การสื่อสารดิจิทัล

การกล้ำรหัสพัลส์ (3)

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

http://home.npru.ac.th/piya

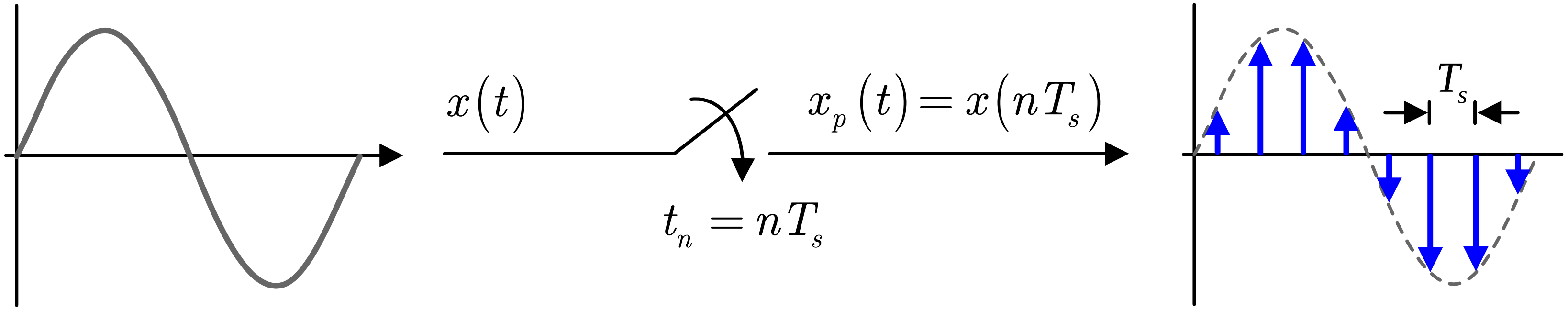
Outline

- การชักตัวอย่าง
  - ทฤษฎีบทการชักตัวอย่างของไนควิสต์
  - กระบวนการชักตัวอย่าง / การชักตัวอย่างด้วยวงจรกรองค้างอันดับศูนย์
  - กระบวนการสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมา
  - ความผิดเพี้ยนภาพ
- การแจงหน่วย
  - วงจรแจงหน่วย เอกรูป / เหมาะที่สุด / ไม่เชิงเส้น / เชิงอนุพันธ์
  - การกล้ำรหัสพัลส์เชิงอนุพันธ์
  - การกล้ำสัญญาณเดลตา
- การเข้ารหัสพีซีเอ็ม

บทนำ

- ระบบสื่อสารถูกออกแบบมาเพื่อใช้ส่งข่าวสารจากแหล่งต้นทางผ่านช่องสัญญาณไปยังแหล่งปลายทาง โดยข่าวสารที่ส่งเป็นได้ทั้ง
  - ข่าวสารที่เป็นข้อความ (textual information)
  - ข่าวสารแอนะล็อก (analog information)
  - ข่าวสารดิจิทัล (digital information)
- ระบบสื่อสารดิจิทัลจะถูกออกแบบมาเพื่อใช้ส่ง**เฉพาะ**ข่าวสารดิจิทัล
  - ข่าวสารที่เป็นข้อความ ⇒ เข้ารหัส ⇒ ข่าวสารดิจิทัล
  - ข่าวสารแอนะล็อก ⇒ ข่าวสารดิจิทัล โดยผ่าน**การกล้ำรหัสพัลส์** (PCM)
    - การชักตัวอย่าง (sampling)
    - การแจงหน่วย (quantization)
    - การเข้ารหัสพีซีเอ็ม (PCM encoding)

การชักตัวอย่าง



$$x_p(t) = x(t)\big|_{t=nT_s} = x(nT_s)$$

T_s = คาบการชักตัวอย่าง

$x(nT_s)$ = **แซมเปิล** (sample)

$\{x(nT_s)\} = \{x(0), x(T_s), x(2T_s), \ldots, x(nT_s)\}$ = **ลำดับข้อมูล** (data sequence)

- ต้องการให้ลำดับข้อมูล $x(nT_s)$ เป็น**ตัวแทนหนึ่งเดียว**ของสัญญาณ $x(t)$ เพื่อจะได้สามารถนำลำดับข้อมูล $x(nT_s)$ มาสร้างสัญญาณ $x(t)$ ให้กลับคืนมาเหมือนเดิมได้อย่างสมบูรณ์
  - เป็นจริงก็ต่อเมื่อ กระบวนการชักตัวอย่างสอดคล้องกับทฤษฎีบทการชักตัวอย่างของไนควิสต์ (Nyquist's sampling theorem)

ทฤษฎีบทการชักตัวอย่างของไนควิสต์

สัญญาณ $x(t)$ = **สัญญาณที่มีแถบความถี่จำกัด** (band-limited signal) ก็ต่อเมื่อ

$$X(f)=0\,,\quad \text{สำหรับ } |f|<W$$

เมื่อ W คือความถี่สูงสุดของสัญญาณ $x(t)$ มีหน่วยเป็นเฮิรตซ์

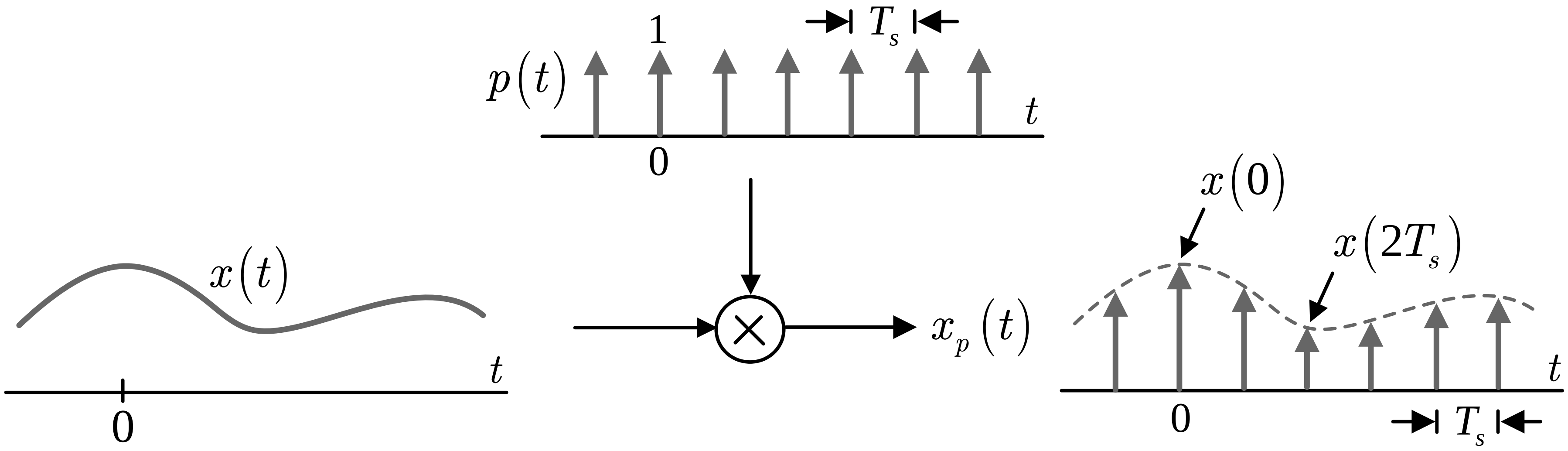
ถ้าต้องการให้ข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการชักตัวอย่างเป็นตัวแทนหนึ่งเดียวของสัญญาณแอนะล็อก ก็ต้องชักตัวอย่างสัญญาณ $x(t)$ ด้วย**ความถี่การชักตัวอย่าง**

$$f_s \geq 2W\,,\quad \text{เมื่อ } f_s = 1/T_s$$

ความถี่การชักตัวอย่างต่ำสุด $f_s = 2W$ จะเรียกว่า**อัตราไนควิสต์** (Nyquist rate) ถ้าทำการชักตัวอย่างสัญญาณ $x(t)$ ด้วยความถี่ $f_s < 2W$ ก็จะก่อให้เกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า**ความผิดเพี้ยนภาพ** (aliasing) ซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ต้องการในทุกงานประยุกต์

กระบวนการชักตัวอย่าง

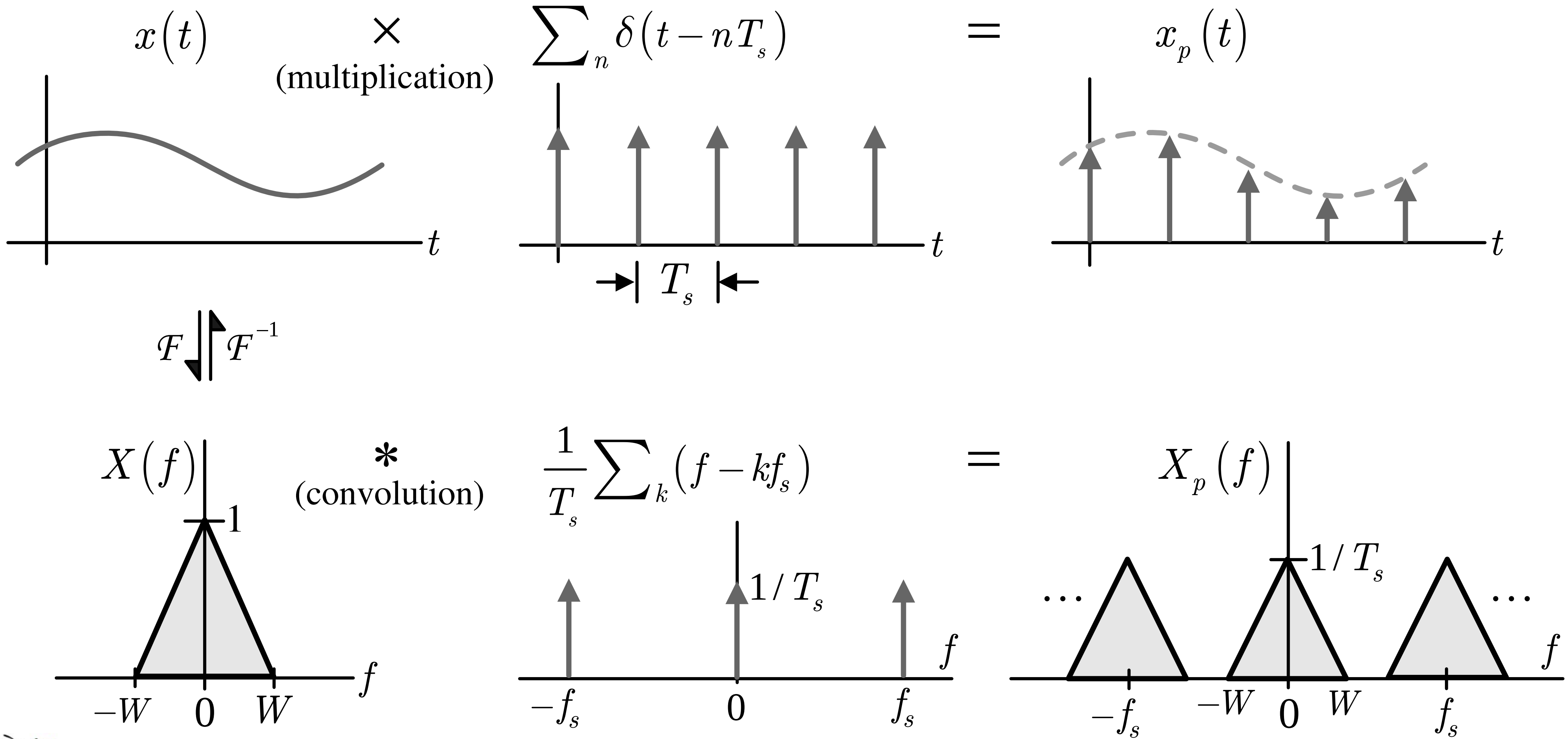
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\Leftrightarrow P(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-kf_s)$$



$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

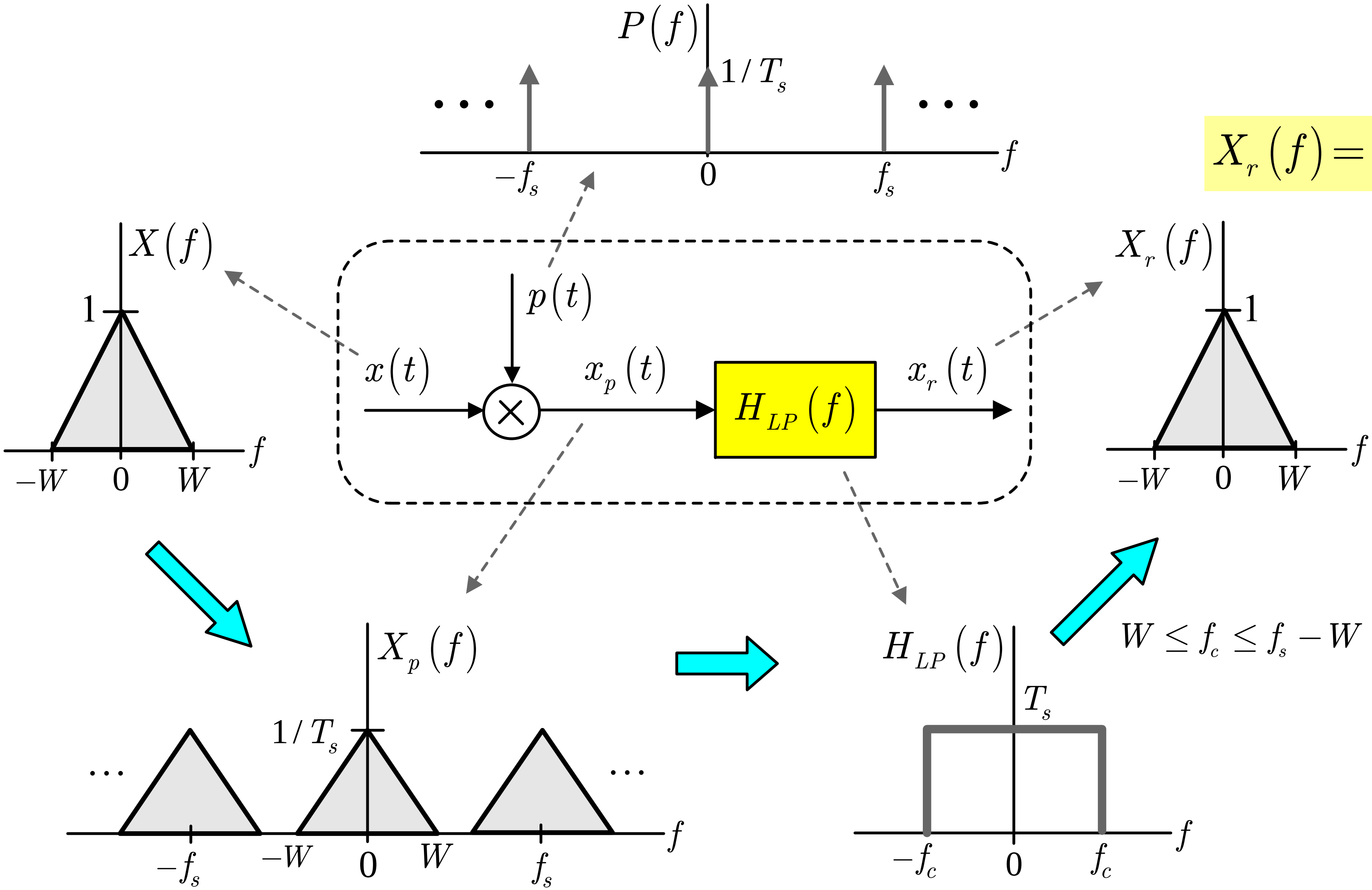
$$X_p(f) = \mathcal{F}\left[x_p(t)\right] = \mathcal{F}\left[x(t)p(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\theta)P(f-\theta)\,d\theta = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-kf_s)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) \Leftrightarrow X_p(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f-kf_s)$$

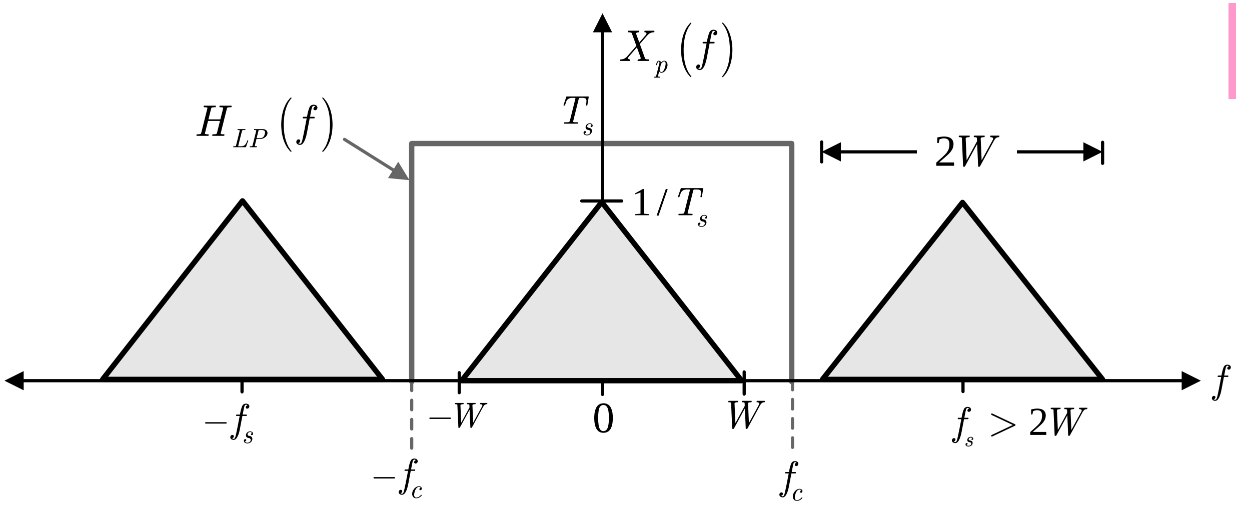


❑ การสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมาจากข้อมูลแซมเปิล

$$X_r(f) = X(f)$$



$$h_{LP}(t) = \frac{T_s \sin(2\pi f_c t)}{\pi t} = 2 f_c T_s \mathrm{sinc}(2\pi f_c t) \quad \Leftrightarrow \quad H_{LP}(f) = \begin{cases} T_s, & |f| \le f_c \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



$f_s \geq 2W$

$$X_r(f) = X(f) = X_p(f) H_{LP}(f)$$

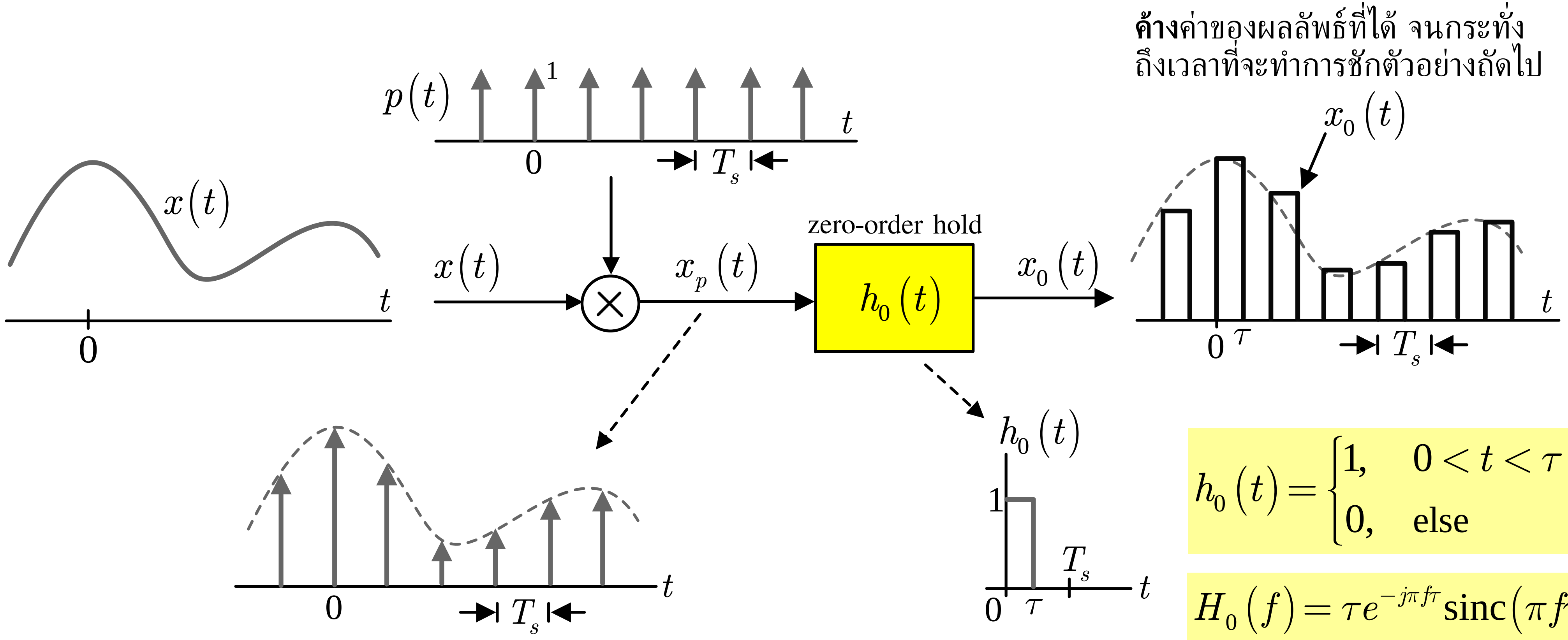
$$\mathcal{F}^{-1}\left[X_r(f)\right] = x_r(t) = x_p(t) * h_{LP}(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right] * \left[2f_c T_s \mathrm{sinc}(2\pi f_c t)\right]$$

$$= 2f_c T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\mathrm{sinc}\left(2\pi f_c (t - nT_s)\right)$$

สูตรการประมาณค่าในช่วงของไนควิสต์และแชนนอน
(Nyquist-Shannon interpolation formula)

การชักตัวอย่างด้วยวงจรกรองค้างอันดับศูนย์

- สัญญาณ $x_p(t)$ ที่ได้จากการชักตัวอย่างด้วยขบวนสัญญาณอิมพัลส์ไดแร็กเดลตาจะมีลักษณะเป็นสัญญาณพัลส์ที่มีความกว้างของสัญญาณแคบและมีแอมพลิจูดสูงมาก $\Rightarrow$ การสร้างและส่งสัญญาณ $x_p(t)$ ไปยังปลายทาง**ทำได้ยาก**
  - **แก้ไขโดย** $\Rightarrow$ ทำให้อยู่ในรูปของ**สัญญาณค้างอันดับศูนย์** (zero-order hold signal)

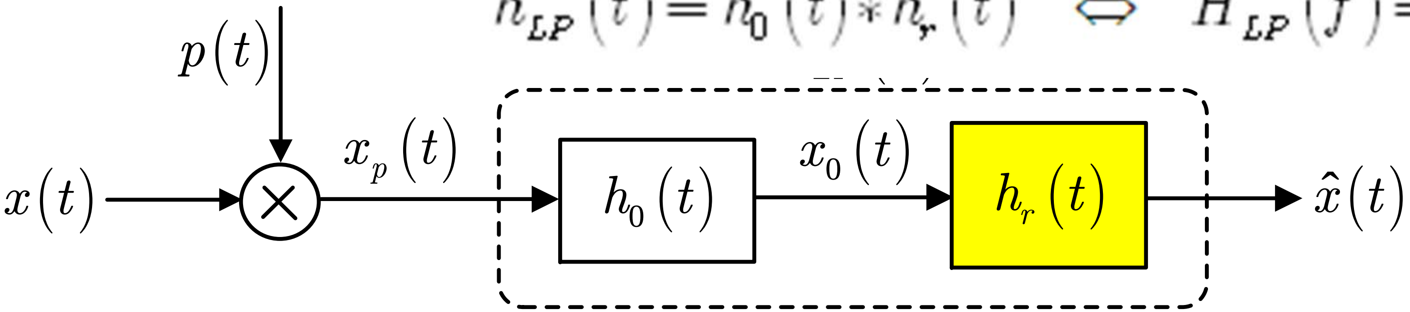


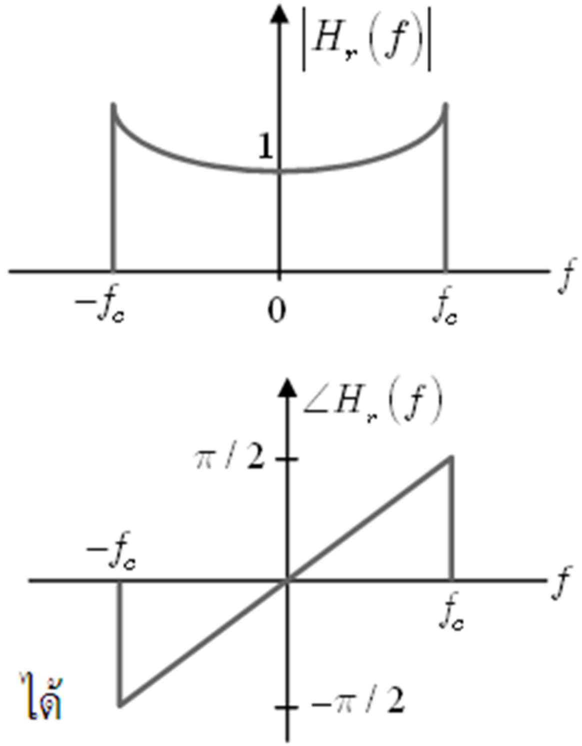
$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$H_0(f) = \tau e^{-j\pi f\tau}\,\mathrm{sinc}(\pi f\tau)$$

❑ การสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมา

$$h_{LP}(t) = h_0(t) * h_r(t) \quad \Leftrightarrow \quad H_{LP}(f) = H_0(f)H_r(f)$$



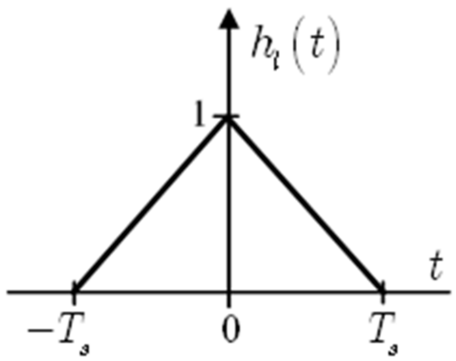


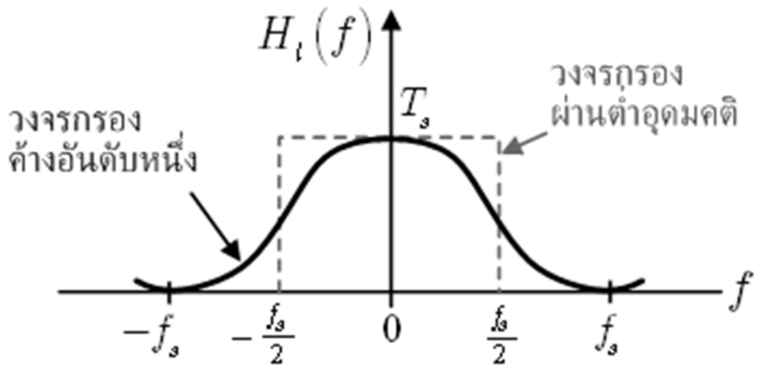
$$H_r(f) = \frac{H_{LP}(f)}{H_0(f)} = \frac{T_s}{\tau e^{-j\pi f\tau}\,\mathrm{sinc}(\pi f\tau)} = \frac{T_s e^{j\pi f\tau}}{\tau\,\mathrm{sinc}(\pi f\tau)}$$

ในหลายกรณีสัญญาณค้างอันดับศูนย์ $x_0(t)$ สามารถนำมาใช้แทนสัญญาณต้นฉบับ $x(t)$ ได้ โดยไม่ต้องนำไปผ่านวงจรกรอง $h_r(t)$ ถ้า f_s มีค่าสูงเพียงพอ หรืออาจใช้วิธีการประมาณค่าในช่วง (interpolation) ระหว่างข้อมูลแซมเปิลก็ได้

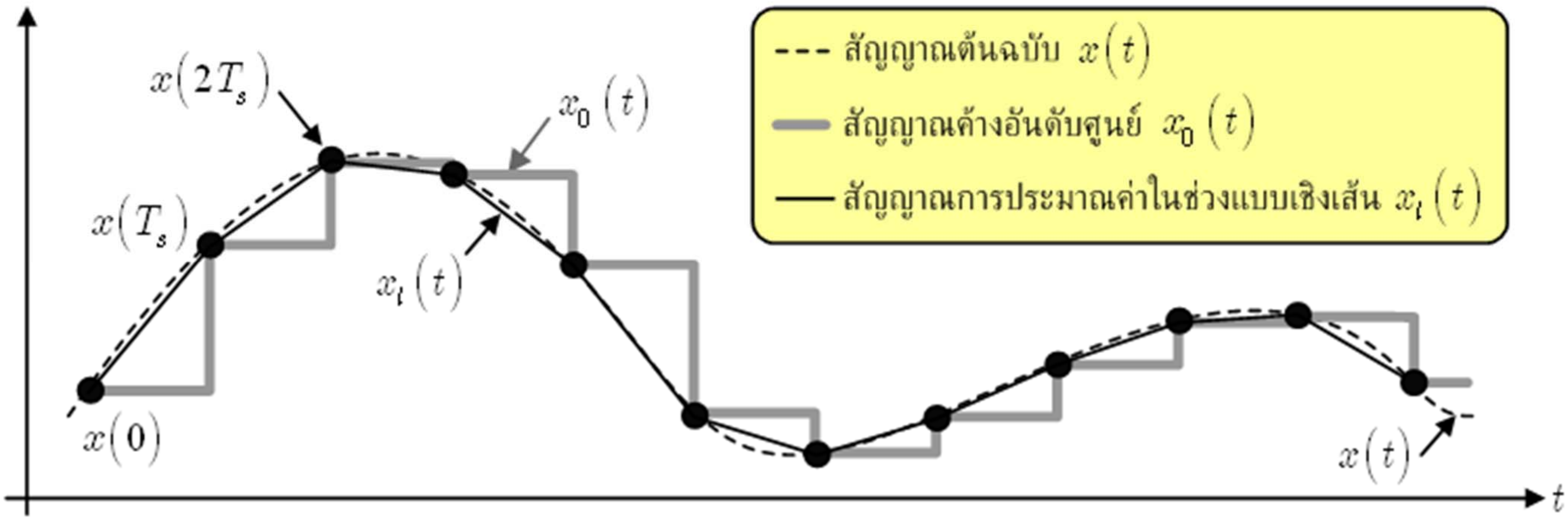
❑ วงจรกรองค้างอันดับหนึ่ง (1st-order hold)

$$h_l(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T_s}, & |t| \le T_s \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

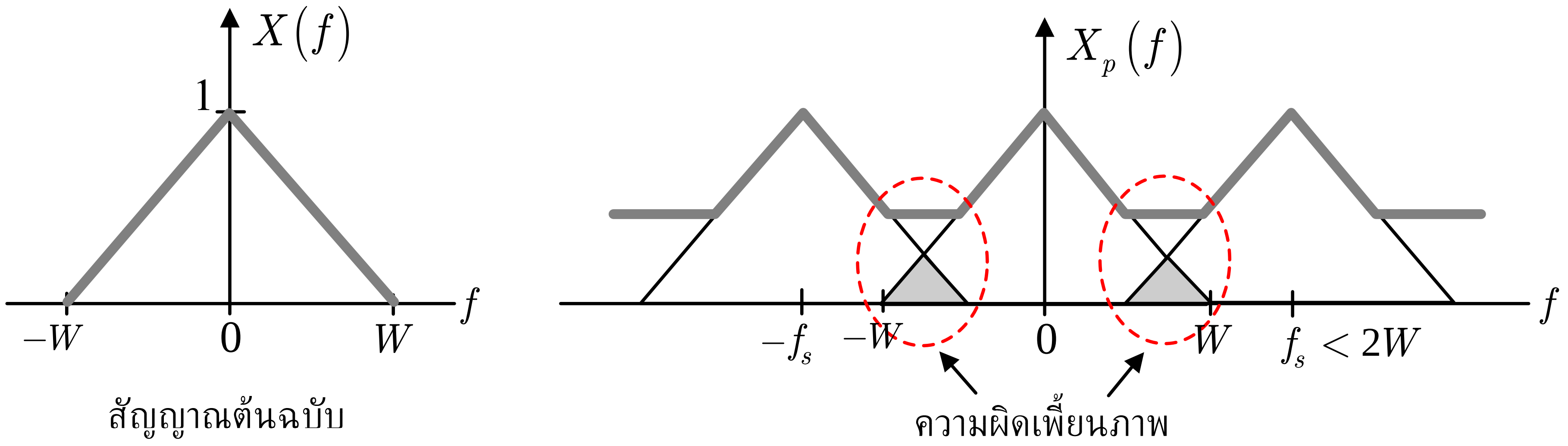




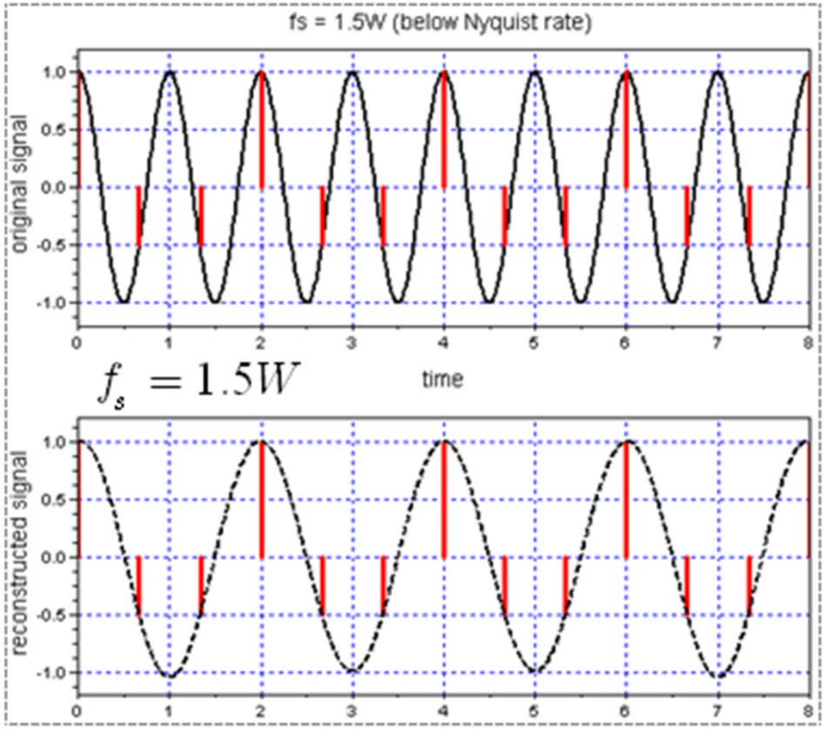
$$H_l(f) = \frac{1}{T_s}\left[\frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f}\right]^2 = T_s \operatorname{sinc}^2(\pi f T_s)$$

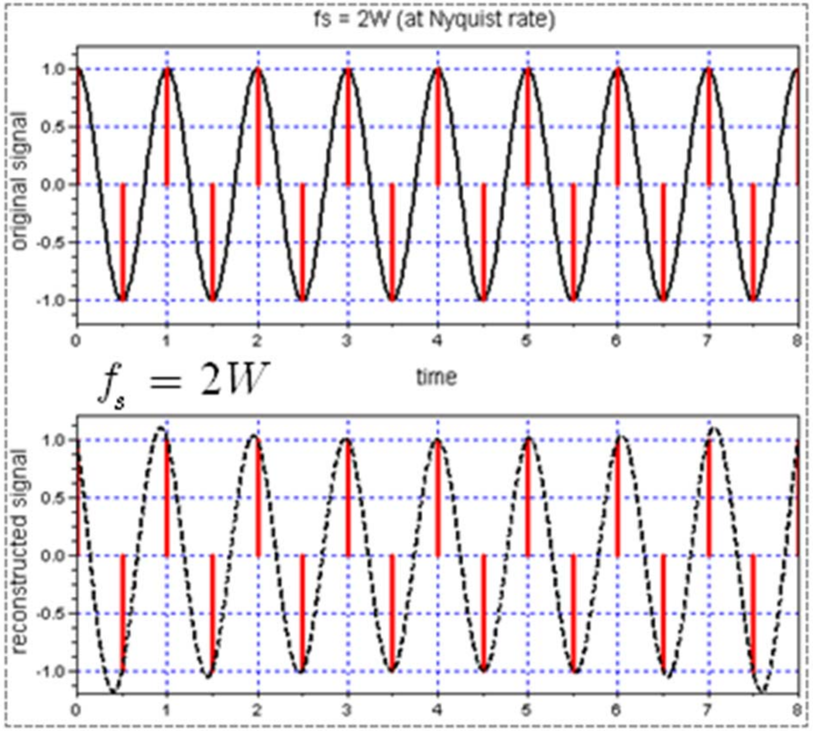


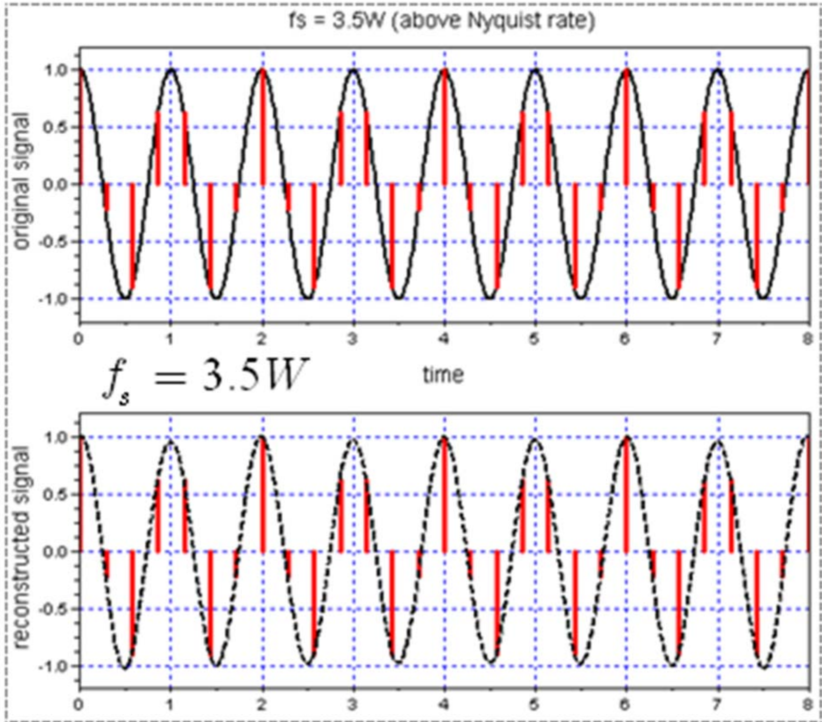
ความผิดเพี้ยนภาพ $f_s < 2W$



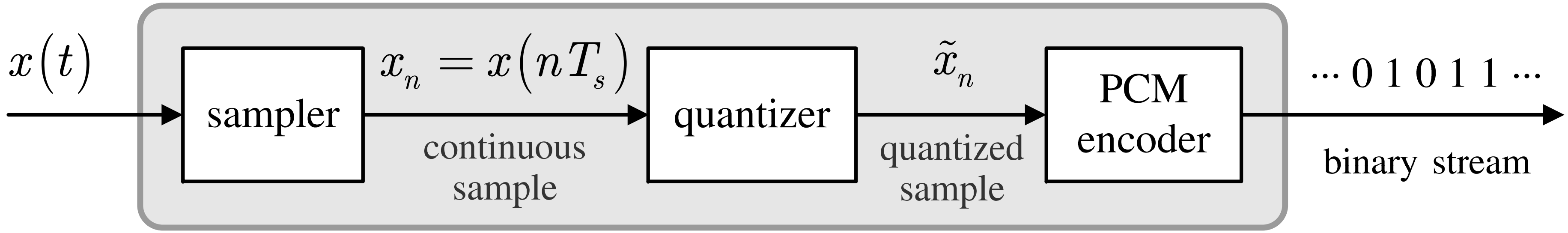
- เมื่อสร้างสัญญาณแอนะล็อกให้กลับคืนมาจากข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการชักตัวอย่างด้วยความถี่ $f_s < 2W$
  - สัญญาณแอนะล็อกที่ได้จะมีรูปร่างผิดเพี้ยนไปจากสัญญาณต้นฉบับ เนื่องจากสเปกตรัมความถี่ของสัญญาณที่สร้างกลับคืนมามีรูปร่างผิดไปจากสเปกตรัมความถี่ของสัญญาณต้นฉบับ


fs = 1.5W (below Nyquist rate)
original signal
time
$f_s = 1.5W$
reconstructed signal


fs = 2W (at Nyquist rate)
original signal
time
$f_s = 2W$
reconstructed signal


fs = 3.5W (above Nyquist rate)
original signal
time
$f_s = 3.5W$
reconstructed signal

การแจงหน่วย (Quantization)



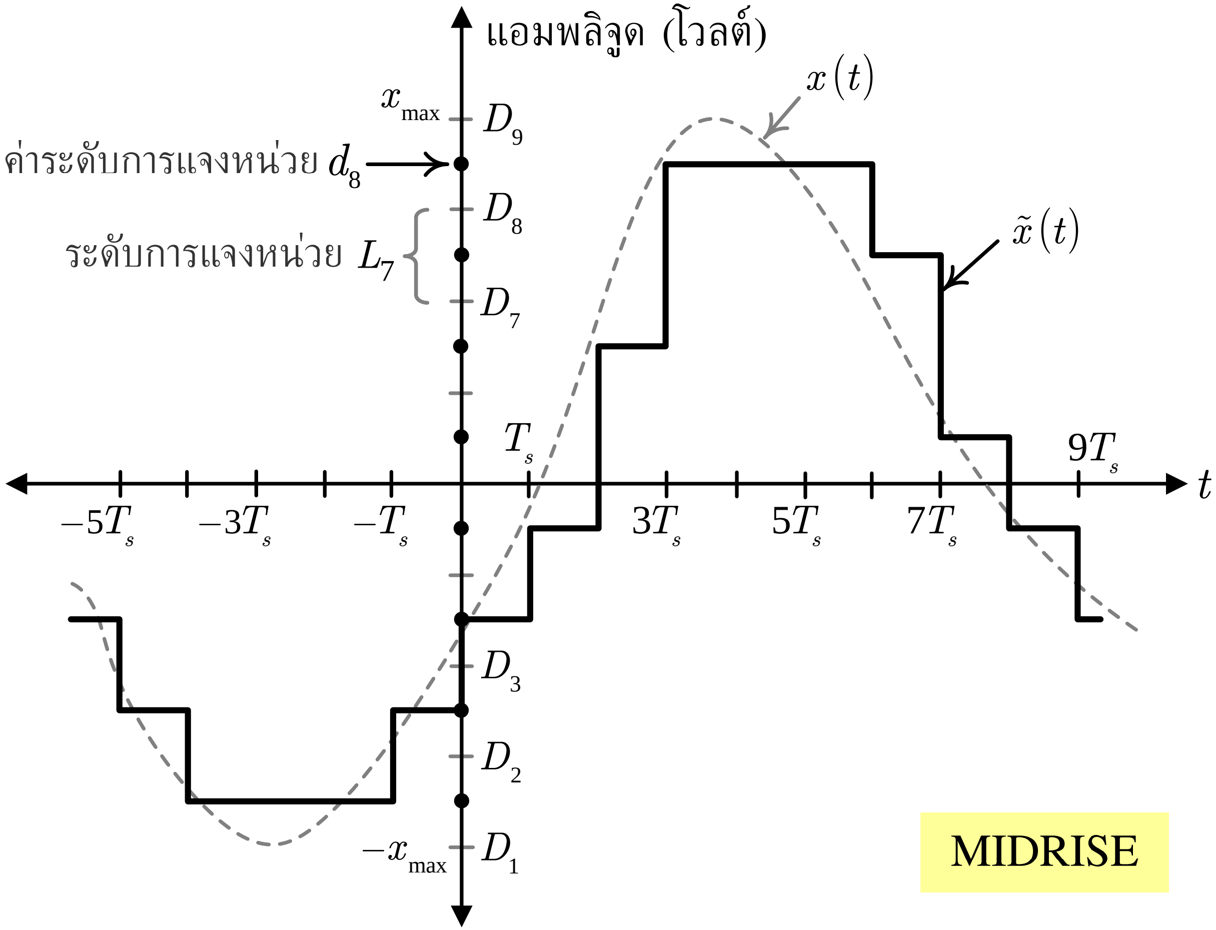
- สมมุติว่ากระบวนการแจงหน่วยไม่มีหน่วยความจำ (memoryless) และข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการแจงหน่วยแต่ละตัวเป็นอิสระต่อกัน

- กำหนดให้สัญญาณ $x(t)$ มีแอมพลิจูดอยู่ภายในช่วง $[-x_{\max}, x_{\max}]$ โวลต์
- ถ้าวงจรแจงหน่วยใช้ระดับการแจงหน่วย เท่ากับ L ระดับ โดยที่ L_i สำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, L\}$
- จะอยู่ระหว่างค่าขีดเริ่มเปลี่ยน D_i และ D_{i+1} (นั่นคือ $D_i < L_i \le D_{i+1}$) ซึ่งเรียกว่าขนาดขั้นบันได (step size) Δ

วงจรแจงหน่วยจะแทนข้อมูลแซมเปิล $x \in [D_i, D_{i+1}]$ ให้มีค่าเท่ากับค่าระดับการแจงหน่วย d_i และผลลัพธ์ที่ได้จะเรียกว่าแซมเปิลที่ถูกแจงหน่วยหรือ $\tilde{x}$

วงจรแจงหน่วยเอกรูป

$d_i = \left(D_i + D_{i+1}\right) / 2$



- วงจรแจงหน่วยที่มีขนาดขั้นบันได Δ ของแต่ละระดับการแจงหน่วย L_i เท่ากัน

ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และมี pdf เท่ากับ $p_X(x)$

กำลังเฉลี่ยของ x = ความแปรปรวนของ x $\Rightarrow$ $\sigma_X^2 = E\left[x^2\right] = \int_{-x_{max}}^{x_{max}} x^2 p_X(x)\,dx$

- วงจรแจงหน่วยเอกรูปแบบ "midrise" ที่มีระดับการแจงหน่วย L ระดับ $\Rightarrow \Delta = 2x_{max} / L$
- ข้อมูลเอาต์พุตของวงจรแจงหน่วยเอกรูป $\Rightarrow \tilde{x} = x + q$ เมื่อ q คือข้อผิดพลาดการแจงหน่วย
- ถ้า Δ มีขนาดเล็กเพียงพอ $\Rightarrow q$ มีลักษณะการแจกแจงเอกรูปภายใน $[-\Delta/2, \Delta/2]$ ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเท่ากับ

$$p_Q(q) = \begin{cases} 1/\Delta, & -\Delta/2 < e \le \Delta/2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

ค่าเฉลี่ย

$$m_Q = E[q] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q p_Q(q)\, dq = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{q^2}{2}\right]_{q=-\Delta/2}^{\Delta/2} = 0$$

กำลังเฉลี่ยของสัญญาณรบกวนการแจงหน่วย (quantization noise power)

$$\sigma_Q^2 = E\left[(q - m_Q)^2\right] = E\left[(q)^2\right] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2 p_Q(q)\, dq = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{q^3}{3}\right]_{q=-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{max}^2}{3L^2}$$

เนื่องจากข้อมูลเอาต์พุตของวงจรแจงหน่วย $\tilde{x}$ ต้องถูกเข้ารหัสให้อยู่ในรูปข้อมูลไบนารี ถ้าสมมุติว่าจำนวนระดับการแจงหน่วยมีค่าเท่ากับ $L = 2^m$ เมื่อ m คือจำนวนบิตที่ใช้แทนข้อมูล $\tilde{x}$ ดังนั้น แทนค่า $L = 2^m$ จะได้

$$\sigma_Q^2 = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 2^{2m}}$$

สมรรถนะของวงจรแจงหน่วย $\Rightarrow$ **ค่าอัตราส่วนกำลังเฉลี่ยของสัญญาณต่อกำลังเฉลี่ยของสัญญาณรบกวนการแจงหน่วย (SQNR**: signal-to-quantization noise ratio) ซึ่งนิยามโดย

$$\text{SQNR} = 10\log_{10}\left(\frac{\text{signal power}}{\text{quantization noise power}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Q^2}\right) \quad \text{dB}$$

แทนค่า σ_X^2 และ σ_Q^2 จะได้

$$\text{SQNR} = 4.77 + 6.02m - 20\log_{10}\left(\frac{x_{\max}}{\sigma_X}\right) \quad \text{dB}$$

Example

กำหนดให้ $x(t) = x_{\max}\sin(2\pi ft)$ เมื่อ $x_{\max}$ คือค่าคงตัว ถ้าวงจรแจงหน่วยเอกรูปใช้ข้อมูล m บิต แทนข้อมูลหนึ่งแซมเปิล จงแสดงว่า SQNR $\approx 1.76 + 6m$ มีหน่วยเป็นเดซิเบล (dB)

วิธีทำ กำลังเฉลี่ยของสัญญาณรูปไซน์ หาได้จาก

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|x_{\max}\sin(2\pi ft)\right|^2 dt = \frac{x_{\max}^2}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{2}\{1-\cos(4\pi ft)\}dt = \frac{x_{\max}^2}{2}$$

เนื่องจากสัญญาณ $x(t)\in[-x_{\max}, x_{\max}]$ และวงจรแจงหน่วยใช้ $L = 2^m$ ระดับ จะได้ว่า $\sigma_Q^2 = x_{\max}^2/(3\times 2^{2m})$ ดังนั้น SQNR มีค่าเท่ากับ

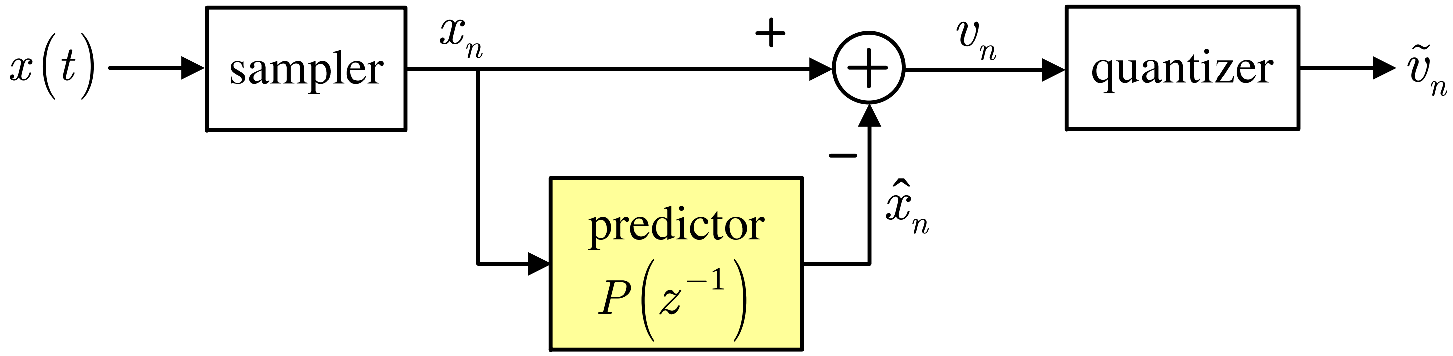
$$\text{SQNR} = 10\log_{10}\left(\frac{x_{\max}^2/2}{x_{\max}^2/(3\times 2^{2m})}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{3\times 2^{2m}}{2}\right) \approx 1.76 + 6m \quad \text{(dB)}$$

หรือจาก $P_x = \sigma_X^2 = x_{\max}^2/2 \Rightarrow \sigma_X = x_{\max}/\sqrt{2}$ ดังนั้น SQNR มีค่าเท่ากับ

$$\text{SQNR} = 4.77 + 6.02m - 20\log_{10}\left(\sqrt{2}\right) \approx 1.76 + 6m \quad \text{(dB)}$$

วงจรแจงหน่วยเชิงอนุพันธ์

- So far, ข้อมูลแต่ละแซมเปิลจะถูกทำการแจงหน่วยอย่างเป็นอิสระต่อกัน
- อย่างไรก็ตาม ⇒ โดยทั่วไปสัญญาณข้อมูลจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ
  - เช่น สัญญาณเสียง หรือสัญญาณภาพ
  - ข้อมูลแซมเปิลที่ได้จากการชักตัวอย่างด้วยอัตราไนควิสต์ (หรือมากกว่า) จะมีสหสัมพันธ์ (correlation) ระหว่างข้อมูลแซมเปิลที่อยู่ติดกันพอสมควร
  - ถ้านำคุณสมบัติของสหสัมพันธ์นี้มาประยุกต์ใช้กับวงจรแจงหน่วย ก็จะทำให้สามารถลดจำนวนระดับการแจงหน่วย L ลงได้ (ณ ค่า SQNR) ⇒ ลดจำนวนบิต m ที่ใช้แทนข้อมูล ⇒ **อัตราบิต** (bit rate) ลดลง ⇒ **แบนด์วิดท์**ที่ใช้น้อยลง
- วงจรแจงหน่วยที่นำสหสัมพันธ์มาใช้ประโยชน์ ⇒ **วงจรแจงหน่วยเชิงอนุพันธ์** (differential quantizer)



- ใช้ข้อมูลแซมเปิลในอดีตมาทำนาย (predict) ข้อมูลแซมเปิลในปัจจุบัน จากนั้นส่ง**ข้อผิดพลาดการทำนาย** (prediction error) v_n ไปทำการแจงหน่วย
- กำลังเฉลี่ยของสัญญาณรบกวนการแจงหน่วย σ_Q^2 ขึ้นกับช่วงแอมพลิจูดของสัญญาณ
- เนื่องจากข้อมูลที่ถูกแจงหน่วยคือ $v_n = x_n - \hat{x}_n$ ซึ่งถ้าวงจรทำงานดี ก็มั่นใจได้ว่า v_n จะมีช่วงแอมพลิจูดน้อยกว่า $[-x_{\max}, x_{\max}]$ มา $\Rightarrow$ ทำให้ σ_Q^2 มีค่าน้อยลง $\Rightarrow$ SQNR มีค่าเพิ่มขึ้น
- สิ่งสำคัญของวงจรแจงหน่วยเชิงอนุพันธ์นี้ก็คือการออกแบบ**วงจรกรองทำนาย** (predictor filter) ที่สามารถทำนายข้อมูลแซมเปิลในปัจจุบัน x_n ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

❑ การออกแบบวงจรกรองทำนาย

พิจารณาวงจรกรองทำนายอันดับ N แบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด $P\left(z^{-1}\right)=\sum_{k=1}^{N} p_k z^{-k}$

ดังนั้น $\hat{x}_n=\sum_{k=1}^{N} p_k x_{n-k}$ และข้อผิดพลาดการทำนาย v_n มีค่าเท่ากับ

$$v_n = x_n - \hat{x}_n = x_n - \sum_{k=1}^{N} p_k x_{n-k}$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ $\{p_k\}$ ที่ทำให้ค่าข้อผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของ v_n

$$E\left[v_n^2\right]=E\left[\left(x_n-\sum_{k=1}^{N} p_k x_{n-k}\right)^2\right]$$ มีค่าน้อยสุด

จะได้ $\hat{R}_{xx}(i)=\sum_{k=1}^{N} p_k \hat{R}_{xx}(i-k)$ สำหรับ $i=\{1,2,\ldots,N\}$ เมื่อ $\hat{R}_{xx}(i)$ คือค่าประมาณของอัตสหสัมพันธ์แบบไม่ต่อเนื่องลำดับที่ i ของลำดับข้อมูล $\{x_n\}$ ซึ่งหาได้จาก

$$\hat{R}_{xx}(i)=E\left[x_n x_{n-i}\right]=\frac{1}{L_x-|i|}\sum_{k=1}^{L_x} x_k x_{k-i}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{R}_{xx}(1) \\ \hat{R}_{xx}(2) \\ \vdots \\ \hat{R}_{xx}(N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{R}_{xx}(0) & \hat{R}_{xx}(1) & \cdots & \hat{R}_{xx}(N-1) \\ \hat{R}_{xx}(1) & \hat{R}_{xx}(0) & \cdots & \hat{R}_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{R}_{xx}(N-1) & \cdots & \hat{R}_{xx}(1) & \hat{R}_{xx}(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

หรือ $\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{p}$ เนื่องจาก $\mathbf{R}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ดังนั้นค่า $\{p_k\}$ หาได้จาก $\mathbf{p} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$

และข้อผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (MMSE) ของวงจรกรองทำนายมีค่าเท่ากับ

$$E\left[v_n^2\right] = \hat{R}_{xx}(0) - \sum_{k=1}^{N} p_k \hat{R}_{xx}(k)$$

สมรรถนะของวงจรกรองทำนายวัดได้จากค่า**อัตราขยายการทำนาย** $G_p = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_V^2}\right)$

เมื่อ $\sigma_V^2 = E\left[v_n^2\right]$ และสมมุติว่าข้อผิดพลาดการทำนาย v_n มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

❑ การสร้างข้อมูลแซมเปิล x_n ให้กลับคืนมา

จากรูป $v_n = x_n - \hat{x}_n$ จะได้

$$V(z^{-1}) = X(z^{-1}) - \sum_{k=1}^{N} p_k \left\{X(z^{-1})z^{-k}\right\} = X(z^{-1}) - X(z^{-1})\sum_{k=1}^{N} p_k z^{-k}$$

$$= X(z^{-1}) - X(z^{-1})P(z^{-1})$$

ดังนั้นข้อมูลแซมเปิล x_n ในรูปของการแปลงซีคือ

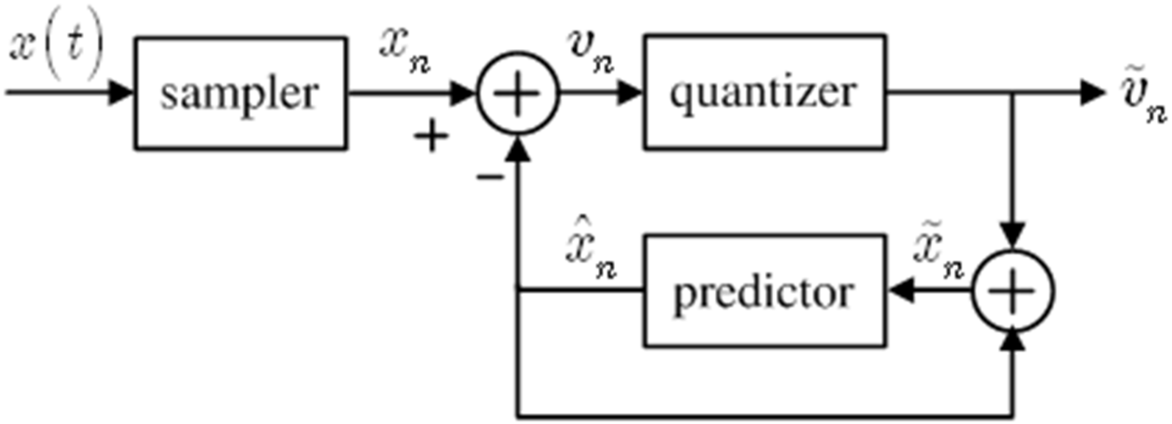
$$X(z^{-1}) = \frac{V(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = V(z^{-1})H(z^{-1})$$

นั่นคือข้อมูล x_n สร้างให้กลับคืนมาได้จากการนำข้อมูล v_n ไปผ่านวงจรกรองการสร้างสัญญาณกลับคืนมาที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนคือ $H(z^{-1}) = 1/(1-P(z^{-1}))$

อย่างไรก็ตามเนื่องจาก $\tilde{v}_n = v_n + q_n$ เมื่อ q_n คือสัญญาณรบกวนการแจงหน่วย ดังนั้นการสร้างข้อมูลแซมเปิล x_n อาจพบปัญหาเรื่อง**การแพร่กระจายข้อผิดพลาด** (error propagation) ได้

การกล้ำรหัสพัลส์เชิงอนุพันธ์ (DPCM)

ปัญหาเรื่องการแพร่กระจายข้อผิดพลาดที่พบในการสร้าง x_n จาก v_n แก้ไขได้โดยการใช้ **การกล้ำรหัสพัลส์เชิงอนุพันธ์** (DPCM) ซึ่งช่วยทำให้คุณภาพของข้อมูลแซมเปิลที่ถูกการแจงหน่วยขึ้นกับสัญญาณรบกวนการแจงหน่วยเท่านั้น



วงจรเข้ารหัส DPCM

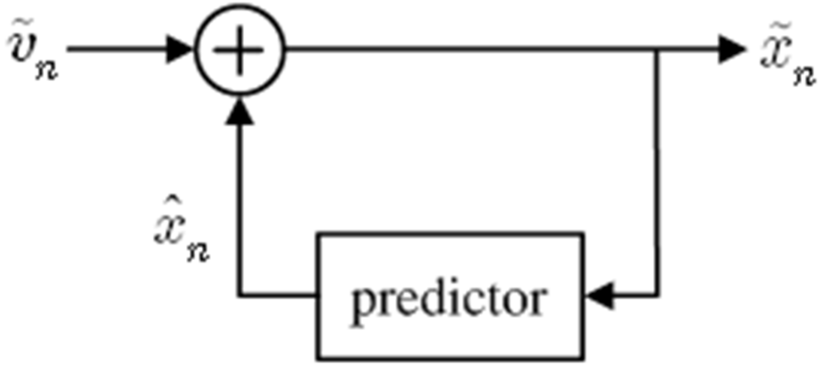
$$v_n = x_n - \hat{x}_n$$

$$\hat{x}_n = \sum_k p_k \tilde{x}_{n-k}$$

$$\tilde{v}_n = v_n + q_n$$

$$\tilde{x}_n = \hat{x}_n + \tilde{v}_n = \hat{x}_n + (v_n + q_n) = (\hat{x}_n + v_n) + q_n = x_n + q_n$$

ข้อมูลแซมเปิล x_n ที่ถูกแจงหน่วย



วงจรถอดรหัส DPCM

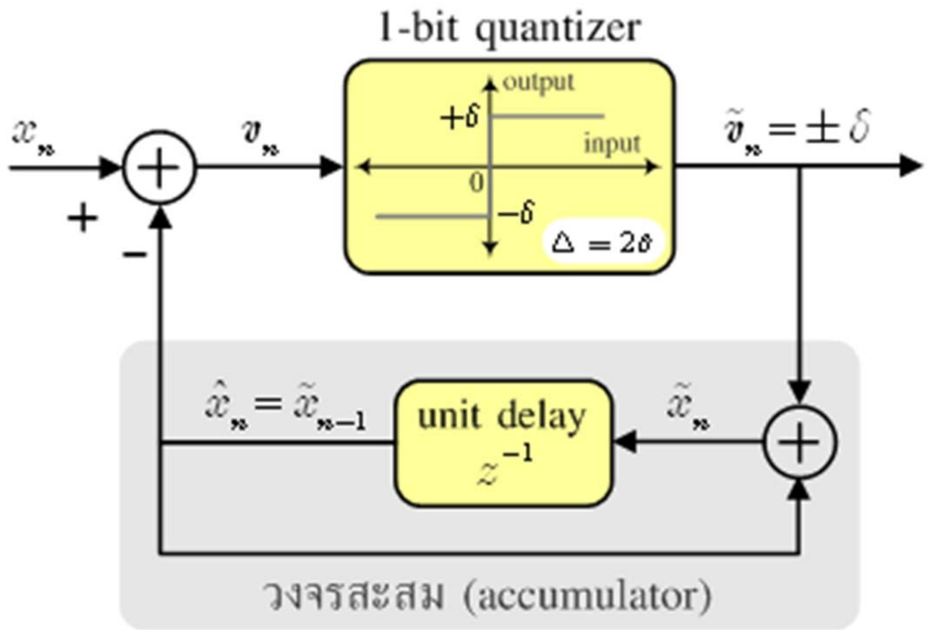
$$\tilde{x}_n = \tilde{v}_n + \hat{x}_n = x_n + q_n$$

ไม่เกิดปัญหาเรื่องการแพร่กระจายข้อผิดพลาด

- ในทางปฏิบัติสัญญาณที่ใช้งานทั่วไปมีคุณสมบัติกึ่ง**สเตชันเนรี** (quasi-stationary)
- อย่างไรก็ตามวงจรแจงหน่วยต่างๆ ถูกออกแบบมาบนสมมุติฐานที่ว่าสัญญาณมีคุณสมบัติเป็นแบบสเตชันเนรี จึงทำให้สมรรถนะที่ได้ไม่ดีเท่าที่ควร
- การเพิ่มสมรรถนะของวงจรแจงหน่วยเหล่านี้ $\Rightarrow$ ใช้วงจรแจงหน่วยแบบปรับตัวได้ (adaptive quantizer) $\Rightarrow$ ปรับค่าขนาดขั้นบันได Δ ให้เหมาะสมกับการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณ
- ในระบบ DPCM อาจใช้วงจรกรองทำนายแบบปรับตัวได้ $\Rightarrow$ ปรับค่าสัมประสิทธิ์ $\{p_k\}$ เพื่อให้ข้อผิดพลาดจากการทำนายมีค่าน้อยสุดในทุกช่วงเวลา

การกล้ำสัญญาณเดลตา (DM หรือ Δ)

- ❑ นิยมใช้กับการส่งผ่านสัญญาณเสียงที่**ไม่เน้น**คุณภาพของเสียงมากนัก
- ❑ ในทางปฏิบัติ DM ⇒ ระบบ DPCM แบบง่ายสุดที่ใช้
  - วงจรแจงหน่วยแบบหนึ่งบิต (1-bit quantizer) และ
  - วงจรกรองทำนายอันดับหนึ่งแบบคงที่ หรือวงจรหน่วงเวลา 1 หน่วย (unit delay)



วงจรเข้ารหัส DM

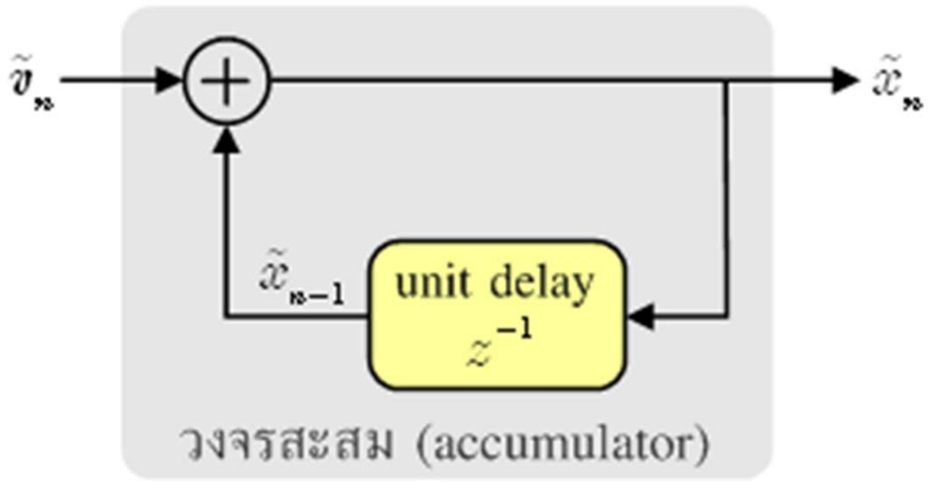
$$v_n = x_n - \tilde{x}_{n-1}$$

$$\tilde{v}_n = \delta\,\mathrm{sgn}(v_n) = \begin{cases} +\delta, & v_n > 0 \\ -\delta, & v_n < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{x}_n = \tilde{v}_n + \tilde{x}_{n-1}$$

$\Delta = 2\delta$ ขนาดขั้นบันไดของระบบ DM

- เนื่องจาก $\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} + \tilde{v}_n$
- วงจรถอดรหัส DM ใช้ความสัมพันธ์นี้สร้างข้อมูลแซมเปิลต้นฉบับ $\tilde{x}_n$ ดังนี้



วงจรถอดรหัส DM

$$\tilde{x}_n = \delta \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\tilde{v}_i)$$

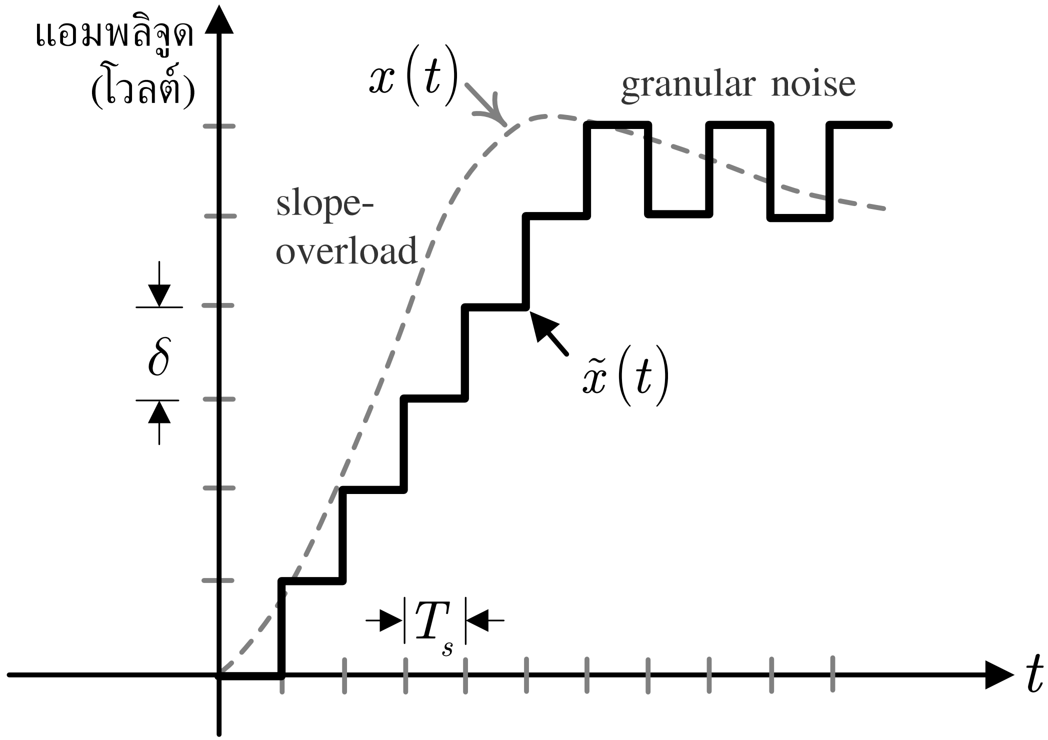
โดยทั่วไปอาจกล่าวได้ว่าระบบ DM จะประมาณค่าสัญญาณ $x(t)$ ด้วยฟังก์ชันขั้นบันได ซึ่งการประมาณค่านี้มีคุณภาพดี ก็ต่อเมื่อสัญญาณ $x(t)$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ เมื่อเทียบกับอัตราการชักตัวอย่าง (เช่น มากกว่าอัตราไนควิสต์ 5 เท่า)

❑ ความผิดเพี้ยน

- ความผิดเพี้ยนแบบ slope-overload $\Rightarrow$ ใช้ค่า Δ **น้อยเกินไป** $\Rightarrow$ ทำให้ติดตามการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว (ความชันมาก) ของสัญญาณไม่ทัน
  - แก้ไขได้โดยการใช้อัตราการชักตัวอย่างและ Δ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\frac{\delta}{T_s} \geq \max\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|$$

- ความผิดเพี้ยนแบบ granular noise $\Rightarrow$ ใช้ค่า Δ **มาก**เกินไปในช่วงที่สัญญาณ $x(t)$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ (ความชันน้อย)
- ระบบ DM **ควรใช้**ค่า Δ ที่ทำให้ผลรวมของความผิดเพี้ยนทั้งสองมีค่าน้อยสุด หรือใช้ค่า Δ ที่แปรผันได้ $\Rightarrow$ Δ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ $x(t)$ มีความชันมาก (และในทางกลับกัน)



Example

พิจารณาความเป็นไปได้ในการนำระบบ DM (มีความซับซ้อนน้อย) มาใช้แทนระบบ PCM ในการส่งผ่านคำพูด จากการทดลองพบว่าระบบ DM จะส่งผ่านคำพูดได้โดยไม่เกิดปัญหาเรื่องความผิดเพี้ยนแบบ slope-overload ก็ต่อเมื่อระบบสามารถเข้ารหัสสัญญาณรูปไซน์ $x(t) = A\sin(2\pi ft)$ ที่มีความถี่ $f = 800$ เฮิรตซ์ได้โดยไม่เกิดความผิดเพี้ยนแบบ slope-overload ซึ่งเป็นจริงเมื่อแอมพลิจูด A ของสัญญาณรูปไซน์ มีค่าเท่ากับแอมพลิจูดของสัญญาณคำพูด (speech signal)

ก) จงหาความถี่การชักตัวอย่างน้อยสุดที่ต้องใช้ เมื่อระบบ DM ใช้ขนาดขั้นบันได $\delta = 2A/256$

ข) สมมุติว่าความถี่สูงสุดของสัญญาณคำพูดคือ 3400 เฮิรตซ์ และใช้ความถี่การชักตัวอย่างเท่ากับ 8000 เฮิรตซ์ จงหาอัตราบิตน้อยสุดของระบบ PCM แบบ 8 บิตต่อแซมเปิล, อัตราบิตของระบบ DM, และระบบ DM นี้เหมาะที่จะนำมาใช้แทนระบบ PCM หรือไม่

❑ วิธีทำ

ก) ความชันมากสุดของสัญญาณ $x(t)$ เกิดขึ้น ณ จุดตัดค่าศูนย์ (zero crossing) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2A\pi f\cos(2\pi ft)\Big|_{t=0} = 2A\pi f$$

เพื่อหลีกเลี่ยงความผิดเพี้ยนแบบ slope-overload คาบการชักตัวอย่าง $T_s = 1/f_s$ ที่ใช้ต้องสอดคล้องกับสมการ (4.74) นั่นคือ $\delta / T_s \geq 2A\pi f$ ซึ่งจะได้

$$f_s \geq \frac{2A\pi f}{\delta} = \frac{2A\pi \times 8000}{2A/256} = \pi \times 8000 \times 256 \approx 643.4 \text{ kHz}$$

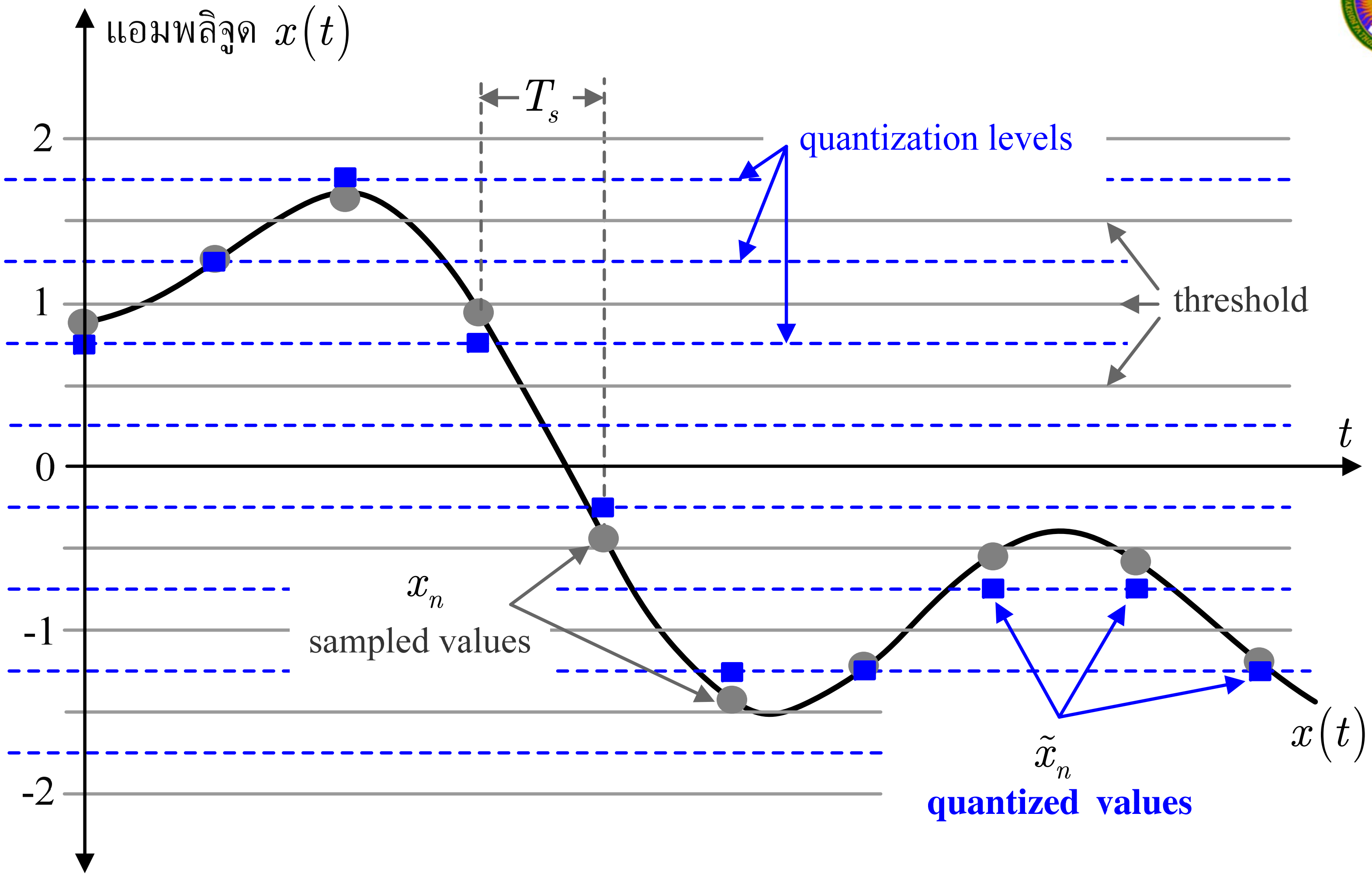
ข) ระบบ PCM แบบ 8 บิตต่อแซมเปิลและใช้ $f_s = 8000$ แซมเปิลต่อวินาทีจะมีอัตราบิตเท่ากับ $8000 \times 8 = 64$ กิโลบิตต่อวินาที (kbps) ในขณะที่ระบบ DM มีอัตราบิตเท่ากับ 643.4 kbps เพราะใช้ 1 บิตต่อแซมเปิล ดังนั้นในที่นี้ระบบ DM ไม่เหมาะสำหรับนำมาใช้แทนระบบ PCM (ถ้าไม่ใช้ขนาดขั้นบันได Δ แบบปรับตัวได้)

การเข้ารหัสพีซีเอ็ม

- หลังจากผ่านขั้นตอนการแจงหน่วยแล้ว ข้อมูลแซมเปิลที่ถูกแจงหน่วย $\tilde{x}_n$ แต่ละแซมเปิลจะถูกนำไปเข้ารหัสเพื่อแปลงให้เป็นบิตข้อมูล โดยหนึ่งแซมเปิลจะถูกแทนด้วย m บิต เมื่อ $m = \lceil \log_2(L) \rceil$ และ L คือระดับการแจงหน่วยที่ใช้ในวงจรแจงหน่วย
- บิตข้อมูลทั้งหมดที่ได้เรียกว่า**ลำดับพีซีเอ็ม** (PCM sequence) โดยมีอัตราบิต $R_b = \dfrac{1}{T_b} = mf_s$
- รหัสที่ใช้ในการเข้ารหัสข้อมูลแซมเปิลที่ถูกแจงหน่วย $\tilde{x}_n$ มีหลายแบบ เช่น รหัสเกรย์ (Gray code), รหัส FBC (foldover binary coding), และรหัส NBC (natural binary code)

coding rule

Gray	FBC	NBC
100	111	111
101	110	110
111	101	101
110	100	100
010	000	011
011	001	010
001	010	001
000	011	000



ลำดับพีซีเอ็มที่ใช้รหัสเกรย์ 111 101 100 111 010 001 001 011 011 001

รหัสเกรย์นิยมนำมาใช้กับการแยกสัญญาณ (demodulation) เพราะข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นหนึ่งบิตในลำดับข้อมูลที่ถูกเข้ารหัสด้วยรหัสเกรย์มีผลทำให้ระดับการแจงหน่วยคลาดเคลื่อนไปจากระดับเดิมเพียงระดับเดียว (ที่อยู่ติดกัน) เท่านั้น ซึ่งทำให้ง่ายต่อการแยกสัญญาณ

Example

การส่งสัญญาณเสียงในรูปลำดับพีซีเอ็มด้วยอัตราบิต R_b = 36000 บิตต่อวินาที จงหาความถี่การชักตัวอย่างที่เป็นไปได้ จำนวนระดับของการแจงหน่วย และจำนวนบิตต่อการชักตัวอย่างหนึ่งครั้ง ถ้ากำหนดให้สัญญาณเสียงนี้มีความถี่สูงสุดเท่ากับ 3200 เฮิรตซ์

วิธีทำ จากทฤษฎีบทการชักตัวอย่าง ความถี่การชักตัวอย่างมีค่าเท่ากับ $f_s \geq 2f_{\max} = 2(3200) =$ 6400 Hz ถ้าให้ m คือจำนวนบิตต่อการชักตัวอย่างหนึ่งครั้งจะได้ว่า $mf_s \leq R_b = 36000$ บิตต่อวินาที ดังนั้นจำนวนบิตต่อการชักตัวอย่างหนึ่งครั้งมีค่าเท่ากับ

$$m \leq \frac{R_b}{f_s} = \frac{36000}{6400} = 5.6 \text{ บิต}$$

สมมุติว่าระบบใช้ $m = 5$ บิตต่อการชักตัวอย่างหนึ่งครั้ง เพราะฉะนั้นจำนวนระดับของการแจงหน่วยจะมีค่าเท่ากับ $L = 2^m = 2^5 = 32$ ระดับ และความถี่การชักตัวอย่าง f_s เพื่อให้ได้ 5 บิตต่อการชักตัวอย่างหนึ่งครั้งคือ $f_s = 36000/5 = 7200$ Hz

*** *END*