}(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)\frac{\cos\left(2\pi\left(W-W_0\right)t\right)}{1-\left\{4\left(W-W_0\right)t\right\}^2}$$

$$Q_{RC}(f) = \begin{cases} T, & |f| < 2W_0 - W \\ T\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\dfrac{|f|+W-2W_0}{W-W_0}\right), & 2W_0 - W < |f| < W \\ 0, & |f| > W \end{cases}$$

$$W = \frac{R_s}{2}(1+r) = W_0(1+r)$$

Example 3

- ระบบโทรศัพท์รับและส่งสัญญาณเสียงที่มีแบนด์วิดท์เท่ากับ 3500 เฮิรตซ์ จงหาอัตราส่งข้อมูล ถ้ากำหนดให้สัญญาณไบนารี (ที่ได้จากการแปลงสัญญาณเสียงเป็นลำดับพีซีเอ็มแล้ว) มีรูปร่างเป็นสัญญาณพัลส์ RC และมีค่าตัวประกอบโรลล์ออฟเท่ากับ r = 0.25

วิธีทำ อัตราส่งข้อมูลหรืออัตราสัญลักษณ์ R_s หาได้จาก

$$R_s = 2W/(1+r) = 2(3500)/(1+0.25) = 5600 \text{ สัญลักษณ์ต่อวินาที}$$

Example 4

พิจารณาระบบ T1 [28] ที่ทำการมัลติเพล็กซ์ (multiplex) สัญญาณเสียงจำนวน 24 สัญญาณ ผ่านกระบวนการกล้ำรหัสพัลส์ (PCM) แบบ 8 บิต โดย 1 แซมเปิลแทนด้วยข้อมูล 8 บิต ดังนั้นแต่ละเฟรม (frame) ที่ส่งผ่านระบบสื่อสารดิจิทัลประกอบด้วยข้อมูลจำนวน $24 \times 8 = 192$ บิต รวมกับ 1 บิตซึ่งทำหน้าที่ประสานเวลา (synchronization) เนื่องจากระบบ T1 ใช้ความถี่การชักตัวอย่าง $f_s = 8000$ แซมเปิลต่อวินาที (หรือ $f_s = 8000 \times 8 = 64000$ บิตต่อวินาที) และใช้เทคนิคสหสัญญาณแบบแบ่งเวลา (TDM: time division multiplex) ในการส่งข้อมูล โดยที่แต่ละเฟรมจะใช้เวลาในการส่ง 125 μs เพราะฉะนั้นแต่ละบิตจะใช้เวลา $T = (125 \times 10^{-6}) / 193 = 0.647$ μs จงหาแบนด์วิดท์น้อยสุดของระบบ T1 ที่ส่งข้อมูลโดยใช้สัญญาณพัลส์ในควิสต์อุดมคติและสัญญาณพัลส์ RC ที่มีตัวประกอบโรลล์ออฟ $r = 1$

วิธีทำ

สำหรับช่องสัญญาณที่ใช้สัญญาณพัลส์ในควิสต์อุดมคติ แบนด์วิดท์น้อยสุดของระบบ T1 หาได้จาก

$$W_0 = \frac{R_s}{2} = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2\times 0.647\times 10^{-6}} = 772\times 10^3 \quad \text{(Hz)}$$

ในทำนองเดียวกันแบนด์วิดท์น้อยสุดของระบบ T1 ที่ส่งข้อมูลโดยใช้สัญญาณพัลส์ RC ที่มี $r = 1$ หาได้จาก

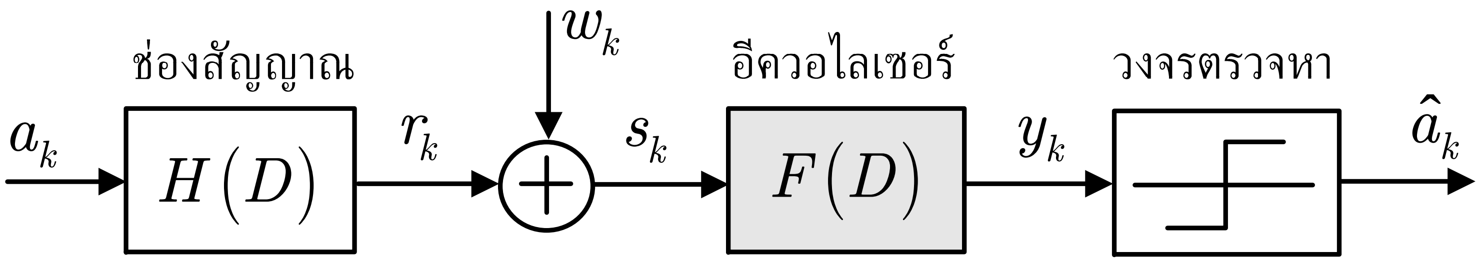
$$W = W_0(1+r) = 722\times 10^3 \times (1+1) = 1.544\times 10^6 \quad \text{(Hz)}$$

สัญญาณพัลส์ RRC

- การทำให้ $Q(f)=Q_t(f)Q_c(f)Q_r(f)$ มีผลตอบสนองเชิงความถี่เท่ากับ $Q_I(f)$ หรือ $Q_{RC}(f)$ ทำได้ยาก เนื่องจากในทางปฏิบัติไม่ทราบค่า $Q_c(f)$
- สิ่งที่ทำได้คือการออกแบบ $Q_t(f)$ และ $Q_r(f)$ เพื่อให้ $Q_t(f)Q_r(f)=Q_{RC}(f)$
- ถ้าให้ $Q_t(f)=Q_r(f) \;\Rightarrow\; Q_t(f)=Q_r(f)=\sqrt{Q_{RC}(f)}$ (สัญญาณพัลส์ RRC)
- หลังจากที่ออกแบบให้ $Q_t(f)Q_r(f)=Q_{RC}(f)$ แล้ว ก็เหลือเพียงช่องสัญญาณ $Q_c(f)$ เท่านั้นที่ต้องหาวิธีในการทำให้ผลตอบสนองรวมของทั้งระบบเป็นสัญญาณพัลส์ไนควิสต์
  - วิธีการที่ใช้กันทั่วไป $\Rightarrow$ การนำ**อีควอไลเซอร์**มาใช้เพื่อทำให้ $Q(f)=Q_t(f)Q_c(f)Q_r(f)$ มีค่าเท่ากับผลตอบสนองเชิงความถี่ของสัญญาณพัลส์ไนควิสต์

อีควอไลเซอร์

- อีควอไลเซอร์ทำหน้าที่ช่วยในการปรับรูปร่างหรือคุณลักษณะของสัญญาณที่ได้รับให้เป็นไปตามที่ระบบต้องการ ช่วยลดผลกระทบของ ISI ที่แฝงอยู่ในสัญญาณที่ได้รับ และช่วยลดผลกระทบที่เกิดจากความผิดเพี้ยนแบบเชิงเส้น



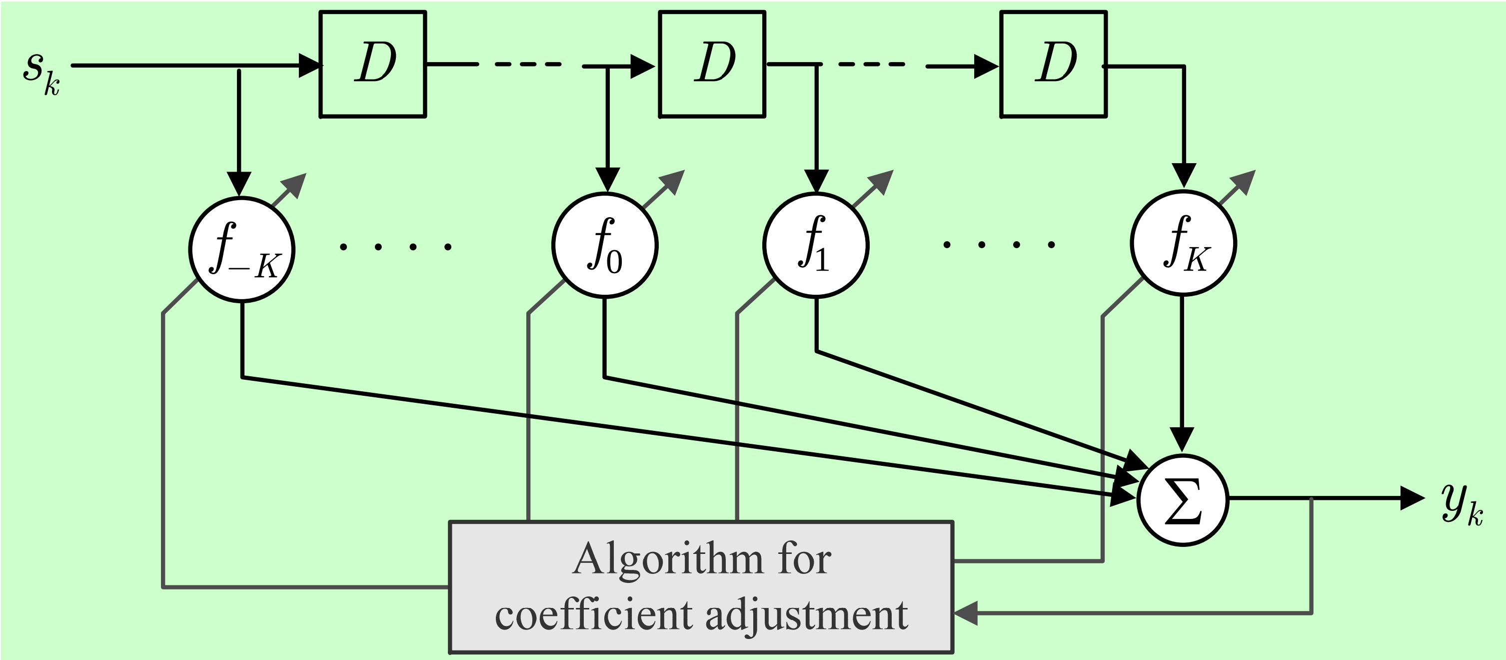
$$s_k = a_k * h_k + w_k$$

$$w_k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

- วัตถุประสงค์ของวงจรภาครับคือต้องการหาค่า a_k จากข้อมูล s_k
  - เพื่อช่วยให้วงจรตรวจหามีความง่ายและราคาถูก จึงได้มีการนำอีควอไลเซอร์ $F(D)$ มาใช้ช่วยในการปรับคุณสมบัติของข้อมูล s_k ให้เป็นข้อมูล y_k ที่เหมาะสมกับระบบและง่ายต่อการถอดรหัสข้อมูล

- ถ้ากำหนดให้อีควอไลเซอร์มีผลตอบสนองในโดเมน D คือ

$$F(D) = \sum_{k=-K}^{K} f_k D^k$$



TDL
(tapped-delay line)

$$y_k = s_k * f_k = \underbrace{s_{k+K} f_{-K} + \ldots + s_{k+1} f_{-1}}_{\text{ISI (future data)}} + \underbrace{s_k f_0}_{\text{wanted signal}} + \underbrace{s_{k-1} f_1 + \ldots + s_{k-K} f_K}_{\text{ISI (past data)}}$$

อีควอไลเซอร์แบบ ZF (ZF-EQ)

- ZF-EQ $\Rightarrow$ กำจัด ISI ในสัญญาณที่ได้รับให้หมดไป
- การออกแบบ

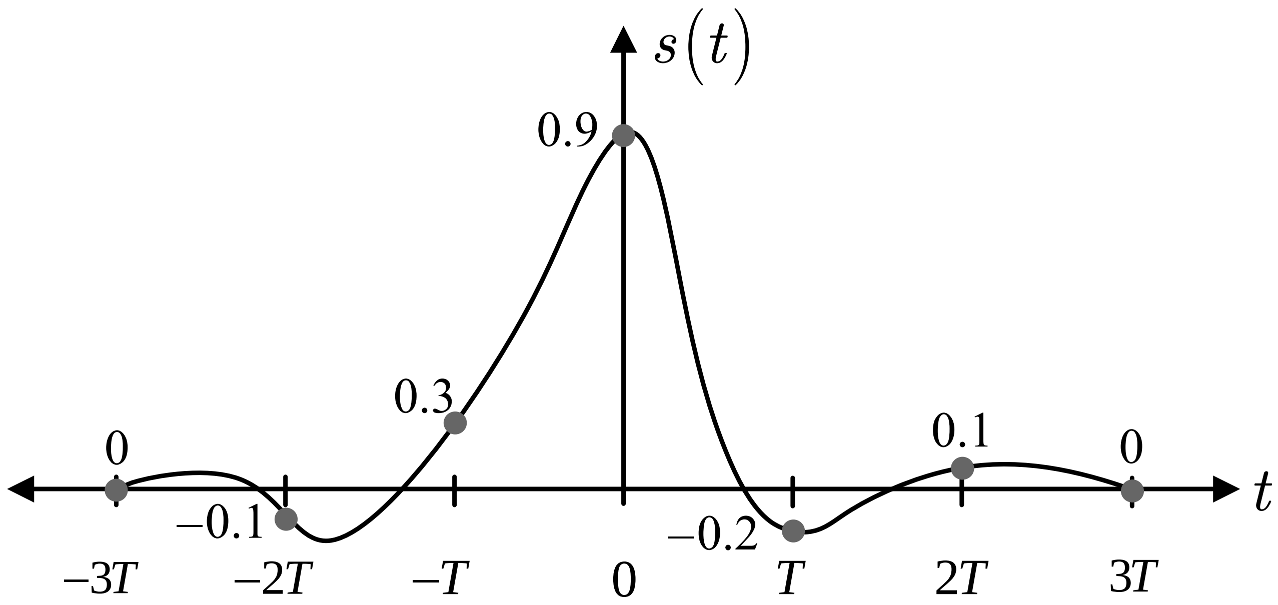
$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{-K} \\ y_{-K+1} \\ \vdots \\ y_0 \\ \vdots \\ y_{K-1} \\ y_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 & s_{-1} & s_{-2} & \cdots & s_{-2K+1} & s_{-2K} \\ s_1 & s_0 & s_{-1} & \cdots & s_{-2K+2} & s_{-2K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ s_K & s_{K-1} & s_{K-2} & \cdots & s_{-K+1} & s_{-K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ s_{2K-1} & s_{2K-2} & s_{2K-3} & \cdots & s_0 & s_{-1} \\ s_{2K} & s_{2K-1} & s_{2K-2} & \cdots & s_1 & s_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{-K} \\ f_{-K+1} \\ \vdots \\ f_0 \\ \vdots \\ f_{K-1} \\ f_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}$$

- ZF-EQ ต้องทำให้ข้อมูลเอาต์พุตลำดับที่ k มีค่าเท่ากับ

$$y_k = \begin{cases} a_k + n_k, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm K \end{cases}$$

Example 6

ถ้าให้ลำดับข้อมูล $\{s_k\}$ ที่จะส่งเข้าอีควอไลเซอร์คือ $\{-0.1, 0.3, 0.9, -0.2, 0.1\}$ ตามรูปต่อไปนี้ ถ้าวงจรภาครับใช้อีควอไลเซอร์ที่มีโครงสร้างตามรูปที่ 9.19 ซึ่งมีจำนวนแท็ปเท่ากับ 3 แท็ป นั่นคือ $\{f_{-1}, f_0, f_1\}$ จงหาค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์แบบ ZF ที่ทำให้ข้อมูลเอาต์พุตมีค่าเป็น $\{y_{-1}, y_0, y_1\} = \{0, 1, 0\}$



วิธีทำ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลอินพุตและข้อมูลเอาต์พุตของอีควอไลเซอร์

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_0 & s_{-1} & s_{-2}\\ s_1 & s_0 & s_{-1}\\ s_2 & s_1 & s_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{-1}\\ f_0\\ f_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.3 & -0.1\\ -0.2 & 0.9 & 0.3\\ 0.1 & -0.2 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{-1}\\ f_0\\ f_1\end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์มีค่าเท่ากับ

$$\begin{bmatrix}f_{-1}\\ f_0\\ f_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.3 & -0.1\\ -0.2 & 0.9 & 0.3\\ 0.1 & -0.2 & 0.9\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.2938\\ 0.9636\\ 0.2468\end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมื่อ $\{s_k\} = \{-0.1, 0.3, 0.9, -0.2, 0.1\}$ ผ่านเข้าไปในอีควอไลเซอร์จะได้ $y_k = s_k * f_k$

$$\{y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3\} = \{0.0294, -0.1845, 0, 1, 0, 0.0470, 0.02468\}$$

ซึ่งจะพบว่าขนาดของแซมเปิลที่ก่อให้เกิดผลกระทบของ ISI มากสุดคือ 0.1845 และผลกระทบรวมทั้งหมดที่เกิดจาก ISI มีค่าเท่ากับ $|0.0294|+|-0.1845|+|0.047|+|0.02468| = 0.2855$

- ในกรณีนี้เมทริกซ์ **S** จะไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัส ก็ยังคงหา EQ ได้ดังนี้

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$$

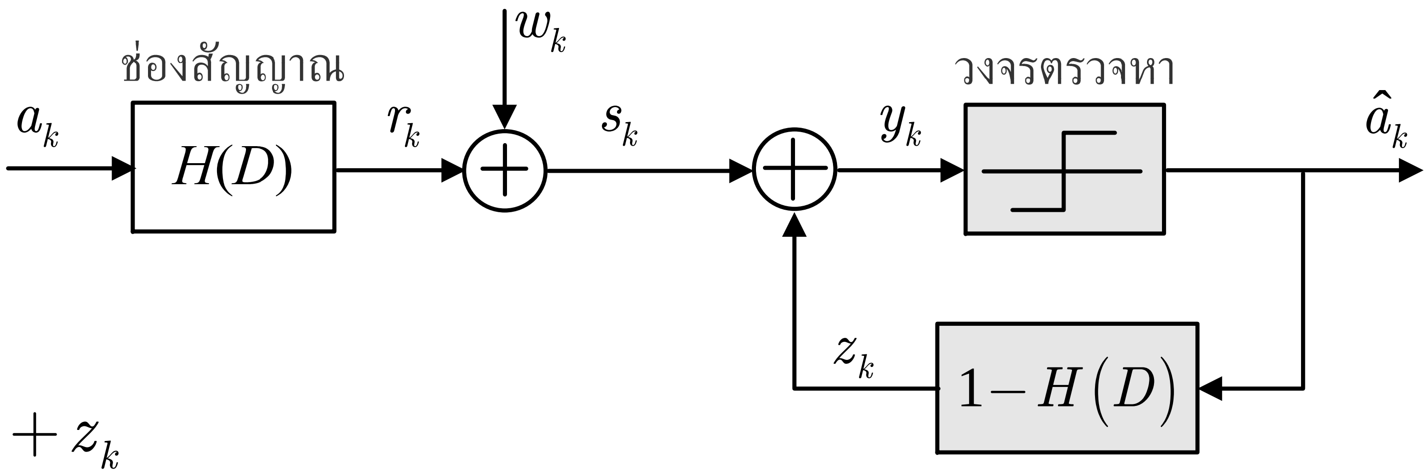
- อีควอไลเซอร์แบบ ZF ในโดเมน D $\Rightarrow \quad F(D) = \dfrac{1}{H(D)}$

- ข้อมูลเอาต์พุตของอีควอไลเซอร์ $y_k = a_k + n_k$ (ไม่มี ISI หลงเหลือ)

- สัญญาณรบกวนที่ถูกกรองโดยอีควอไลเซอร์ $N(D) = \dfrac{W(D)}{H(D)}$
  - ถ้าสเปกตรัมเชิงแอมพลิจูดของ H(D) = 0 ณ บางช่วงความถี่ f ก็จะปรากฏการณ์ที่เรียกว่า **การขยายสัญญาณรบกวน** (noise enhancement)

อีควอไลเซอร์แบบ DFE

- แก้ไขปัญญาเรื่องการขยายสัญญาณรบกวนของ ZF-EQ
  - ข้อมูลที่ส่งเข้าไปทำการถอดรหัสไม่มี ISI ปะปนและสัญญาณรบกวนก็ไม่ถูกขยาย



$$y_k = s_k + z_k$$

$$= \{(a_k * h_k) + w_k\} + \{\hat{a}_k * (1 - h_k)\} = \{(a_k - \hat{a}_k) * h_k\} + w_k + \hat{a}_k = a_k + w_k$$

- โดยทั่วไป DFE มีสมรรถนะดีกว่า ZF-EQ แต่อาจก่อให้เกิดปัญหาเรื่องการแพร่กระจายของข้อผิดพลาด ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\hat{a}_k \neq a_k$ สำหรับค่า k ใดๆ

อีควอไลเซอร์แบบ MMSE

- ถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อประนีประนอมข้อดีและข้อเสียของ ZF-EQ และ DFE
- อีควอไลเซอร์แบบ MMSE จะทำให้ค่า

$$\mathrm{MSE} = E\left[\left(y_k - a_{k-d}\right)^2\right]$$ มีค่า**น้อยสุด**

- ถ้ากำหนดให้อีควอไลเซอร์คือ

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{-K} \\ \vdots \\ f_0 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix}$$

เมื่อ N = 2K + 1 คือ
จำนวนแท็ปทั้งหมดของ EQ

และให้ $\mathbf{s} = \left[s_k, s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_{k-N+1}\right]^{\mathrm{T}}$

- ข้อมูลเอาต์พุตของอีควอไลเซอร์ ณ เวลา k มีค่าเท่ากับ

$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{s} = \mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}$$

- ดังนั้น $\mathrm{MSE} = E\left[y_k^2\right] - 2E\left[y_k a_{k-d}\right] + E\left[a_{k-d}^2\right]$

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE} &= E\left[\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\right] - 2E\left[a_{k-d}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}\right] + E_a \\ &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}E\left[\mathbf{s}\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{c} - 2\mathbf{c}^{\mathrm{T}}E\left[a_{k-d}\mathbf{s}\right] + E_a \\ &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{c} - 2\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{p} + E_a \\ &= \left(\mathbf{c} - \mathbf{R}_{ss}^{-1}\mathbf{p}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{ss}\left(\mathbf{c} - \mathbf{R}_{ss}^{-1}\mathbf{p}\right) - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{ss}^{-1}\mathbf{p} + E_a\end{aligned}$$

- ค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์แบบ MMSE หาได้จาก $\mathbf{c}_{\mathrm{MMSE}} = \mathbf{R}_{ss}^{-1}\mathbf{p}$

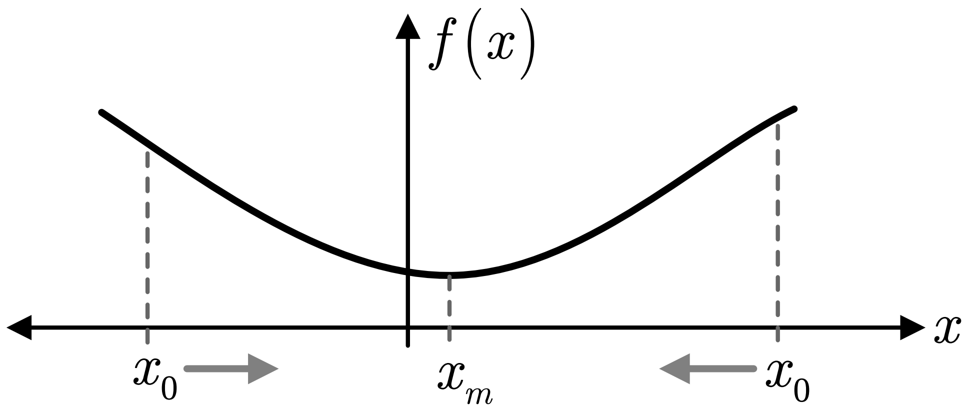
อีควอไลเซอร์แบบปรับตัว

- อีควอไลเซอร์ที่ใช้งานจริง ⇒ มีการปรับค่าสัมประสิทธิ์แต่ละแท็ปของอีควอไลเซอร์ตลอดเวลาในระหว่างที่รับข้อมูลเข้ามา ⇒ **อีควอไลเซอร์แบบปรับตัว**
  - มีโครงสร้างเหมือนกับอีควอไลเซอร์แบบ TDL **เพียงแต่**เพิ่มอัลกอริทึมสำหรับปรับค่าสัมประสิทธิ์เข้าไปในอีควอไลเซอร์ เพื่อใช้ชดเชยความไม่แน่นอนและการเปลี่ยนแปลงของช่องสัญญาณ
  - นิยมใช้อัลกอริทึม steepest descent หรือ gradient algorithm

อัลกอริทึม Steepest Descent แบบ 1 มิติ

ถ้าให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรอิสระ x

$\Rightarrow$ อัลกอริทึม steepest descent จะหาค่า x ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าต่ำสุด



❑ ถ้าให้ L คือจำนวนครั้งของการวนซ้ำ

กำหนดค่าเริ่มต้น $x = x_0$ เมื่อ x_0 คือค่าคงตัว

สำหรับ $k = 1$ ถึง L

$$x_{k+1} = x_k - \mu f'(x_k)$$

โดยทั่วไปสมรรถนะของอัลกอริทึม steepest descent ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ μ นั่นคือ

- ถ้า μ มีค่าน้อยเกินไป $\Rightarrow$ ใช้เวลานานกว่าจะได้ค่า x ที่ต้องการ $\Rightarrow$ อัตราการลู่เข้าช้า
- ถ้า μ มีค่ามากเกินไป $\Rightarrow$ เกิดการลู่ออก (divergence)

อัลกอริทึม Steepest Descent แบบ N มิติ

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว $\Rightarrow$ $f(\mathbf{x})$ เมื่อ $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^{\mathrm{T}}$

กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ เมื่อ $\mathbf{x}_0$ คือเวกเตอร์ค่าคงตัว

สำหรับ $k = 1$ ถึง L

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mu \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

เมื่อ ∇ คือตัวดำเนินการเกรเดียนต์ (gradient operator)

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

Example 7

ถ้ากำหนดให้ $f(x)=3x\exp(x^2)+3x/(2+x^2)-5$ จงใช้อัลกอริทึม steepest descent เพื่อหาค่า x_k สำหรับ k = 2 เมื่อกำหนดให้ x_0 = 0 และ μ = 0.2

วิธีทำ จากฟังก์ชัน $f(x)$ ที่กำหนด สามารถหาค่าอนุพันธ์ของ $f(x)$ ได้คือ

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=(3x)e^{x^2}(2x)+e^{x^2}(3)+\frac{(2+x^2)(3)-(3x)(2x)}{(2+x^2)^2}$$

จากอัลกอริทึม steepest descent จะได้ค่า x_k สำหรับ k = 0, 1, และ 2 ดังนี้

k	x_k
0	$x_0 = 0$
1	$x_1 = x_0 - \mu f'(x_0) = 0-(0.2)f'(0) = -0.9$
2	$x_2 = x_1 - \mu f'(x_1) = (-0.9)-(0.2)f'(-0.9) = -4.524$

ซึ่งจะได้ $x_2 = -4.524$ ตามที่ต้องการ

ความสัมพันธ์กับอีควอไลเซอร์แบบ MMSE

- วิธีการออกแบบอีควอไลเซอร์แบบ MMSE $\Rightarrow$ ฟังก์ชันที่ต้องการทำให้มีค่าน้อยสุดคือ

$$f(\mathbf{c}) = \mathrm{MSE} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{c} - 2\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{p} + E_a$$

โดยที่ $\boxed{\nabla f(\mathbf{c}) = 2\mathbf{R}_{ss}\mathbf{c} - 2\mathbf{p}}$

- ถ้าสมมุติว่าฟังก์ชัน $f(\mathbf{c})$ มีลักษณะเป็น quadratic function และมีจุดต่ำสุดเพียงจุดเดียว
- ค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์เหมาะที่สุด $\mathbf{c}_{\mathrm{opt}}$ หาได้โดย $\nabla f(\mathbf{c}) = 0$ นั่นคือ

$$2\mathbf{R}_{ss}\mathbf{c}_{\mathrm{opt}} - 2\mathbf{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{c}_{\mathrm{opt}} = \mathbf{R}_{ss}^{-1}\mathbf{p}} \quad (\text{มีค่าเท่ากับ } \mathbf{c}_{\mathrm{MMSE}})$$

- ดังนั้นการหาค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์โดยการทำให้ค่า $\nabla f(\mathbf{c})$ มีค่าน้อยสุด จึงช่วยรับประกันได้ว่า $\mathbf{c}_{\mathrm{opt}}$ จะลู่เข้าสู่ค่า $\mathbf{c}_{\mathrm{MMSE}}$ ถ้าเลือกใช้ค่า μ ที่เหมาะสม

อัลกอริทึม LMS

- การปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์ตามอัลกอริทึม steepest descent โดยทำให้ฟังก์ชัน $f(\mathbf{c})$ มีค่าน้อยสุด ทำได้โดยใช้ $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k - \frac{\mu}{2}\nabla f(\mathbf{c}_k)$

โดยที่ $\nabla f(\mathbf{c}_k) = 2\left(E\left[\mathbf{s}_k\mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{c}_k - E\left[\hat{a}_{k-d}\mathbf{s}_k\right]\right) = 2E\left[\mathbf{s}_k\left(\mathbf{s}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_k - \hat{a}_{k-d}\right)\right]$

$$= 2E\left[\mathbf{s}_k\left(y_k - \hat{a}_{k-d}\right)\right] = 2E\left[\mathbf{s}_k e_k\right]$$

- แทนค่า $\nabla f(\mathbf{c}_k)$ ลงในสมการ $\mathbf{c}_{k+1}$ จะได้ $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k - \mu E\left[\mathbf{s}_k e_k\right]$
- ในทางปฏิบัติการหาค่า $E\left[\mathbf{s}_k e_k\right]$ ทำได้ยาก $\Rightarrow$ แก้ปัญหาโดยการแทนค่า $E\left[\mathbf{s}_k e_k\right]$ ด้วยค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample mean) $\hat{E}\left[\mathbf{s}_k e_k\right] = \frac{1}{L_a}\sum_{i=0}^{L_a-1} e_{k-i}\mathbf{s}_{k-i}$
  - ถ้าใช้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเพียงหนึ่งจุด นั่นคือ $L_a = 1 \Rightarrow \hat{E}\left[\mathbf{s}_k e_k\right] = e_k\mathbf{s}_k$

- ดังนั้นสมการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์ $\Rightarrow$ $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k - \mu\{e_k \mathbf{s}_k\}$
  เรียกว่า**อัลกอริทึมกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด** (LMS: least mean square)
- นิยมใช้งานมากในหลายงานประยุกต์ เพราะ
  - ทำงานได้โดยไม่จำเป็นต้องทราบว่าข้อมูลอินพุตและช่องสัญญาณมีคุณลักษณะอย่างไร
  - ถ้า μ ที่ใช้มีค่าน้อยเพียงพอ $\Rightarrow$ รับประกันได้ว่าผลลัพธ์ค่า $\mathbf{c}$ ที่ได้จากอัลกอริทึม LMS จะมีค่าเข้าสู่ค่า $\mathbf{c}_{\mathrm{MMSE}}$
  - มีความทนทาน มีเสถียรภาพ และง่ายต่อการสร้างเป็นวงจรอิเล็กทรอนิกส์

อัลกอริทึม LMS

กำหนดค่าเริ่มต้น $\mathbf{c}_0$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

สำหรับ $k = 1$ ถึง L

คำนวณหาค่าข้อผิดพลาด $e_k = y_k - \hat{a}_{k-d}$

ปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์ $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k - \mu\{e_k \mathbf{s}_k\}$

ภาวะการทำงานของอีควอไลเซอร์แบบปรับตัว

ในทางปฏิบัติข้อมูลที่รับส่งในระบบสื่อสารจะประกอบด้วยข้อมูล 2 ส่วนหลักคือ

1) ส่วนแรกคือ**สัญญาณทดสอบ** (หรือ preamble) ข้อมูลในส่วนนี้จะเป็นที่ทราบกันทั้งวงจรภาคส่งและวงจรภาครับว่าข้อมูล preamble มีลักษณะแบบใด (มีจำนวนไม่กี่บิต)

2) ส่วนที่สองคือ**ข้อมูลจริง**ที่ใช้งานซึ่งเป็นข้อมูลสุ่มที่มีจำนวนหลายบิต

ในทางปฏิบัติอีควอไลเซอร์แบบปรับตัวทำงานเป็น 2 ภาวะ ตามลักษณะของข้อมูลดังนี้

1) **ภาวะการได้มา** (acquisition mode) หรือ training mode $\Rightarrow$ เป็นการทำงานในช่วงเริ่มต้นโดยจะใช้ข้อมูล preamble ช่วยในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์ที่เหมาะสม เนื่องจากอีควอไลเซอร์ทราบว่าข้อมูล preamble คืออะไร $\Rightarrow$ ใช้ μ ที่มีค่ามากได้ (ลู่เข้าเร็ว)

2) **ภาวะการติดตาม** (tracking mode) ในช่วงนี้จะใช้ข้อมูลจริงในการปรับค่าสัมประสิทธิ์ของอีควอไลเซอร์ เนื่องจากข้อมูลจริงมีลักษณะเป็นข้อมูลสุ่ม $\Rightarrow$ ควรใช้ μ ที่มีค่าน้อยเพื่อป้องกันข้อผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้นได้

❑ **ตัวอย่าง**การหาค่าสัมประสิทธิ์แต่ละแท็ปของอีควอไลเซอร์ (11 taps)