การสื่อสารดิจิทัล

พื้นฐานการกล้ำสัญญาณผ่านแถบ (8 - 9)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

http://home.npru.ac.th/piya

"Blood is thicker than water"

สัญญาณแถบความถี่ฐานและสัญญาณผ่านแถบ

- สมมุติว่าสัญญาณ $s(t)$ คือสัญญาณ**แถบความถี่ฐาน**ที่มีความถี่ในช่วง $[-W, W]$
- ในทางปฏิบัติการส่งสัญญาณผ่าน**ช่องสัญญาณผ่านแถบ** $\Rightarrow$ ต้องนำสัญญาณ $s(t)$ มากล้ำสัญญาณกับคลื่นพาห์ $c(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi f_c t + \Theta)$ ทำให้ได้เป็น**สัญญาณผ่านแถบ**

$$y(t) = s(t)c(t) = s(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

เมื่อ $f_c \gg W$ คือความถี่ของคลื่นพาห์ที่มีความถี่**สูง** และ Θ คือมุมเฟสแบบสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปในช่วง $[0, 2\pi]$ และเป็นอิสระจากสัญญาณ $s(t)$

- ความหนาแน่นสเปกตรัมกำลัง (PSD) ของสัญญาณ $y(t)$ มีเท่ากับ

$$G_Y(f) = \frac{1}{2}\left\{G_S(f - f_c) + G_S(f + f_c)\right\}$$

โดยที่ $G_S(f)$ คือ PSD ของ $s(t)$

Outline

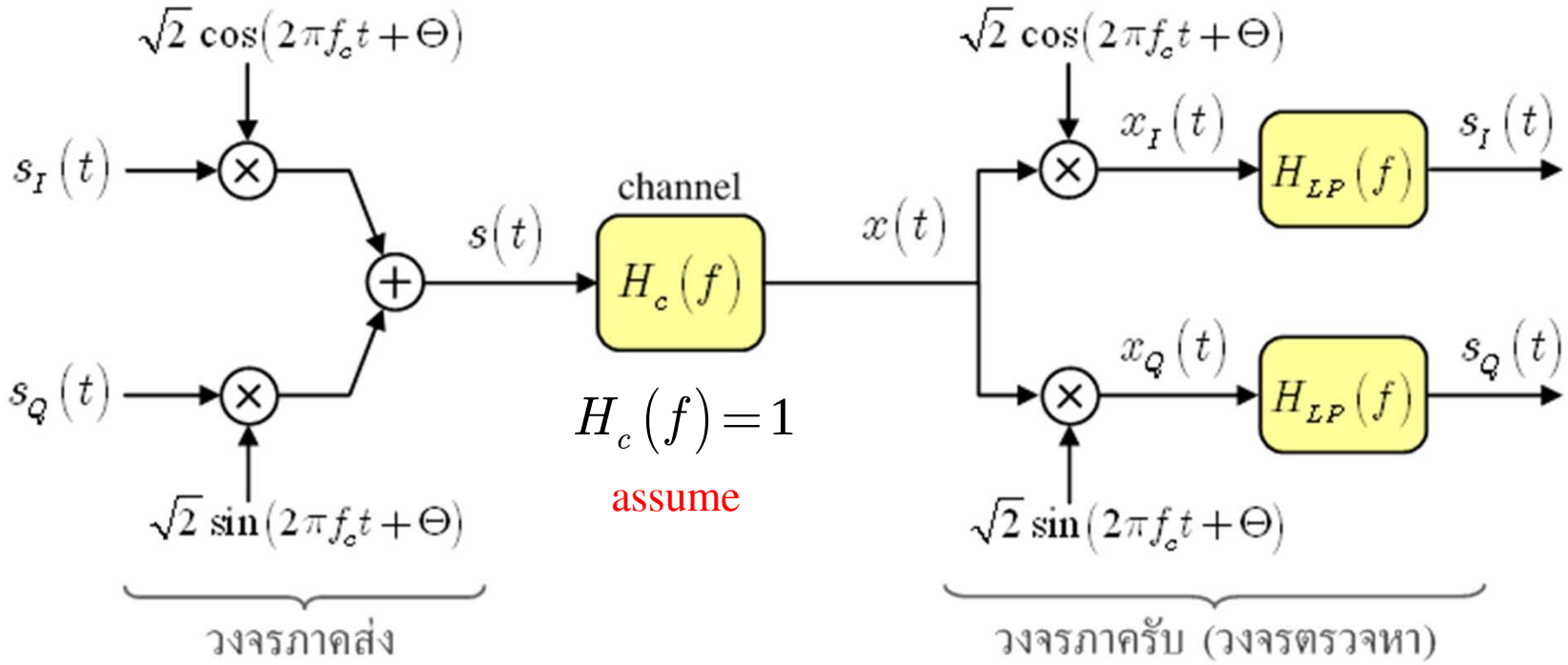
- สัญญาณแถบความถี่ฐานและสัญญาณผ่านแถบ
  - ฟังก์ชันฐานหลักสำหรับการส่งผ่านสัญญาณผ่านแถบ
- การตรวจหาแบบโคฮีเรนต์
  - การกล้ำสัญญาณแบบ BASK / BFSK / BPSK
- สมรรถนะของการกล้ำสัญญาณไบนารีแบบต่างๆ
- การกล้ำสัญญาณดิจิทัลที่ใช้แบนด์วิดท์คุ้มค่า
  - การกล้ำสัญญาณแบบ QPSK / OQPSK / MSK

- การสร้างสัญญาณ $s(t)$ ให้กลับคืนมาจากสัญญาณ $y(t)$ ทำได้โดย

$$x_I(t) = y(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_c t + \Theta) = s(t)\,2\cos^2(2\pi f_c t + \Theta)$$

$$= s(t)\{1 + \cos(4\pi f_c t + 2\Theta)\} = s(t) + \underbrace{s(t)\cos(4\pi f_c t + 2\Theta)}_{\text{double frequency term}}$$

- จากนั้นนำ $x_I(t)$ ไปผ่านวงจรกรองผ่านต่ำที่มี $f_c = W$ เฮิรตซ์ $\Rightarrow x_I(t) * h_{LP}(t) = s(t)$



วงจรภาคส่งและวงจรภาครับของระบบสื่อสารที่ใช้ **การกล้ำสัญญาณแบบควอเดรเจอร์**

- ในทางปฏิบัติสัญญาณผ่านแถบสองสัญญาณ $s_I(t)$ และ $s_Q(t)$ ที่มีแบนด์วิดท์ W เฮิรตซ์ สามารถส่งผ่านช่องสัญญาณผ่านแถบที่มีแบนด์วิดท์ $2W$ เฮิรตซ์ได้ โดยสัญญาณที่ส่งคือ

$$s(t) = s_I(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_c t + \Theta) + s_Q(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_c t + \Theta)$$

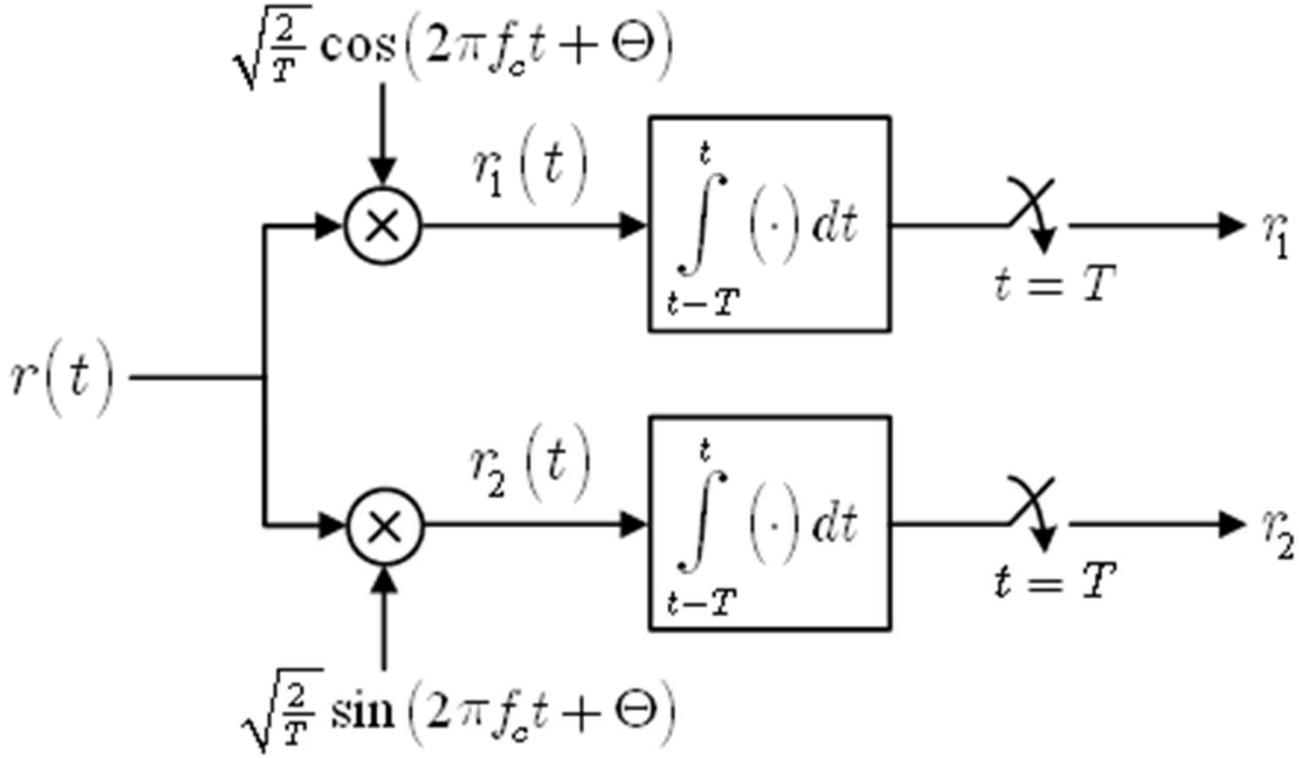
- ถ้า $H_c(f) = 1 \Rightarrow$ สัญญาณ $s_I(t)$ และ $s_Q(t)$ สร้างกลับคืนมาได้โดยการนำ $x(t) = s(t)$ ไปผ่านวงจรภาครับในรูปข้างต้น เช่นพิจารณาสัญญาณ $x_I(t)$ จะได้

$$\begin{aligned} x_I(t) &= s(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_c t + \Theta) \\ &= s_I(t)2\cos^2(2\pi f_c t + \Theta) + s_Q(t)2\sin(2\pi f_c t + \Theta)\cos(2\pi f_c t + \Theta) \\ &= s_I(t) + \underbrace{s_I(t)\cos(4\pi f_c t + 2\Theta)}_{\text{double frequency term}} + \underbrace{s_Q(t)\sin(4\pi f_c t + 2\Theta)}_{\text{double frequency term}} \end{aligned}$$

- เมื่อนำสัญญาณ $x_I(t)$ ไปผ่านวงจรกรองผ่านต่ำ ก็จะได้ $x_I(t) * h_{LP}(t) = s_I(t)$
- ในทำนองเดียวกันก็จะได้ว่า $x_Q(t) * h_{LP}(t) = s_Q(t)$

ตัวห้อย I = inphase และ Q = quadrature phase

- ในทางปฏิบัติวงจรกรองผ่านต่ำ $h_{LP}(t)$ แทนได้ด้วยวงจรกรองเข้าคู่
- ถ้าให้สัญญาณ $s_I(t) = \sum_{i=1}^{N} s_{Ii}\phi_i(t)$ โดย $s_{Ii} = \int_{-\infty}^{\infty} s_I(t)\phi_i(t)dt$ และ $\phi_i(t)$ คือฟังก์ชันฐานหลัก $\Rightarrow$ $s_I(t)$ เป็นกระบวนการผ่านต่ำ และ $\phi_i(t)$ เป็นสัญญาณผ่านต่ำ (ทำหน้าที่เสมือนเป็นวงจรกรองเข้าคู่ได้)



วงจรตรวจหาที่ใช้ความรู้ของมุมเฟส Θ $\Rightarrow$ **วงจรตรวจหาแบบโคฮีเรนต์**

ฟังก์ชันฐานหลักสำหรับการส่งผ่านสัญญาณผ่านแถบ

- ถ้าให้ $\phi(t)$ คือฟังก์ชันฐานหลักใดๆ ที่มีแบนด์วิดท์ W เฮิรตซ์ และให้ความถี่ $f_c \gg W$ ดังนั้นฟังก์ชัน $\phi_I(t) = \phi(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_c t + \Theta)$ และ $\phi_Q(t) = \phi(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_c t + \Theta)$ สามารถประมาณได้ว่าเป็นฟังก์ชันฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ
- โดยทั่วไปฟังก์ชันฐานหลักที่นิยมใช้ในระบบสื่อสารคือ

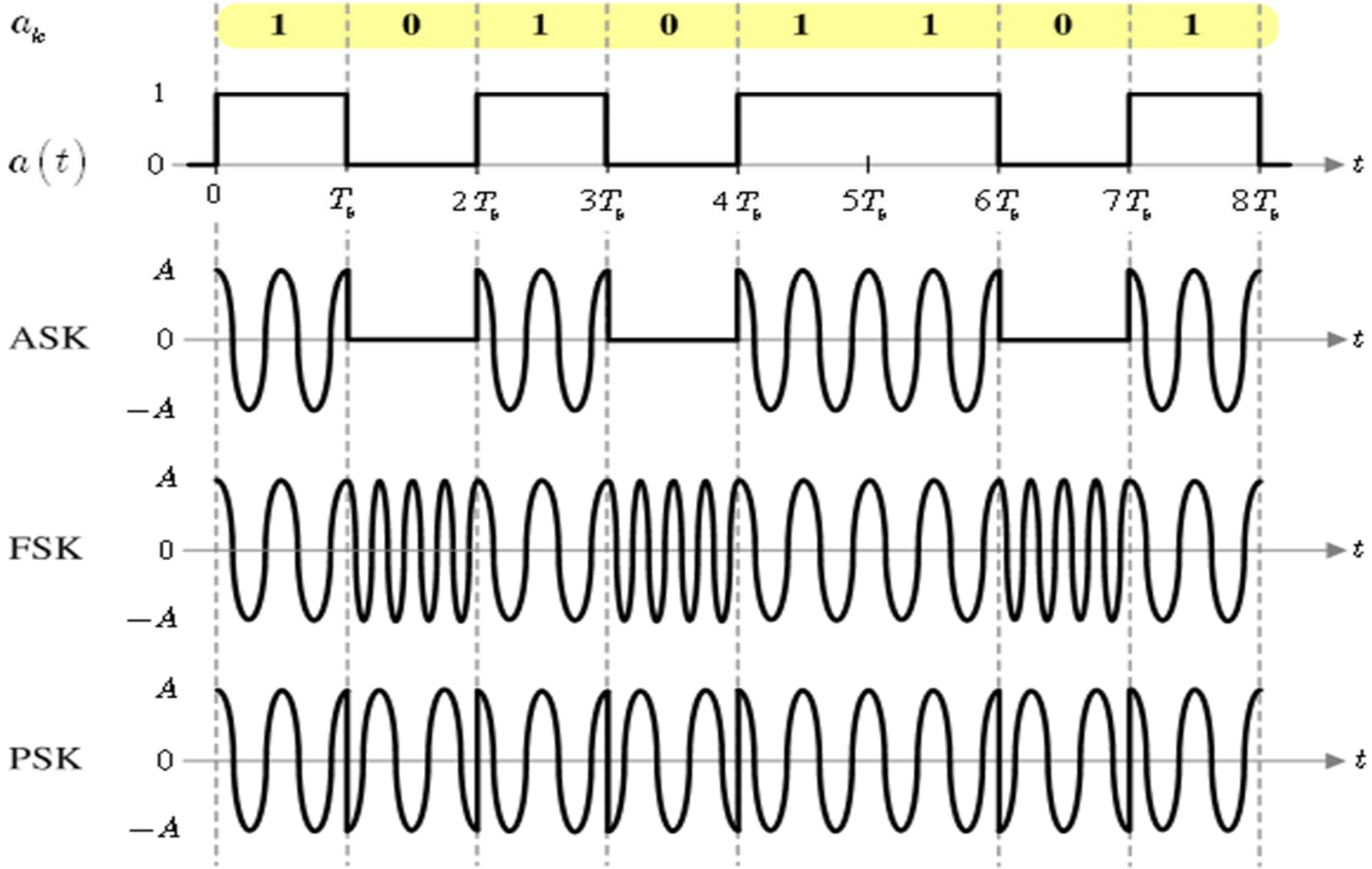
$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_c t + \Theta) \text{ และ } \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi f_c t + \Theta), \text{ สำหรับ } 0 \le t \le T$$

ถ้า $f_c = n/T$ เมื่อ n คือเลขจำนวนเต็ม $\Rightarrow$ $\phi_1(t)$ และ $\phi_2(t)$ เป็นฟังก์ชันฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติด้วย

- ดังนั้นวงจรตรวจหาสามารถใช้ $\phi_1(t)$ และ $\phi_2(t)$ แทนการใช้วงจรกรองผ่านต่ำได้

การตรวจหาแบบโคฮีเรนต์

- สมมุติว่าวงจรภาครับรู้ว่ามุมเฟส Θ ของคลื่นพาห์คืออะไร ⇒ Θ = 0 เรเดียน



การกล้ำสัญญาณแบบ BASK

- เป็นการกล้ำสัญญาณแบบ ASK ที่ใช้กับสัญญาณไบนารี

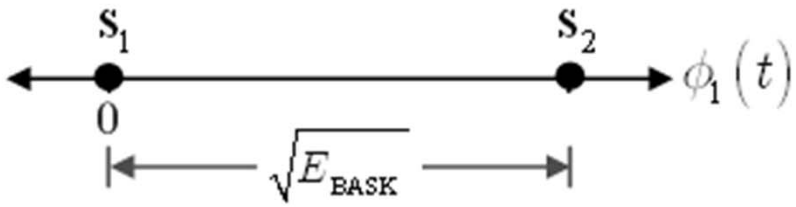
$$s(t)=a(t)c(t)=\begin{cases} s_1(t)=0, & \text{if "0" is sent} \\ s_2(t)=A\cos(2\pi f_c t), & \text{if "1" is sent} \end{cases}$$

สำหรับ $0 \le t \le T_b$ เมื่อ T_b คือคาบเวลาของบิต, $a(t)$ คือสัญญาณไบนารี (แถบความถี่ฐาน), คลื่นพาห์ $c(t)=A\cos(2\pi f_c t)$, $f_c = n/T_b$, n คือเลขจำนวนเต็ม, และพลังงานของสัญญาณมีค่าเท่ากับ $E_{\text{BASK}} = A^2 T_b / 2$ จูล

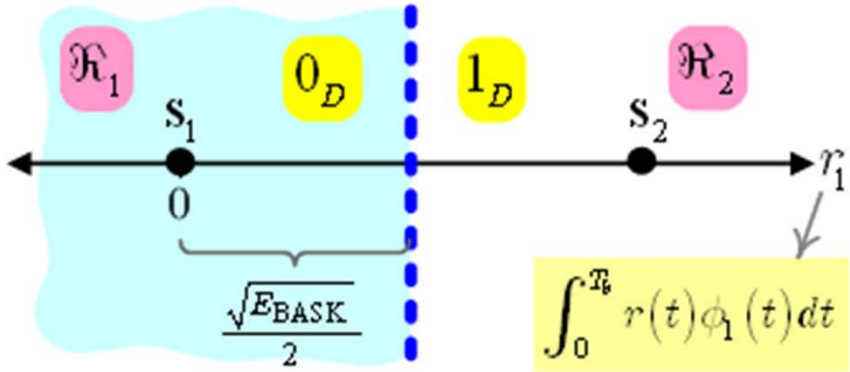
สัญญาณที่วงจรภาครับได้รับคือ $r(t)=s_i(t)+w(t)$ สำหรับ $i \in \{1,2\}$ และ $w(t)$ คือสัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และ PSD แบบสองด้านเท่ากับ $N_0/2$

ฟังก์ชันฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ $\Rightarrow$ $\phi_1(t)=s_2(t)/\sqrt{E_{\text{BASK}}}=\sqrt{2/T_b}\cos(2\pi f_c t)$

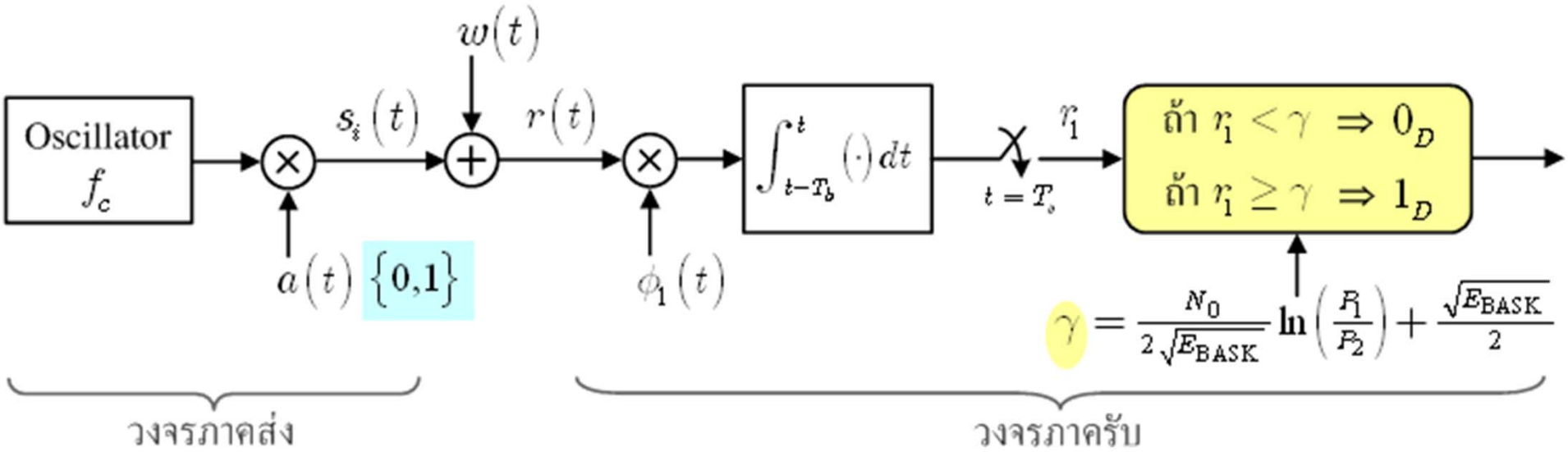
$P_1 = P_2 = 0$



(ก)



(ค)



(ข)

P_1 และ P_2 คือความน่าจะเป็นอะพิริออริ

วงจรภาครับเหมาะที่สุดในรูปของวงจรสหสัมพันธ์ เมื่อค่าขีดเริ่มเปลี่ยนมีค่าเท่ากับ

$$\gamma = \frac{N_0}{2\sqrt{E_{\text{BASK}}}} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + \frac{\sqrt{E_{\text{BASK}}}}{2}$$

ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิตเท่ากับ

$$P_{b,\text{BASK}} = \Pr\left[\mathbf{r} \notin \Re_1 \mid \mathbf{s}_1\right] P_1 + \Pr\left[\mathbf{r} \notin \Re_2 \mid \mathbf{s}_2\right] P_2$$

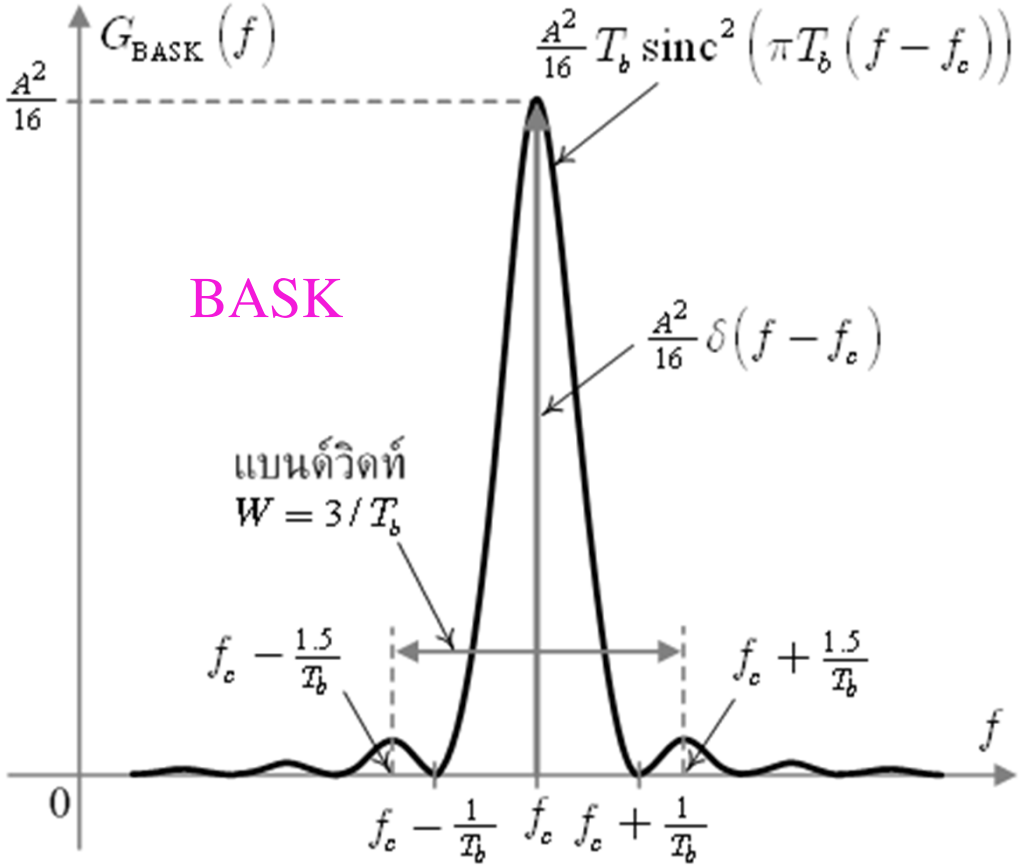
$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}\left(0, \tfrac{N_0}{2}\right)$$

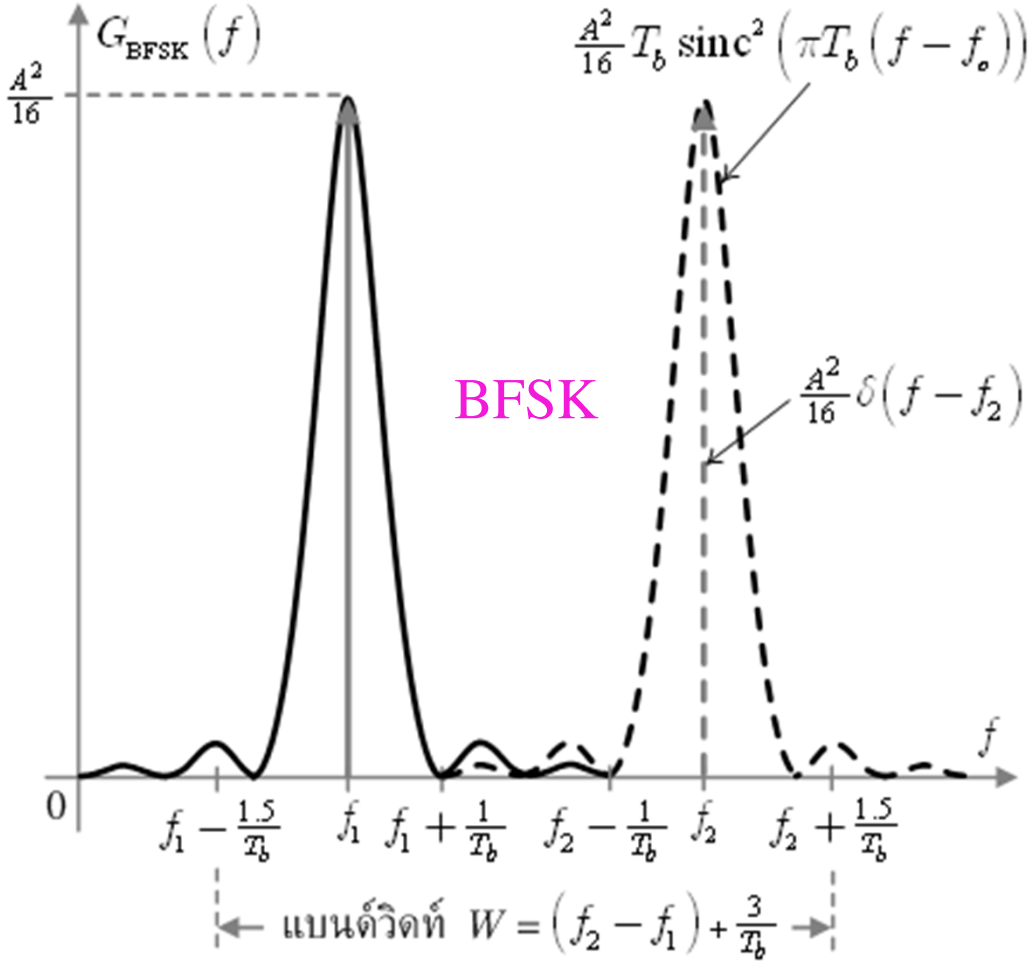
$$= 0.5 \Pr\left[\mathbf{w} > \tfrac{\sqrt{E_{\text{BASK}}}}{2}\right] + 0.5 \Pr\left[\mathbf{w} > \tfrac{\sqrt{E_{\text{BASK}}}}{2}\right] = Q\left(\sqrt{\frac{E_{\text{BASK}}}{2N_0}}\right)$$

นอกจากนี้ PSD ของสัญญาณ BASK มีค่าเท่ากับ

$$G_{\text{BASK}}(f) = \frac{A^2}{16}\Big[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)$$
$$+ T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f + f_c)\right) + T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f - f_c)\right)\Big]$$

กำลังงานประมาณ 95% (แบนด์วิดท์แบบ 95%) อยู่ภายในแถบความถี่ $3/T_b$ เฮิรตซ์


$G_{BASK}(f)$
$\frac{A^2}{16}$
$\frac{A^2}{16} T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f - f_c)\right)$
BASK
$\frac{A^2}{16} \delta(f - f_c)$
แบนด์วิดท์
$W = 3/T_b$
$f_c - \frac{1.5}{T_b}$
$f_c + \frac{1.5}{T_b}$
f
0
$f_c - \frac{1}{T_b}$
f_c
$f_c + \frac{1}{T_b}$


$G_{BFSK}(f)$
$\frac{A^2}{16}$
$\frac{A^2}{16} T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f - f_o)\right)$
BFSK
$\frac{A^2}{16} \delta(f - f_2)$
f
0
$f_1 - \frac{1.5}{T_b}$
f_1
$f_1 + \frac{1}{T_b}$
$f_2 - \frac{1}{T_b}$
f_2
$f_2 + \frac{1.5}{T_b}$
แบนด์วิดท์ $W = (f_2 - f_1) + \frac{3}{T_b}$

การกล้ำสัญญาณแบบ BFSK

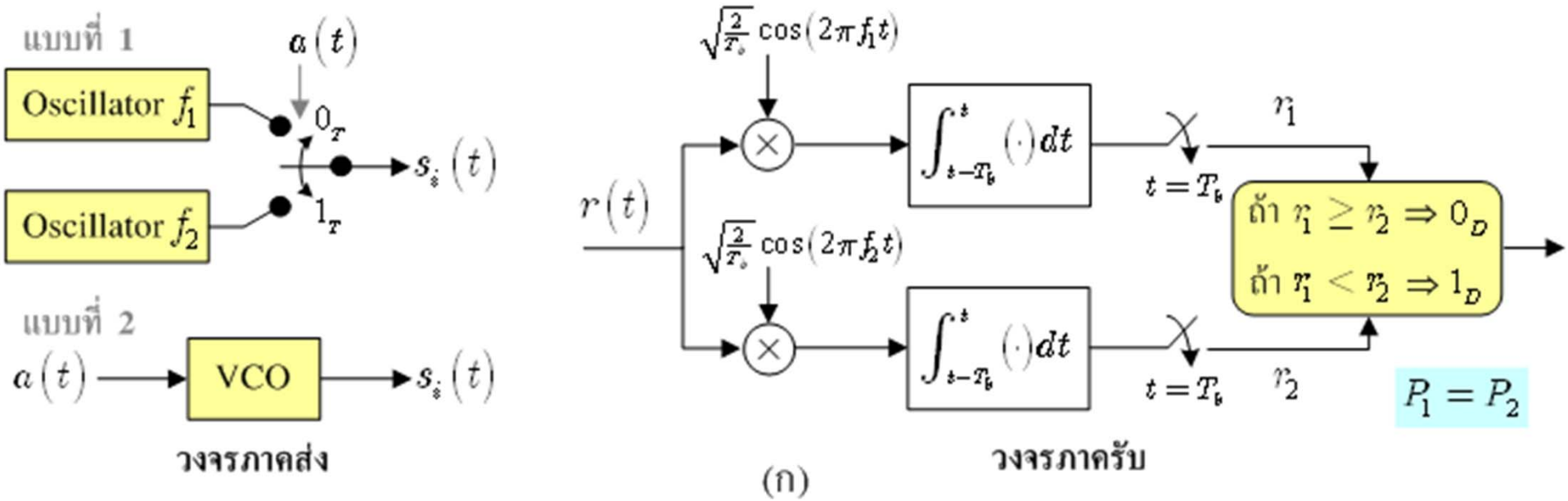
- เป็นการกล้ำสัญญาณแบบ FSK ที่ใช้กับสัญญาณไบนารี

$$s(t)=a(t)c(t)=\begin{cases} s_1(t)=A\cos(2\pi f_1 t), & \text{if "0" is sent} \\ s_2(t)=A\cos(2\pi f_2 t), & \text{if "1" is sent} \end{cases}$$

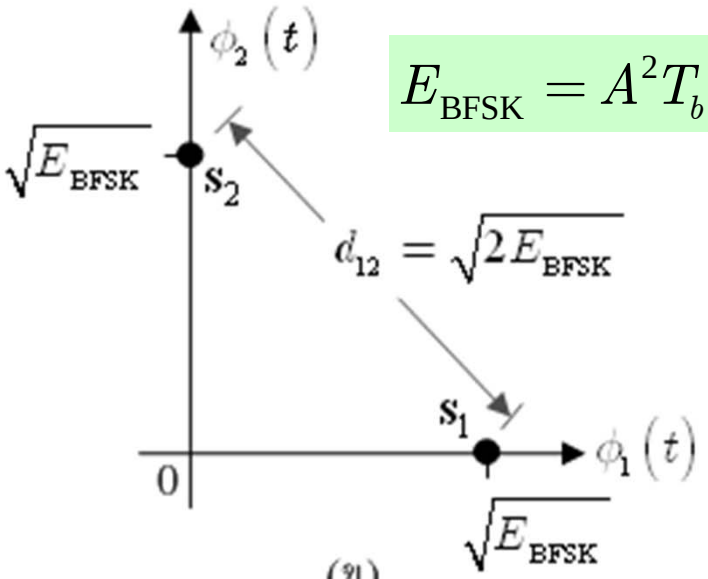
สำหรับ $0 \le t \le T_b$ เมื่อ $a(t)$ คือสัญญาณไบนารี, $c(t)=A\cos(2\pi f_i t)$ คือคลื่นพาห์, $i \in \{1,2\}$, $f_1 = f_c - f_d$, $f_2 = f_c + f_d$, $f_d = k/(4T_b)$ คือส่วนเบี่ยงเบนของความถี่, $f_c = n/(4T_b)$ คือความถี่ของคลื่นพาห์, n และ k เป็นเลขจำนวนเต็มและ $n \gg k$ เพื่อรับประกันว่าสัญญาณ $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ เป็นเชิงตั้งฉากต่อกัน $\Rightarrow$ **พิสูจน์???**

ระบบนี้ต้องใช้ฟังก์ชันฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ 2 ฟังก์ชัน

$$\phi_1(t)=\frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{\text{BFSK}}}}=\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_1 t) \quad \text{และ} \quad \phi_2(t)=\frac{s_2(t)}{\sqrt{E_{\text{BFSK}}}}=\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_2 t)$$

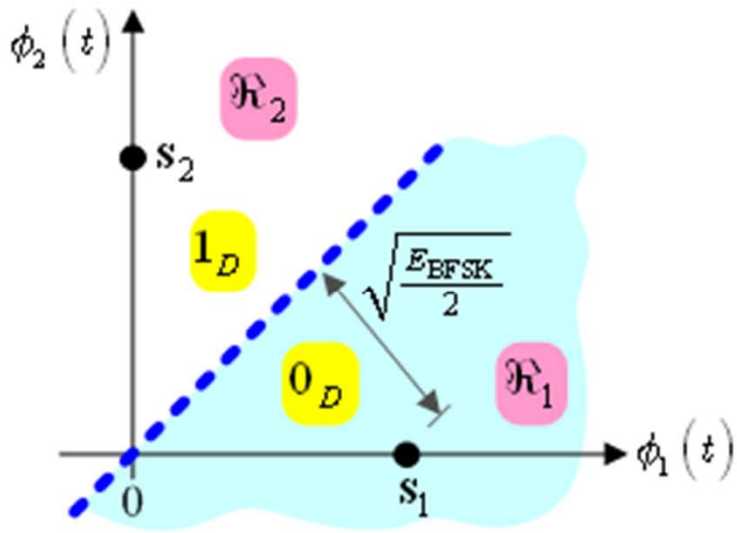


(ก)



$$E_{BFSK} = A^2 T_b / 2$$

(ข)



(ค)

$P_1 = P_2 = 0.5$

สัญญาณที่วงจรภาครับได้รับคือ $r(t) = s_i(t) + w(t)$ เมื่อ $i \in \{1,2\}$ และ $w(t) \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$

ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิตเท่ากับ

$$P_{b,\text{BFSK}} = \Pr[\mathbf{r} \notin \Re_1 \mid \mathbf{s}_1] P_1 + \Pr[\mathbf{r} \notin \Re_2 \mid \mathbf{s}_2] P_2$$

$$= 0.5\Pr\left[\mathbf{w} > \sqrt{\tfrac{E_{\text{BFSK}}}{2}}\right] + 0.5\Pr\left[\mathbf{w} > \sqrt{\tfrac{E_{\text{BFSK}}}{2}}\right] = Q\left(\sqrt{\frac{E_{\text{BFSK}}}{N_0}}\right)$$

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}\left(0, \tfrac{N_0}{2}\right)$$

PSD ของสัญญาณ BFSK

$$G_{\text{BFSK}}(f) = \frac{A^2}{16}\left[\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1) + T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f + f_1)\right) + T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f - f_1)\right)\right]$$

$$+ \frac{A^2}{16}\left[\delta(f - f_2) + \delta(f + f_2) + T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f + f_2)\right) + T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f - f_2)\right)\right]$$

- PSD ของสัญญาณ BFSK ก็คือ PSD ของสัญญาณ BASK สองสัญญาณมาซ้อนกัน
- แบนด์วิดท์แบบ 95% = $(f_2 - f_1) + 3/T_b$ เฮิรตซ์

การกล้ำสัญญาณแบบ BPSK

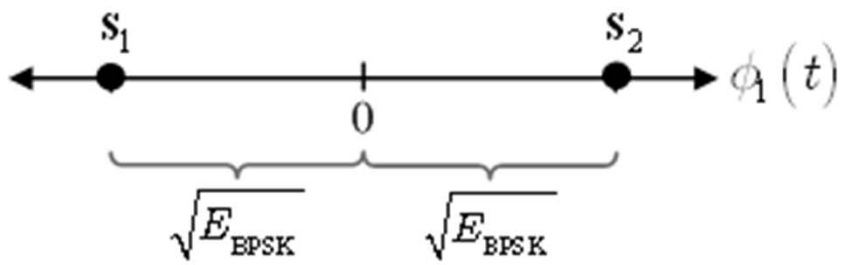
- เป็นการกล้ำสัญญาณแบบ PSK ที่ใช้กับสัญญาณไบนารี

$$s(t)=a(t)c(t)=A\cos(2\pi f_c t+\omega_i)=\begin{cases} s_1(t)=-A\cos(2\pi f_c t), & \text{if "0" is sent} \\ s_2(t)=+A\cos(2\pi f_c t), & \text{if "1" is sent} \end{cases}$$

สำหรับ $0\le t\le T_b$ เมื่อ $a(t)\in\{\pm 1\}$ คือสัญญาณไบนารีแบบ NRZ-L, $f_c=n/T_b$, n คือเลขจำนวนเต็ม, คลื่นพาห์ $c(t)=A\cos(2\pi f_c t)$, $\omega_i=i\pi$ (สัญญาณ $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ ใช้มุมเฟส $\omega_1=\pi$ และ $\omega_2=0$ ตามลำดับ), และแต่ละสัญญาณมีพลังงาน $E_{\text{BPSK}}=A^2T_b/2$ จูล

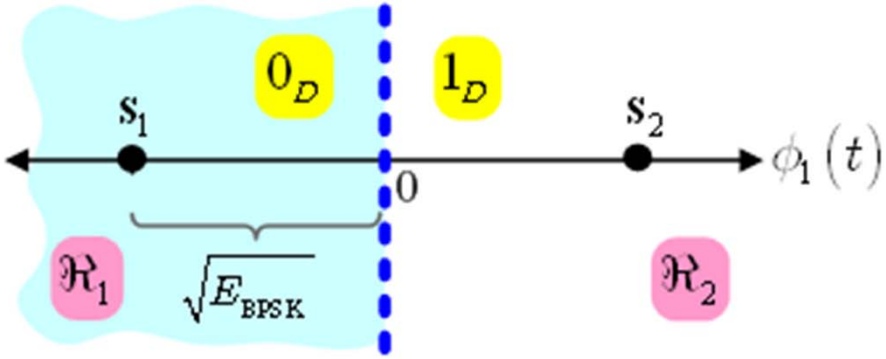
ระบบนี้ใช้ฟังก์ชันฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติตัวเดียว $\Rightarrow$ $\phi_1(t)=\dfrac{s_2(t)}{\sqrt{E_{\text{BPSK}}}}=\sqrt{\dfrac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_c t)$

$$E_{\text{BPSK}} = A^2 T_b / 2$$

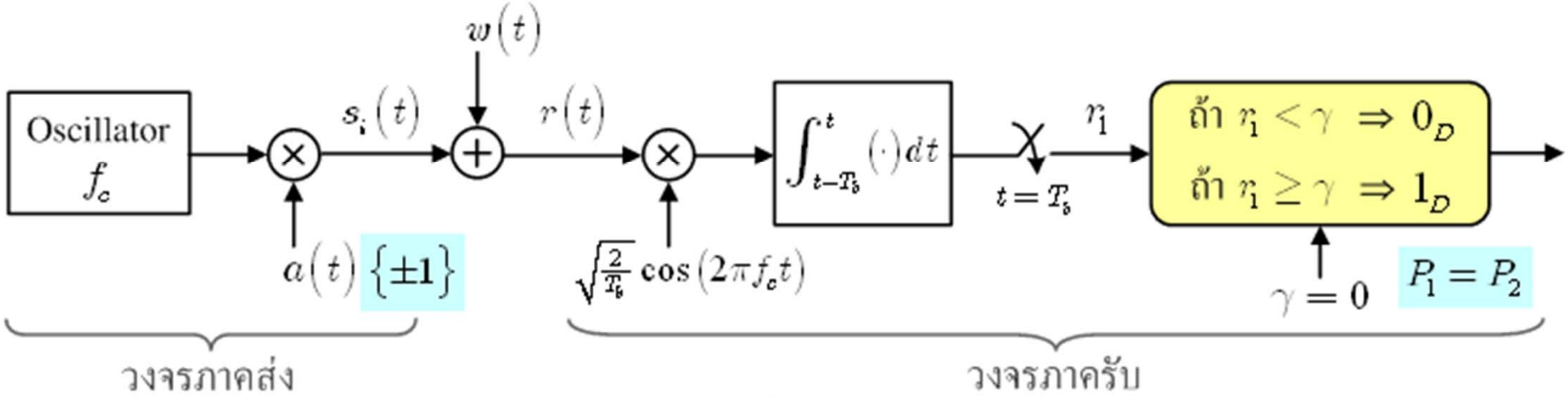


(ก)

$P_1 = P_2 = 0.5$



(ค)



(ข)

สัญญาณที่วงจรภาครับได้รับคือ $r(t) = s_i(t) + w(t)$ เมื่อ $i \in \{1,2\}$ และ $w(t) \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$

ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิตเท่ากับ

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

$$P_{b,\text{BPSK}} = \Pr\left[\mathbf{r} \notin \Re_1 \mid \mathbf{s}_1\right] P_1 + \Pr\left[\mathbf{r} \notin \Re_2 \mid \mathbf{s}_2\right] P_2$$

$$= 0.5\Pr\left[\mathbf{w} > \sqrt{E_{\text{BPSK}}}\right] + 0.5\Pr\left[\mathbf{w} > \sqrt{E_{\text{BPSK}}}\right] = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{\text{BPSK}}}{N_0}}\right)$$

PSD ของสัญญาณ BPSK หาได้จาก [1]

$$G_{\text{BPSK}}(f) = \frac{A^2}{4}\left[T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f - f_c)\right) + T_b \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_b (f + f_c)\right)\right]$$

ซึ่งเหมือนกับ PSD ของสัญญาณ BASK ยกเว้นเพียงแต่มีขนาดเพิ่มขึ้นสี่เท่าและไม่มีฟังก์ชันอิมพัลส์ ณ ความถี่ $\pm f_c$ เฮิรตซ์

สมรรถนะของการกล้ำสัญญาณไบนารีแบบต่างๆ

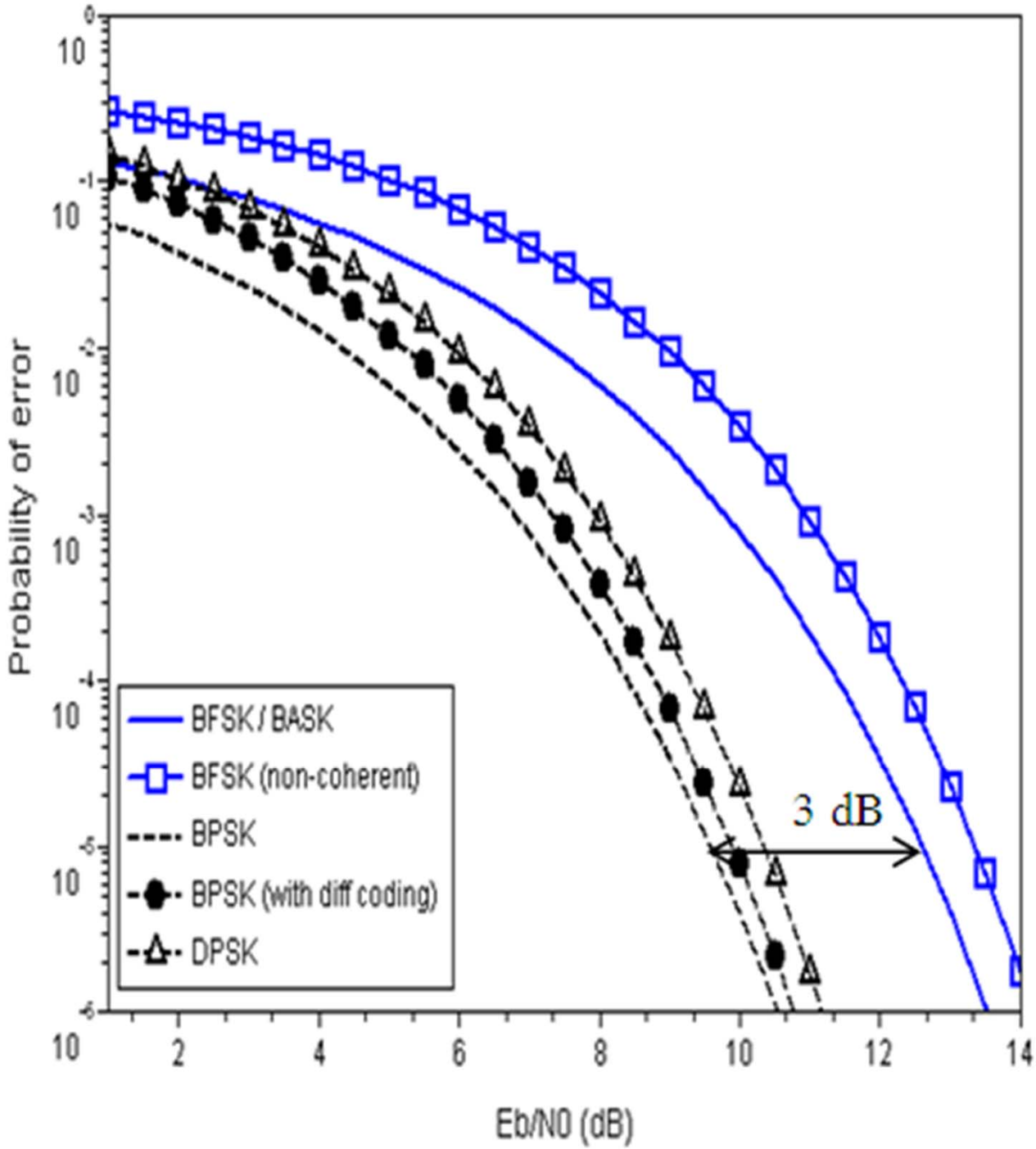
- แสดงความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิตในรูปของ**พลังงานเฉลี่ยต่อบิต** E_b เพื่อใช้เปรียบเทียบสมรรถนะของการกล้ำสัญญาณแบบต่างๆ
- ถ้าให้ข้อมูลบิต 0 และบิต 1 มีความน่าจะเป็นที่จะถูกส่งผ่านช่องสัญญาณเท่ากัน จะได้ว่า

$$E_b = E_{\text{BASK}} / 2 \quad \text{และ} \quad E_b = E_{\text{BFSK}} = E_{\text{BPSK}}$$

- ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิตของแต่ละระบบมีค่าเท่ากับ

$$P_{b,\text{BASK}} = P_{b,\text{BFSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,\text{BPSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



- ระบบ BPSK มีสมรรถนะดีกว่าระบบ BASK และ BFSK ประมาณ 3 dB
- ระบบ BFSK ต้อง**ใช้แบนด์วิดท์**มากกว่าระบบ BASK และ BPSK

การกล้ำสัญญาณดิจิทัลที่ใช้แบนด์วิดท์คุ้มค่า

- วิธีการกล้ำสัญญาณดิจิทัลที่ใช้แบนด์วิดท์คุ้มค่า $\Rightarrow$ มีประสิทธิภาพสเปกตรัม
  - เพิ่มอัตราส่งข้อมูลได้โดยไม่ต้องเพิ่มแบนด์วิดท์
  - เช่น การกล้ำสัญญาณแบบ QPSK, OQPSK และ MSK

การกล้ำสัญญาณแบบ QPSK

- ส่งข้อมูลครั้งละหนึ่ง**สัญลักษณ์** (หรือข่าวสารสองบิต) เช่น {00, 01, 10, 11}

- ถ้าให้ T_s คือคาบเวลาของสัญลักษณ์ $\Rightarrow$ ระบบ QPSK ใช้ $T_s = 2T_b$
- **อัตราบอด** (baud rate) มีค่าเท่ากับ $R_s = 1/T_s = 1/(2T_b) = R_b/2$ สัญลักษณ์ต่อวินาที
- เนื่องจากแบนด์วิดท์ที่ใช้เป็นสัดส่วนกับค่า R_s $\Rightarrow$ ลดแบนด์วิดท์ลงได้ 1/2 ณ ค่า R_b ที่กำหนด หรือถ้าให้แบนด์วิดท์มีค่าคงที่ $\Rightarrow$ เพิ่มอัตราบิต R_b ให้สูงขึ้นได้สองเท่า

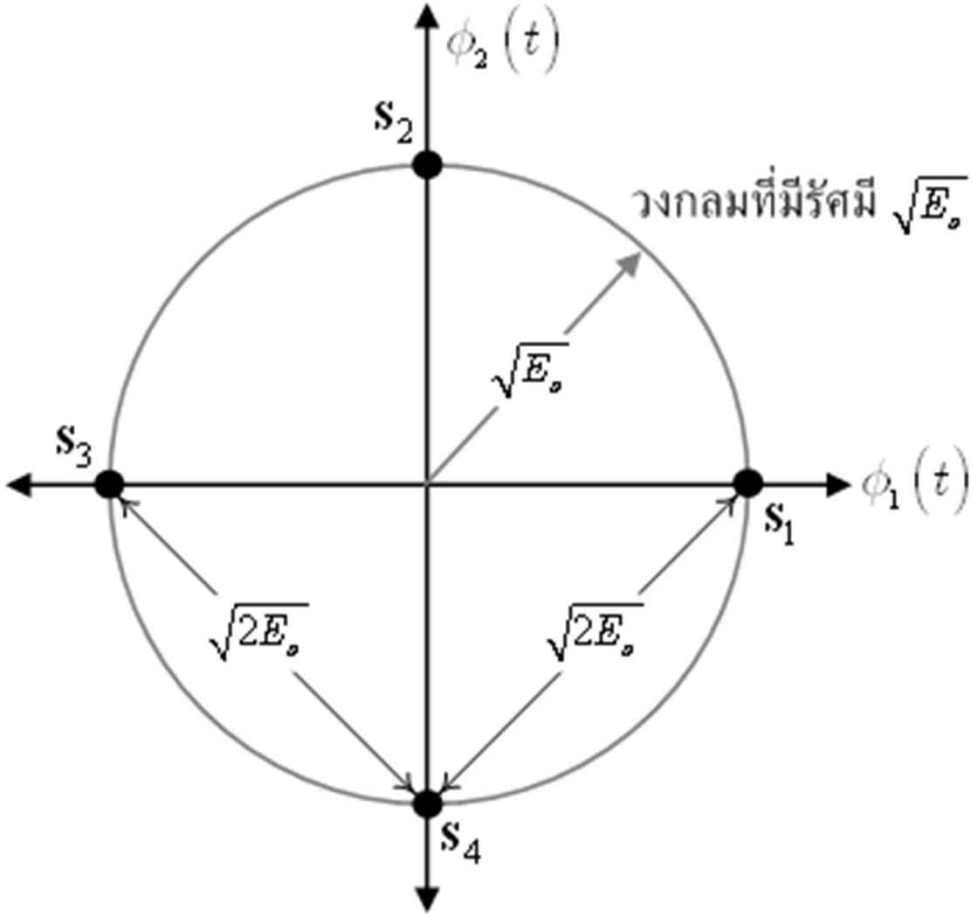
- เนื่องจากฟังก์ชัน $\cos(2\pi f_c t)$ และ $\sin(2\pi f_c t)$ เป็นเชิงตั้งฉากต่อกัน เมื่อ $f_c = n / T_s$
- สัญญาณ QPSK เขียนให้อยู่ในรูป

$$s_i(t) = A\cos(2\pi f_c t + \omega_i) = \begin{cases} s_1(t) = A\cos(2\pi f_c t), & \text{if } m_1 = \text{"00" is sent} \\ s_2(t) = A\sin(2\pi f_c t), & \text{if } m_2 = \text{"01" is sent} \\ s_3(t) = -A\cos(2\pi f_c t), & \text{if } m_3 = \text{"11" is sent} \\ s_4(t) = -A\sin(2\pi f_c t), & \text{if } m_4 = \text{"10" is sent} \end{cases}$$

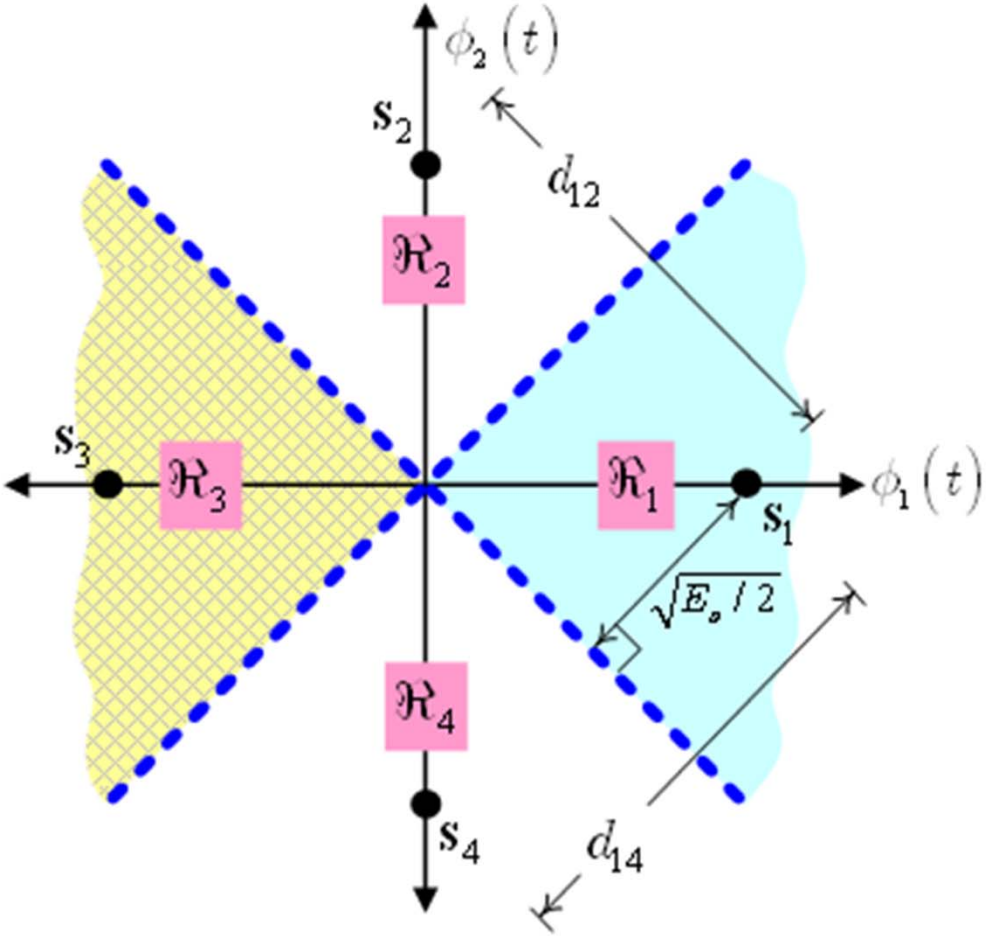
สำหรับ $0 \le t \le T_s$ เมื่อ A คือค่าคงตัว, $\omega_i = (i-1)\pi / 2$ คือมุมเฟส, $i \in \{1,2,3,4\}$, และ พลังงานของแต่ละสัญญาณมีค่าเท่ากับ $E_s = \int_0^{T_s} s_i^2(t)\,dt = A^2 T_s / 2$ จูล

- ระบบนี้ใช้ฟังก์ชันฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติเพียง 2 ฟังก์ชันคือ

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_s}} = \sqrt{\frac{2}{T_s}}\cos(2\pi f_c t) \quad \text{และ} \quad \phi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_s}} = \sqrt{\frac{2}{T_s}}\sin(2\pi f_c t)$$



ปริภูมิสัญญาณ



บริเวณการตัดสินใจ

- วงจรภาครับเหมาะที่สุด $\Rightarrow$ **ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดสัญลักษณ์** มีค่าน้อยสุด
- การทำให้ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดมีค่าน้อยสุด = การทำให้ความน่าจะเป็นของการตัดสินใจถูกต้อง P_c มีค่ามากสุด เมื่อ

$$P_c = \sum_{i=1}^{4} \Pr\left[\mathbf{r} \in \Re_i \mid s_i(t)\right] \times \Pr\left[s_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{4} P_i \int_{\Re_i} p\left(\mathbf{r} \mid s_i(t)\right) d\mathbf{r}$$

- การทำให้ P_c มีค่ามากสุด $\Rightarrow$ ได้**กฎการตัดสินใจ**ดังนี้

เลือก $s_i(t)$ ถ้า

$$p\left(\mathbf{r} \mid s_i(t)\right) P_i > p\left(\mathbf{r} \mid s_j(t)\right) P_j$$

สำหรับ $j \in \{1,2,3,4\},\ j \neq i$

- แทนค่าฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $K = 1/\sqrt{\pi N_0}$

$$p\left(\mathbf{r} \mid s_i(t)\right) = K \exp\left(-\frac{\left(r_1 - s_{i1}\right)^2}{N_0}\right) \times K \exp\left(-\frac{\left(r_2 - s_{i2}\right)^2}{N_0}\right) \times \prod_{k=3}^{\infty} K \exp\left(-\frac{r_k^2}{N_0}\right)$$

- ดังนั้น

$$\exp\left(-\frac{\left(r_1 - s_{i1}\right)^2}{N_0}\right) \exp\left(-\frac{\left(r_2 - s_{i2}\right)^2}{N_0}\right) P_i > \exp\left(-\frac{\left(r_1 - s_{j1}\right)^2}{N_0}\right) \exp\left(-\frac{\left(r_2 - s_{j2}\right)^2}{N_0}\right) P_j$$

- **กฎการตัดสินใจ** $\Rightarrow$ เลือก $s_i(t)$ ถ้า

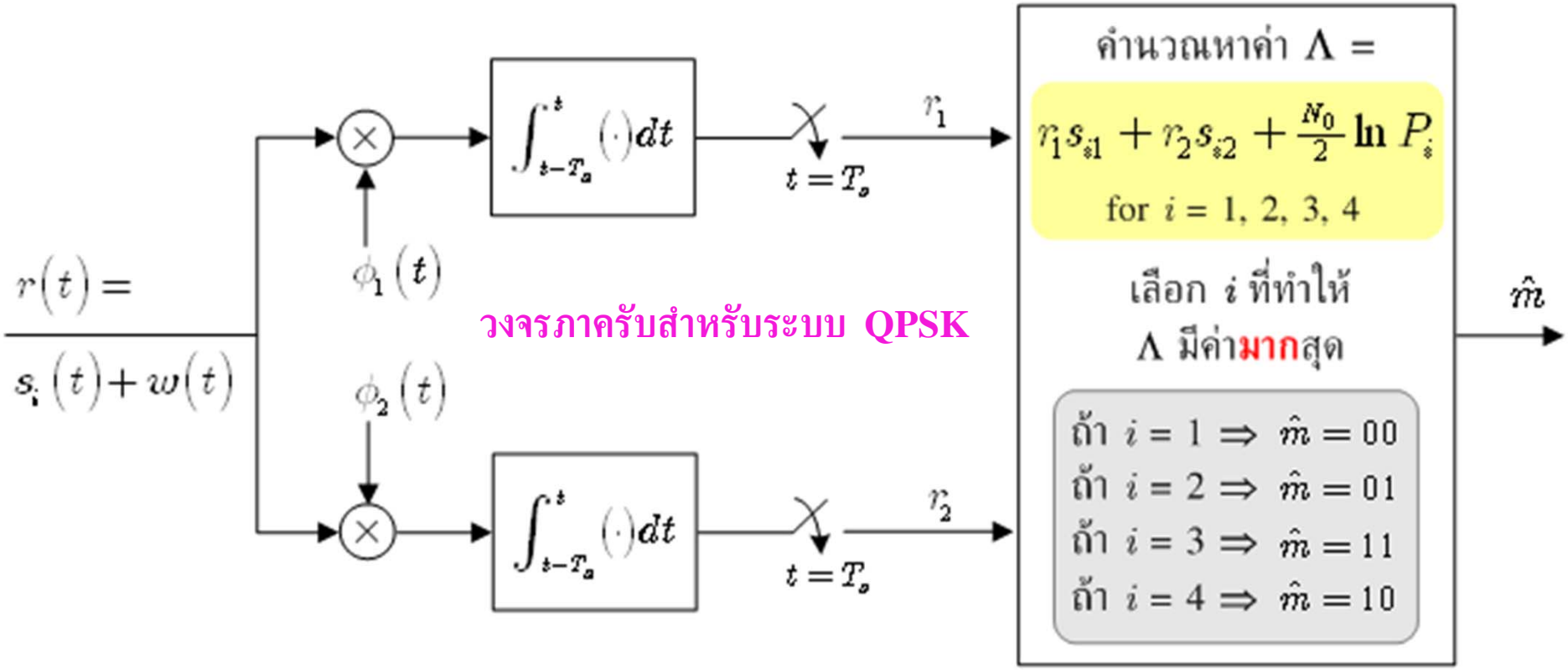
$$\frac{N_0}{2} \ln P_i + r_1 s_{i1} + r_2 s_{i2} - \frac{\left(s_{i1}^2 + s_{i2}^2\right)}{2} > \frac{N_0}{2} \ln P_j + r_1 s_{j1} + r_2 s_{j2} - \frac{\left(s_{j1}^2 + s_{j2}^2\right)}{2}$$

เมื่อ $j \in \{1, 2, 3, 4\},\ j \neq i$

- เนื่องจาก $s_{j1}^2 + s_{j2}^2 = E_s$ คือพลังงานของสัญญาณ $s_j(t)$
- ถ้าทุกสัญญาณมีพลังงานเท่ากัน $\Rightarrow$ **กฎการตัดสินใจ** $\Rightarrow$ เลือก $s_i(t)$ ถ้า

$$\boxed{\frac{N_0}{2}\ln P_i + r_1 s_{i1} + r_2 s_{i2} > \frac{N_0}{2}\ln P_j + r_1 s_{j1} + r_2 s_{j2}}$$

เมื่อ $j \in \{1,2,3,4\},\ j \neq i$



วงจรภาครับสำหรับระบบ QPSK

- ถ้าทุกสัญลักษณ์มีความน่าจะเป็นเท่ากัน $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0.25$
- **กฎการตัดสินใจ**

$$\text{เลือก } s_i(t) \text{ ถ้า } \sum_{j=1}^{2}\left(r_j - s_{ij}\right)^2 \text{ มีค่าน้อยสุด}$$

  - ถือเป็น**วงจรภาครับแบบระยะทางน้อยสุด** (minimum-distance receiver)

ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดสัญลักษณ์

- จากบริเวณการตัดสินใจ (หน้า 39) จะได้

$$P_s = \sum_{i=1}^{4} \Pr\left[\mathbf{r} \notin \Re_i \mid \mathbf{s}_i\right]\Pr\left[\mathbf{s}_i\right] = 1 - \sum_{i=1}^{4} \Pr\left[\mathbf{r} \in \Re_i \mid \mathbf{s}_i\right]\Pr\left[\mathbf{s}_i\right]$$

- ถ้าสมมุติว่าวงจรภาคส่งส่งสัญญาณ s_1 และ w_{ij} คือองค์ประกอบของสัญญาณรบกวนในทิศทางของสัญญาณ $s_i(t)$ และ $s_j(t)$

- ดังนั้นความน่าจะเป็นที่วงจรภาครับจะตัดสินใจถูกต้องมีค่าเท่ากับ

$$\Pr[\mathbf{r} \in \Re_1 \mid \mathbf{s}_1] = \Pr[w_{12} \le d_{12}/2 \text{ and } w_{14} \le d_{14}/2]$$

$$= \Pr\left[w_{12} \le \sqrt{\frac{E_s}{2}}\right] \times \Pr\left[w_{14} \le \sqrt{\frac{E_s}{2}}\right] = \left\{1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right\}^2$$

- ในกรณีที่ $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0.25$ จะได้

$$P_s = 1 - \sum_{i=1}^{4} P_i \left\{1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right\}^2 = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดสัญลักษณ์

ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิต

- ระบบ QPSK ส่งข้อมูลหนึ่งสัญลักษณ์ประกอบด้วยสองบิต
- ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดสัญลักษณ์มีค่า**ไม่เท่ากับ**ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิต
- การหาความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิต $\Rightarrow$ ต้องจำแนกความแตกต่างระหว่างข้อผิดพลาดสัญลักษณ์แต่ละสัญลักษณ์ให้ชัดเจน
- จากปริภูมิสัญญาณ (หน้า 39) มีความสมมาตร ถ้าสมมุติว่าระบบส่ง $m_1 = 00$ เพราะฉะนั้นข้อผิดพลาดที่เกิดมีทั้งหมด 3 แบบคือ

ระบบส่ง $m_1 = 00$ วงจรภาครับตัดสินใจ $m_2 = 01$ (บิตที่สองเกิดข้อผิดพลาด)

ระบบส่ง $m_1 = 00$ วงจรภาครับตัดสินใจ $m_3 = 11$ (ทั้งสองบิตเกิดข้อผิดพลาด)

ระบบส่ง $m_1 = 00$ วงจรภาครับตัดสินใจ $m_4 = 10$ (บิตที่หนึ่งเกิดข้อผิดพลาด)

โดยแต่ละแบบมีความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดเท่ากับ

$$\Pr[m_2 \mid m_1] = \underbrace{\left(1 - Q\left(\sqrt{E_s / N_0}\right)\right)}_{\text{1st bit is correct}} \underbrace{Q\left(\sqrt{E_s / N_0}\right)}_{\text{2nd bit is in error}}$$

$$\Pr[m_3 \mid m_1] = \underbrace{Q^2\left(\sqrt{E_s / N_0}\right)}_{\text{both bits are in error}}$$

$$\Pr[m_4 \mid m_1] = \underbrace{Q\left(\sqrt{E_s / N_0}\right)}_{\text{1st bit is in error}} \underbrace{\left(1 - Q\left(\sqrt{E_s / N_0}\right)\right)}_{\text{2nd bit is correct}}$$

- ดังนั้นความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิตหาได้จาก

$$P_{e,\text{bit}} = 0.5\Pr[m_2 \mid m_1] + 1.0\Pr[m_3 \mid m_1] + 0.5\Pr[m_4 \mid m_1] = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

ความน่าจะเป็น **0.5** ใช้กับเหตุการณ์ที่มีบิตใดบิตหนึ่งในสองบิตเกิดข้อผิดพลาด
ความน่าจะเป็น **1.0** ใช้กับเหตุการณ์ที่ทั้งสองบิตเกิดข้อผิดพลาด

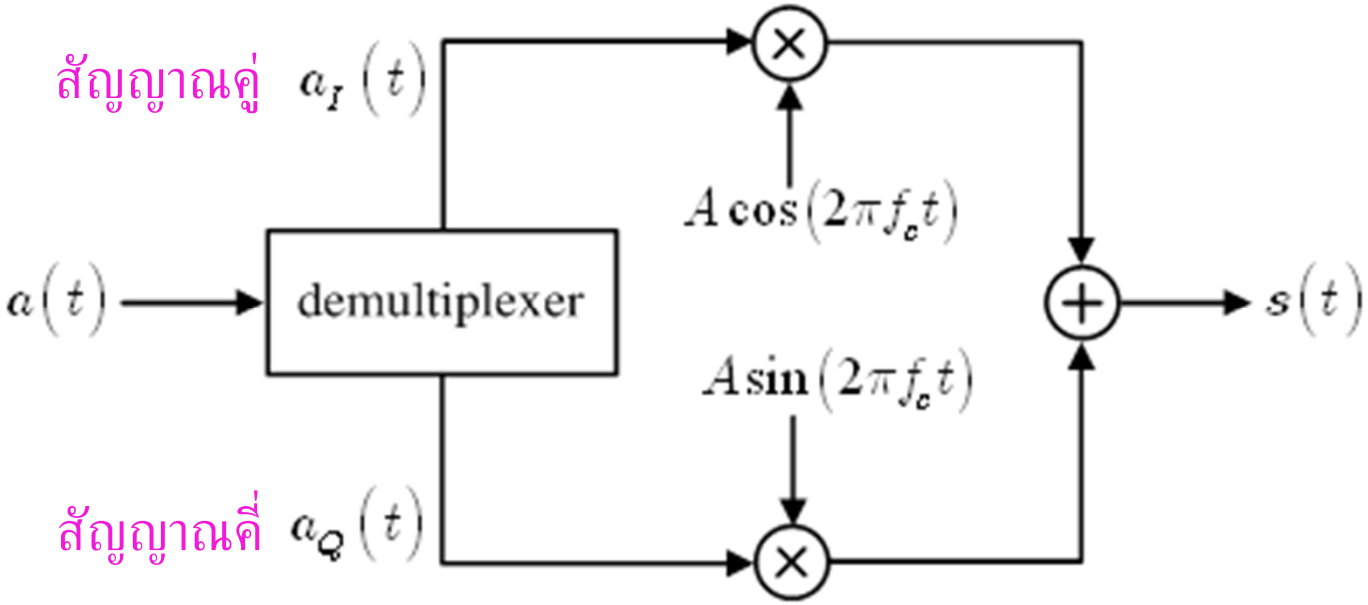
- วิธีการกำหนดบิตให้กับแต่ละสัญลักษณ์หรือ**การจับคู่**ความน่าจะเป็น {0.5, 1, 0.5} กับความน่าจะเป็น $\{\Pr[m_2 \mid m_1], \Pr[m_3 \mid m_1], \Pr[m_4 \mid m_1]\}$ มีผลต่อความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิตของระบบ
- **ในทางปฏิบัติ** $\Rightarrow$ ควรกำหนดความน่าจะเป็น 1.0 ให้กับ $\Pr[m_3 \mid m_1]$ เพื่อให้ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิตของทั้งระบบมีค่าน้อยสุด
  - สัญญาณที่มีบิตต่างกันทั้งสองบิต $\Rightarrow$ ควรถูกแยกให้ห่างกันด้วยระยะทางยุคลิดมากสุด
  - สัญญาณที่อยู่ใกล้กันมากสุด $\Rightarrow$ ควรมีบิตที่ต่างกันเพียงบิตเดียว
  - การจับคู่ลักษณะนี้เรียกว่า**การจับคู่แบบเกรย์** (Gray mapping)
- พลังงานของแต่ละสัญลักษณ์ (สองบิต) ในระบบ QPSK มีค่าเท่ากับ $E_s = A^2 T_s / 2$ จูล
- **พลังงานเฉลี่ยต่อบิต**มีค่าเท่ากับ $E_b = E_s / 2$ จูล
- แทนค่า $E_s = 2E_b$ จะได้ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิต

$$P_{b,\text{QPSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- ระบบ QPSK ที่ใช้การจับคู่แบบเกรย์มี $P_{b,\text{QPSK}} = P_{b,\text{BPSK}}$ **แต่**มี R_b มากกว่าสองเท่า (ใช้แบนด์วิดท์เท่ากัน)
- ถ้าให้ระบบ QPSK และ BPSK มี P_b และ R_b เท่ากัน $\Rightarrow$ ระบบ QPSK ใช้แบนด์วิดท์น้อยกว่าระบบ BPSK สองเท่า

การกล้ำสัญญาณแบบ QPSK แบบควอเดรเจอร์

- ระบบ QPSK สามารถสร้างให้อยู่ใน quadrature QPSK system ได้



- แต่ละบิตในสัญญาณ $a_I(t)$ และ $a_Q(t)$ มีระยะเวลาห่างกัน $T_s = 2T_b$ วินาที
- สัญญาณที่ส่ง $s(t) = a_I(t)A\cos(2\pi f_c t) + a_Q(t)A\sin(2\pi f_c t)$

- หรือจัดรูปได้เป็น

$$s(t)=\sqrt{a_I^2(t)+a_Q^2(t)}A\cos\left(2\pi f_c t-\tan^{-1}\left(\frac{a_Q(t)}{a_I(t)}\right)\right)=\sqrt{2}A\cos\left(2\pi f_c t-\theta(t)\right)$$

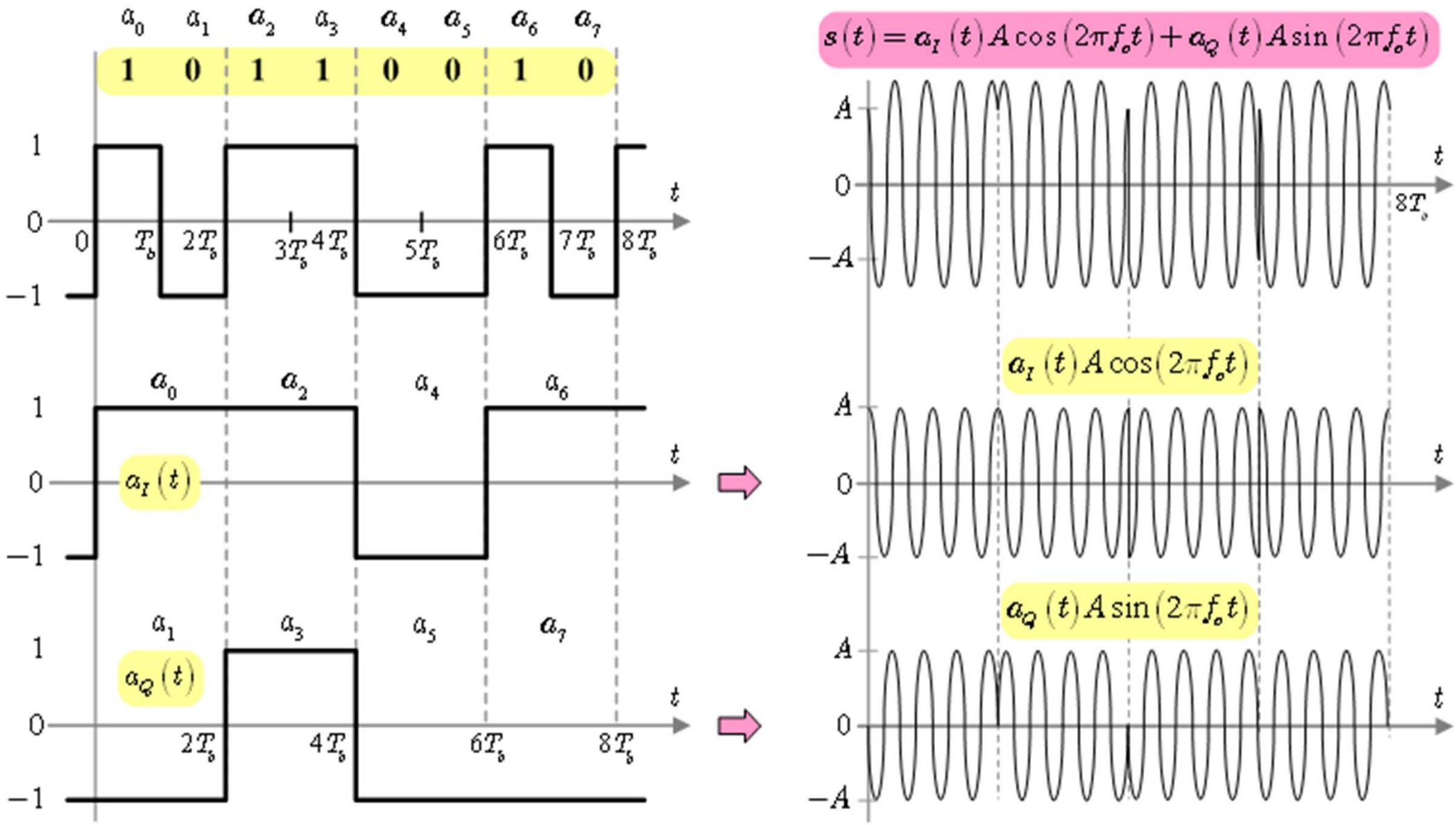
เมื่อ $\sqrt{a_I^2(t)+a_Q^2(t)}=\sqrt{2}$ และมุมเฟส $\theta(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$\theta(t)=\begin{cases}\pi/4, & \text{if } a_I=+1 \text{ and } a_Q=+1 \ \ (\text{"11" is sent})\\ -\pi/4, & \text{if } a_I=+1 \text{ and } a_Q=-1 \ \ (\text{"10" is sent})\\ 3\pi/4, & \text{if } a_I=-1 \text{ and } a_Q=+1 \ \ (\text{"01" is sent})\\ -3\pi/4, & \text{if } a_I=-1 \text{ and } a_Q=-1 \ \ (\text{"00" is sent})\end{cases}$$

- ใช้ฟังก์ชันฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ 2 ฟังก์ชัน

$$E_s=\int_0^{T_s}s^2(t)dt=A^2T_s$$

$$\phi_1(t)=\frac{\sqrt{2}A\cos(2\pi f_c t)}{\sqrt{E_s}}=\sqrt{\frac{2}{T_s}}\cos(2\pi f_c t) \qquad \phi_2(t)=\frac{\sqrt{2}A\sin(2\pi f_c t)}{\sqrt{E_s}}=\sqrt{\frac{2}{T_s}}\sin(2\pi f_c t)$$


a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7
1 0 1 1 0 0 1 0
$s(t) = a_I(t) A\cos(2\pi f_o t) + a_Q(t) A\sin(2\pi f_o t)$
$a_I(t)$
$a_Q(t)$
$a_I(t) A\cos(2\pi f_o t)$
$a_Q(t) A\sin(2\pi f_o t)$
T_b $2T_b$ $3T_b$ $4T_b$ $5T_b$ $6T_b$ $7T_b$ $8T_b$
A
0
−A
t

- วงจรภาครับเหมาะที่สุด ⇒ สัญญาณ $a_I(t)$ และ $a_Q(t)$ ประมวลผลแยกกันได้โดยอิสระ
- พิจารณาได้ว่าสัญญาณ QPSK ประกอบด้วยสัญญาณ BPSK สองสัญญาณที่เป็นอิสระต่อกัน
- ถ้าให้ทุกสัญญาณมีความน่าจะเป็นเท่ากัน ⇒ ความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดบิต

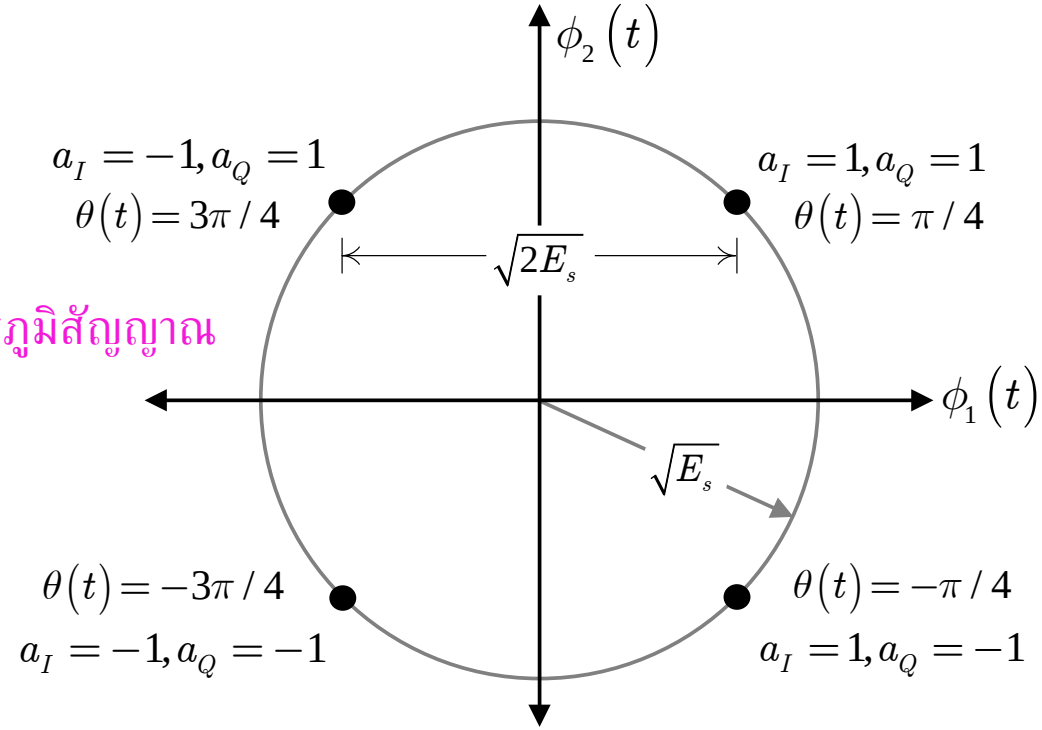
$$P_{b,\mathrm{QPSK}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

ความหนาแน่นสเปกตรัมกำลัง (PSD)

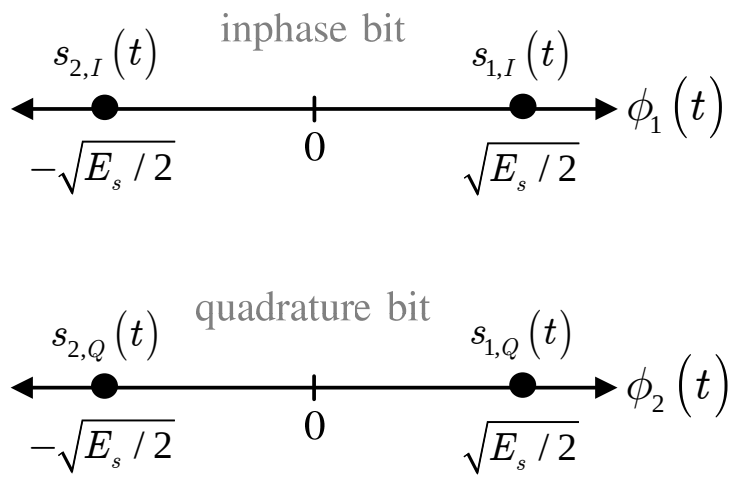
- ❑ สัญญาณ QPSK เป็นผลรวมของสัญญาณ BPSK สองสัญญาณที่ไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกัน (บิตคู่และบิตคี่เป็นอิสระเชิงสถิติ)
- ❑ PSD ของสัญญาณ QPSK มีค่าเป็นสองเท่าของ PSD ของสัญญาณ BPSK

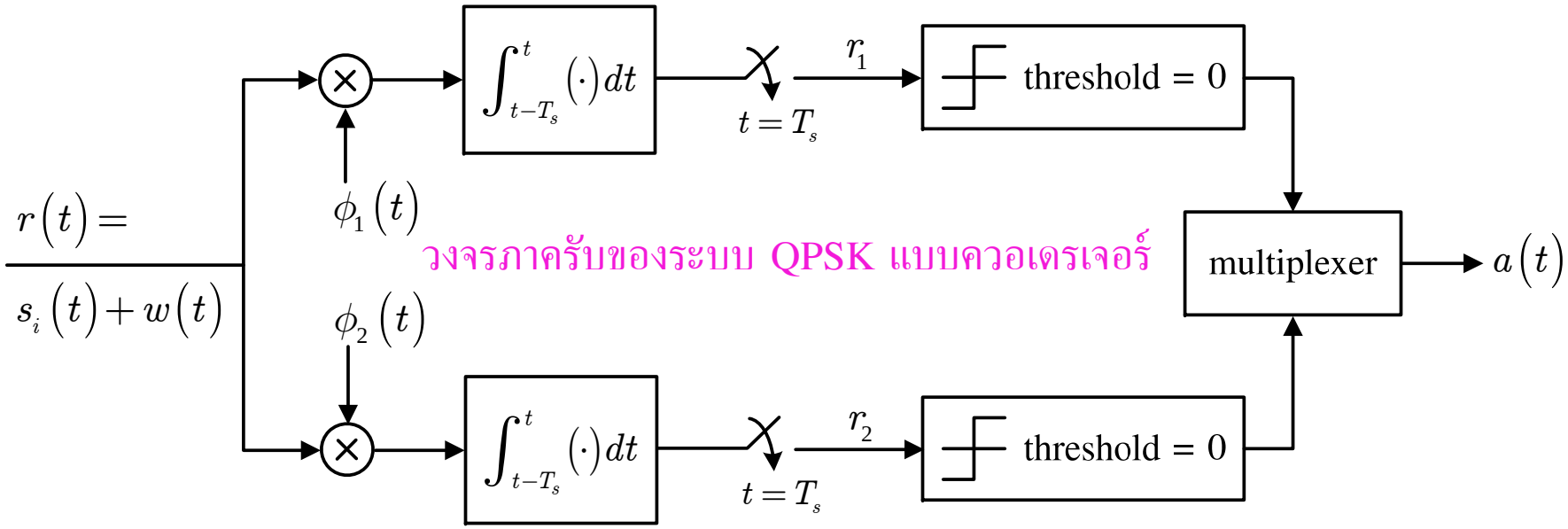
$$G_{\mathrm{QPSK}}(f) = \frac{A^2}{2}\left[T_s \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_s (f - f_c)\right) + T_s \operatorname{sinc}^2\left(\pi T_s (f + f_c)\right)\right]$$

ปริภูมิสัญญาณ



ปริภูมิสัญญาณของระบบ BPSK สองแบบ





วงจรภาครับของระบบ QPSK แบบควอเดรเจอร์

Example 4

ถ้าให้ระบบส่งสัญญาณ $s_i(t) = A\sin(2\pi f_c t + \omega_i)$ สำหรับ $i \in \{1,2,3,4\}$ เมื่อ $A = \sqrt{2E_s / T_s}$, E_s คือพลังงานเฉลี่ยของสัญญาณ, T_s คือคาบเวลาของสัญลักษณ์, มุมเฟส ω_1 , ω_2 , ω_3 และ ω_4 มีค่าเท่ากับ θ , 5θ , -5θ และ $-\theta$ ตามลำดับ, และ $\theta = \pi / 6$ เรเดียน ถ้าสัญญาณที่วงจรภาครับเหมาะที่สุด (แบบโคฮีเรนต์) ได้รับคือ $r(t) = s_i(t) + w(t)$ โดยที่ $w(t)$ คือสัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และ PSD แบบสองด้านเท่ากับ $N_0 / 2$

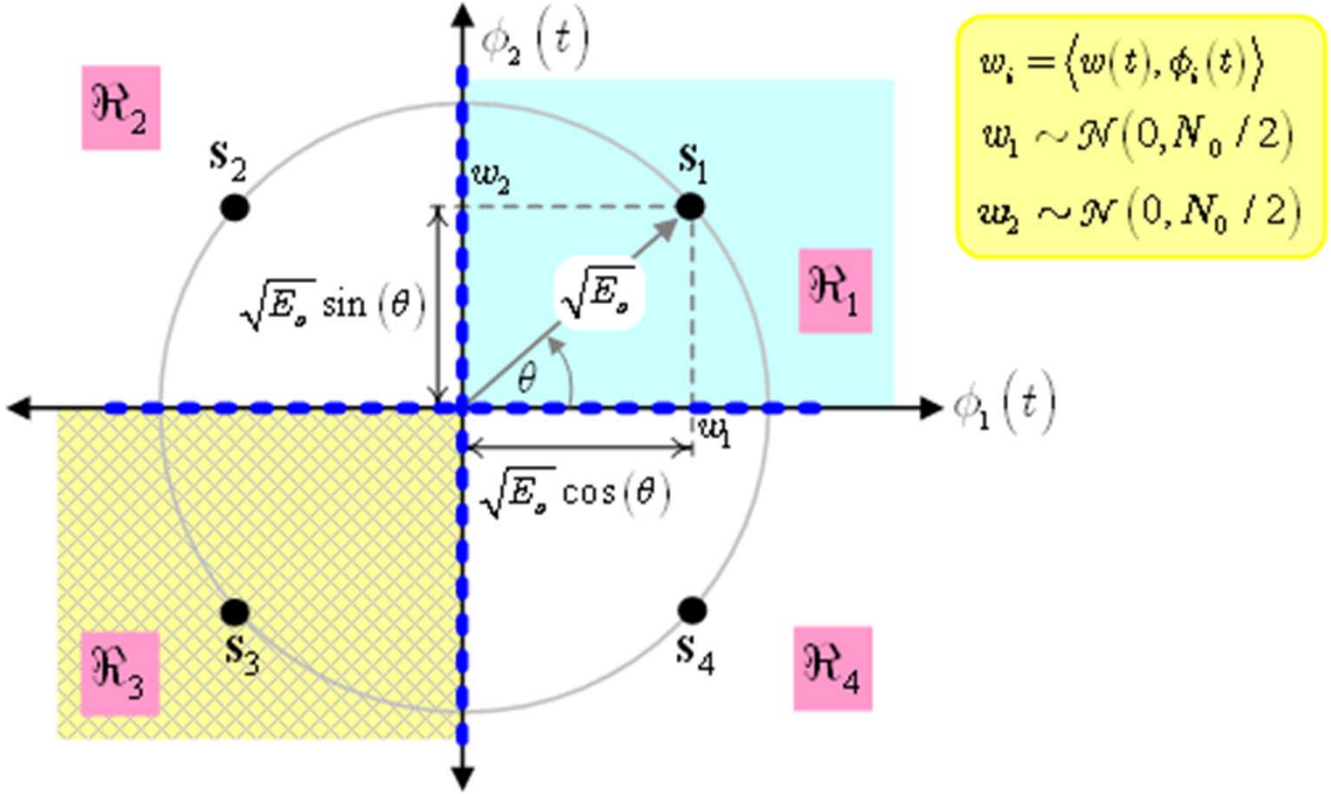
ก) จงวาดปริภูมิสัญญาณ พร้อมทั้งแสดงบริเวณการตัดสินใจ

ข) จงหาค่าความน่าจะเป็นของข้อผิดพลาดสัญลักษณ์ของระบบ

ค) จงหาความน่าจะเป็นที่วงจรภาคส่งส่งสัญญาณ $s_1(t)$ แต่วงจรภาครับจะตัดสินใจว่าเป็นสัญญาณ $s_4(t)$ เมื่อ $E_s / N_0 = 6$

วิธีทำ

ก) ปริภูมิสัญญาณและบริเวณการตัดสินใจ



ข) ถ้าให้ P_c คือความน่าจะเป็นที่วงจรภาครับตัดสินใจถูกต้อง และ $\Pr[\mathbf{r} \in \Re_1 \mid \mathbf{s}_1]$ คือความน่าจะเป็นที่สัญญาณที่ได้รับ $\mathbf{r}$ จะอยู่ในบริเวณ $\Re_1$ เมื่อวงจรภาคส่งส่ง $\mathbf{s}_1$ เนื่องจากปริภูมิสัญญาณมีความสมมาตร ทำให้ได้ว่า

$$P_c = \Pr\left[\mathbf{r} \in \Re_1 \mid \mathbf{s}_1\right] = \Pr\left[w_1 < \sqrt{E_s}\cos(\theta) \text{ and } w_2 < \sqrt{E_s}\sin(\theta)\right]$$

$$= \left\{1 - \Pr\left[w_1 > \sqrt{E_s}\cos(\theta)\right]\right\} \times \left\{1 - \Pr\left[w_2 > \sqrt{E_s}\sin(\theta)\right]\right\}$$

$$= \left\{1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\cos(\theta)\right)\right\} \times \left\{1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin(\theta)\right)\right\} = 0.9571$$

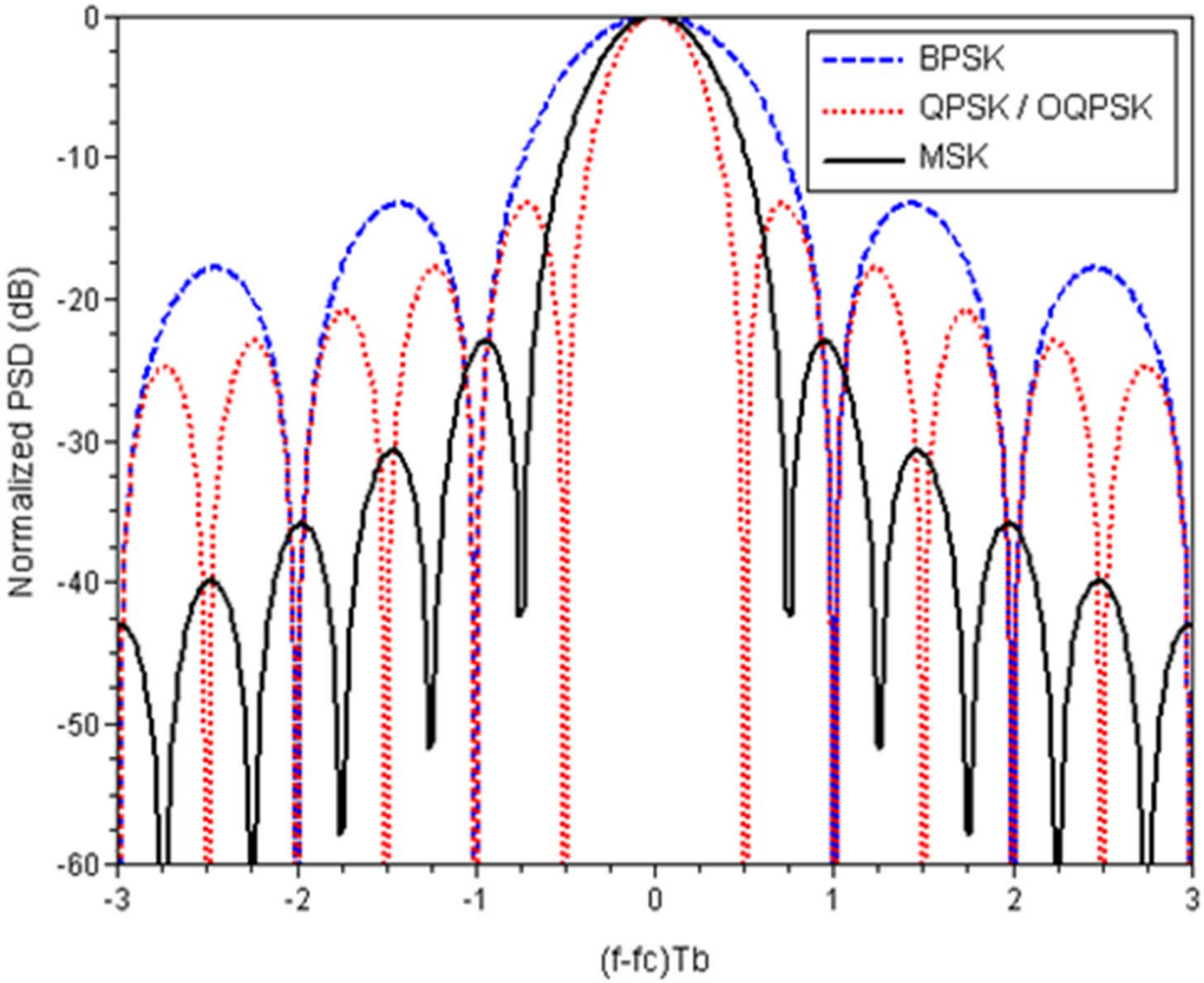
เมื่อ $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ และ $\sin(\pi/6) = 1/2$ ดังนั้น $P_s = 1 - P_c = 1 - 0.9571 = 0.0429$

ค) ความน่าจะเป็นที่วงจรภาคส่งส่ง $s_1(t)$ แต่วงจรภาครับจะตัดสินใจว่าเป็น $s_4(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$P_{s,1\to4} = \Pr\left[\mathbf{r} \in \Re_4 \mid \mathbf{s}_1\right] = \Pr\left[w_1 < \sqrt{E_s}\cos(\theta) \text{ and } w_2 > \sqrt{E_s}\sin(\theta)\right]$$

$$= \left\{1 - \Pr\left[w_1 > \sqrt{E_s}\cos(\theta)\right]\right\} \times \Pr\left[w_2 > \sqrt{E_s}\sin(\theta)\right]$$

$$= \left\{1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\cos(\theta)\right)\right\} \times Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin(\theta)\right) = \left\{1 - Q\left(\sqrt{9}\right)\right\} Q\left(\sqrt{3}\right) = 0.04158$$



- ระบบ BPSK ต้องการแบนด์วิดท์มากกว่าระบบ QPSK/OQPSK และ MSK
- ระบบ MSK มีโลบหลักกว้างกว่า แต่มีโลบด้านข้างน้อยกว่าระบบ QPSK/OQPSK
- ถ้าพิจารณาแบนด์วิดท์แบบศูนย์ถึงศูนย์จะได้ว่าระบบ BPSK มี**ประสิทธิภาพแบนด์วิดท์**เป็นครึ่งหนึ่งของระบบ QPSK/OQPSK

❑ สัญญาณ MSK มีเอนเวโลปคงที่ มีเฟสที่ต่อเนื่อง มีโลบด้านข้างในระดับต่ำ (เมื่อเทียบกับ BPSK และ QPSK/OQPSK) และสามารถแยกสัญญาณได้ง่ายเหมือนระบบ FSK ⇒ นิยมใช้งานมากโดยเฉพาะในระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่

*** *END*