



# การสื่อสารดิจิทัล

## ตัวแปรสุมและกระบวนการสุม (2)

---

Assoc.Prof.**Piya Kovintavewat**, Ph.D.

Data Storage Technology Research Center

Nakhon Pathom Rajabhat University

<http://home.npru.ac.th/piya>



# Outline



- ❑ ความน่าจะเป็นและปริภูมิตัวอย่าง
- ❑ ตัวแปรสุ่ม
  - ค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิล
  - โมเมนต์
  - ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบเกาส์เซียน
- ❑ กระบวนการสุ่ม
  - ค่าเฉลี่ยและฟังก์ชันอัตโนมัติสัมพันธ์
  - สเตชันนารี
  - อัตสหสัมพันธ์ของกระบวนการสุ่มสเตชันนารีแบบไวต์เซนส์
  - กระบวนการเออร์กอดิก
  - ความหนาแน่นสเปกตรัมกำลัง
  - ความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการสุ่มและระบบ LTI
  - สัญญาณรบกวนในระบบสื่อสาร



# ความน่าจะเป็นและปฏุมิตัวอย่าง

□ พิจารณาเหตุการณ์การโยนเหรียญบาทซึ่งผลลัพธ์ที่ได้มี 2 แบบคือ

- $n_H$  = หัว (head)

- $n_T$  = ก้อย (tail)

- $N$  = จำนวนครั้งที่ทำการโยนเหรียญบาท

$$\frac{n_H}{N} \approx 0.5 \quad \text{และ} \quad \frac{n_T}{N} \approx 0.5$$

□ ถ้าเหรียญบาทที่ใช้ไม่มีการถ่วงน้ำหนัก  $\Rightarrow$  ความน่าจะเป็น (probability) ที่จะได้ผลลัพธ์เป็น “หัว” หรือ “ก้อย” มีค่าเท่ากัน

$$\Pr[H] = 0.5 \quad \text{และ} \quad \Pr[T] = 0.5$$

□ ปฏุมิตัวอย่าง (sample space)  $\Rightarrow$  เซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ได้จากการทดลอง

$$\Pr[\Omega] = 1$$





□ เซตย่อย (subset) ของปริภูมิตัวอย่างจะเรียกว่าเหตุการณ์ (event) และสมาชิกแต่ละตัวในเหตุการณ์เรียกว่าเหตุการณ์มูลฐาน (elementary event)

□ กฎความน่าจะเป็น

1)  $0 \leq \Pr[A] \leq 1$  เมื่อ  $A \in \Omega$

2)  $\Pr[\Omega] = 1$  และ  $\Pr[\emptyset] = 0$  เมื่อ  $\emptyset$  คือเซตว่าง

3)  $\Pr[A] = 1 - \Pr[\bar{A}]$  เมื่อ  $\bar{A}$  คือส่วนเติมเต็มของ  $A$

4)  $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$

5)  $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$  ถ้า  $A$  และ  $B$  เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วม

6)  $\Pr[B | A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]}$  สำหรับ  $\Pr[A] > 0$



7) กฎของเบส์ (Bayes' rule)

$$\Pr[A | B] = \frac{\Pr[B | A] \times \Pr[A]}{\Pr[B]} \quad \text{สำหรับ } \Pr[B] > 0$$

8) ถ้าเหตุการณ์  $A$  และ  $B$  เป็นอิสระต่อกัน (independent) จะได้ว่า

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \times \Pr[B], \quad \Pr[A | B] = \Pr[A] \quad \text{และ} \quad \Pr[B | A] = \Pr[B]$$

9) กำหนดให้  $B_1, B_2, \dots, B_n$  เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วม และ  $\Pr[B_i] > 0$  สำหรับทุกค่า  $i$  ดังนั้น สำหรับเหตุการณ์  $A$  ใดๆ ในปริภูมิตัวอย่าง จะได้ว่า

$$\Pr[A] = \sum_{i=1}^n \Pr[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^n \Pr[A | B_i] \Pr[B_i]$$



# Example



- ❑ พิจารณาสถานีฐาน (base station) ได้รับกลุ่มข้อมูล (data packet) ที่ส่งมาจากดาวเทียม 1 และ 2 เพื่อใช้ประมวลผลในขั้นต่อไป กำหนดให้กลุ่มข้อมูลที่สถานีฐานได้รับทั้งหมดมาจากดาวเทียม 1 และ 2 เท่ากับ 40% และ 60% ตามลำดับ โดยสมมติว่ากลุ่มข้อมูลที่ส่งมาจากดาวเทียม 1 มีข้อผิดพลาด (error) 5% และกลุ่มข้อมูลที่ส่งมาจากดาวเทียม 2 มีข้อผิดพลาด 3% ดังนั้น ถ้าทำการสุ่มกลุ่มข้อมูลมาหนึ่งกลุ่มแล้วพบว่าข้อผิดพลาด จงหาค่าความน่าจะเป็นที่กลุ่มข้อมูลนั้นถูกส่งมาจากดาวเทียม 1
- A คือเหตุการณ์ที่สุ่มเลือกกลุ่มข้อมูลมาแล้วพบว่าข้อผิดพลาด
  - $B_i$  คือเหตุการณ์ที่กลุ่มข้อมูลนั้นถูกส่งมาจากดาวเทียม  $i \in \{1, 2\}$





$$\Pr[B_1] = 0.4, \Pr[B_2] = 0.6, \Pr[A|B_1] = 0.05 \text{ และ } \Pr[A|B_2] = 0.03$$

- ดังนั้นถ้าทำการสุ่มกลุ่มข้อมูลมาหนึ่งกลุ่มแล้วพบว่ามียี่ห้อผิดพลาด ความน่าจะเป็นที่กลุ่มข้อมูลนั้นถูกส่งมาจากดาวเทียม 1 มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}\Pr[B_1|A] &= \frac{\Pr[B_1 \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[A|B_1]\Pr[B_1]}{\Pr[A|B_1]\Pr[B_1] + \Pr[A|B_2]\Pr[B_2]} \\ &= \frac{0.05 \times 0.4}{(0.05 \times 0.4) + (0.03 \times 0.6)} = 0.5263\end{aligned}$$



# ตัวแปรสุ่ม



- ตัวแปรสุ่ม (random variable) คือฟังก์ชันที่กำหนดค่าจำนวนจริงให้กับแต่ละผลลัพธ์ในปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่ม โดยจะใช้สัญลักษณ์  $X(A)$  แทนตัวแปรสุ่มของเหตุการณ์  $A$ 
  - การโยนเหรียญบาทหนึ่งครั้ง  $\Rightarrow$  ผลลัพธ์ 1 (แทน “หัว”) และ  $-1$  (แทน “ก้อย”) ดังนั้นจะได้  $X(A) \in \{-1, 1\}$
  - การทอดลูกเต๋าหนึ่งครั้ง  $\Rightarrow$  ผลลัพธ์ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ดังนั้นจะได้  $X(A) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$





# ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม



- ในทางปฏิบัติค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มจะถูกกำหนดโดยตรง (แทนที่จะกำหนดให้กับเหตุการณ์ในปริภูมิตัวอย่าง) ในรูปของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function)

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x]$$

คือความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่ม  $X$  มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนจริง  $x$

## Property:

1)  $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2)  $F_X(x_1) < F_X(x_2)$  เมื่อ  $x_1 < x_2$

3)  $F_X(-\infty) = 0$  และ  $F_X(+\infty) = 1$



# ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น



□อนุพันธ์ (derivative) ของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมมีค่าเท่ากับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (pdf: probability density function)

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

## Property

$$1) \quad 0 \leq p_X(x) \leq 1$$

$$2) \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(z) dz$$

$$3) \quad \Pr[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b p_X(x) dx$$

$$4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1$$



# Example



□ กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม  $X$  คือเวลาที่ใช้ในการส่งข่าวสารผ่านช่องสัญญาณ โดยที่  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลังที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นเท่ากับ

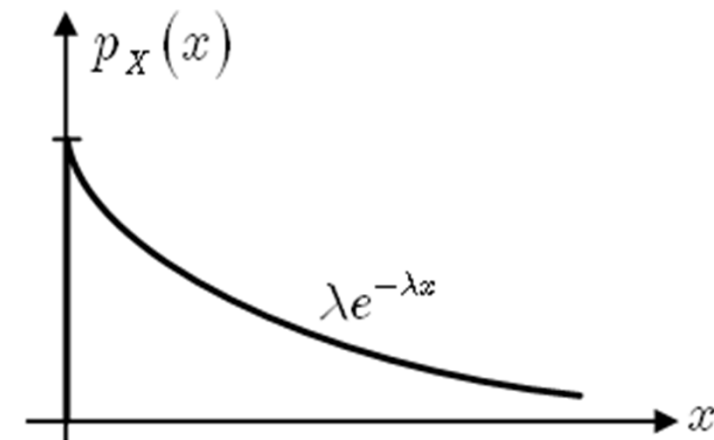
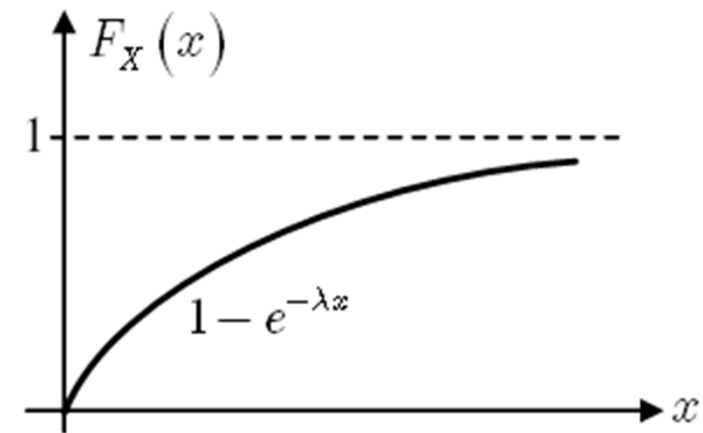
$$\Pr[X > x] = e^{-\lambda x}$$

เมื่อ  $x > 0$  เป็นเลขจำนวนจริง และ  $\lambda$  คือค่าคงตัว  
จงหา

ก) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม  $F_X(x)$

ข) ค่า  $\Pr[T < X < 2T]$  เมื่อ  $T = 1/\lambda$

ค) ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น  $p_X(x)$





ก) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมหาได้จาก

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = 1 - \Pr[X > x] = 1 - e^{-\lambda x} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

ข) จากคุณสมบัติของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม จะได้ว่า

$$\Pr[T < X \leq 2T] = \Pr[X \leq 2T] - \Pr[X < T] = (1 - e^{-\lambda 2T}) - (1 - e^{-\lambda T}) = e^{-\lambda T} - e^{-\lambda 2T}$$

ดังนั้นเมื่อ  $T = 1/\lambda$  จะได้  $\Pr[T < X \leq 2T] = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233$

ค) เนื่องจาก  $F_X(x)$  เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องตลอดทุกค่า  $x$  แสดงว่าอนุพันธ์ของ  $F_X(x)$  มีอยู่จริงสำหรับทุกค่า  $x$  ยกเว้นที่ค่า  $x = 0$  ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น  $p_X(x)$  คือ

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$



# ตัวแปรสุ่มวิยุต



□ ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (probability mass function)

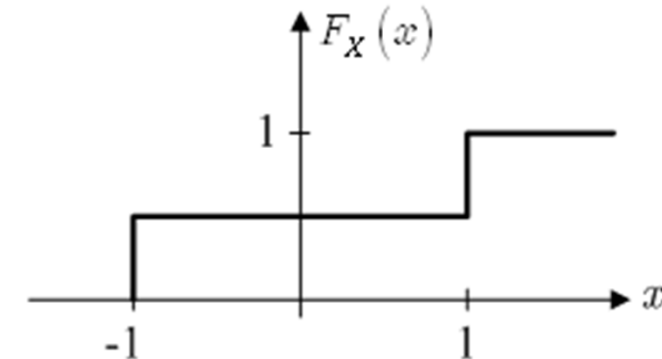
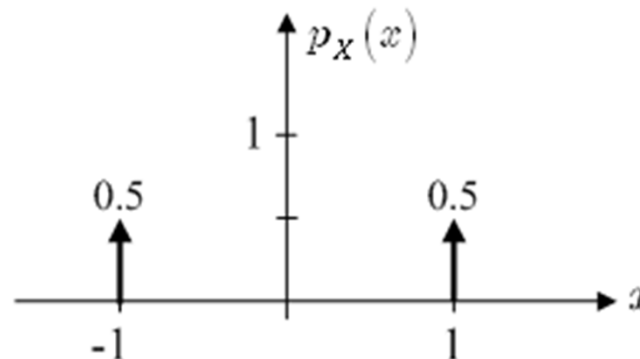
$$p_X(x_i) = \Pr[X = x_i]$$

□ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \Pr[X = x_i] = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

**Ex:** การทดลองการโยนเหรียญบาทหนึ่งเหรียญ

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.5, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



# ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม



ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม  $Y = g(X)$  ก็ถือว่าเป็นตัวแปรสุ่มเช่นกัน โดยที่  $g(X)$  คือฟังก์ชันของ  $X$  ถ้ากำหนดให้ตัวแปรสุ่ม  $X$  มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเท่ากับ  $p_X(x)$  ดังนั้นการหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม  $Y = g(X)$  หาได้จาก

$$p_Y(y) = \sum_i \frac{p_X(x_i)}{\left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i}}$$

เมื่อ  $\{x_i\}$  สำหรับทุกค่า  $i$  ที่เป็นคำตอบของ  $y = g(x_i)$



# Example



กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม  $X$  มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น  $p_X(x)$  และ  $\{a, b\}$  คือค่าคงตัวที่มีค่าเป็นบวก จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม  $Y = aX + b$  เมื่อ  $a > 0$  และ  $b > 0$  คือค่าคงตัว





# วิธีทำ

วิธีที่ 1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ  $Y$  หาได้จาก

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[aX + b \leq y] = \Pr\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} p_X(x) dx = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

ดังนั้นจะได้ 
$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{dy} = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

วิธีที่ 2 เนื่องจากสมการ  $g(x) = ax + b = y$  มีเพียงหนึ่งคำตอบคือ  $x_1 = (y-b)/a$   
ดังนั้นจาก  $dg(x)/dx = a$  จะได้

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^1 \frac{p_X(x_i)}{|a|} = \frac{p_X(x_1)}{a} = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$





# ตัวแปรสุ่มหลายตัว



□ กำหนดให้  $X$  และ  $Y$  เป็นตัวแปรสุ่มในปริภูมิตัวอย่าง ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม (joint cumulative distribution function) นิยามโดย

$$F_{XY}(x, y) = \Pr[X \leq x, Y \leq y]$$

## Property

1)  $F_{XY}(x_1, y_1) \leq F_{XY}(x_2, y_2)$  ถ้า  $x_1 \leq x_2$  และ  $y_1 \leq y_2$

2)  $F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0$

3)  $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$

4)  $F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{XY}(x, y) dy$

5)  $F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{XY}(x, y) dx$





## □ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม (joint pdf)

$$p_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)$$

### Property

- 1)  $F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p_{XY}(u, v) du dv$
- 2)  $p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dy$  (เรียกว่า marginal pdf ของ  $X$ )
- 3)  $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx$  (เรียกว่า marginal pdf ของ  $Y$ )
- 4)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx dy = 1$





□ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional pdf) ของตัวแปรสุ่ม  $X$  เมื่อกำหนดตัวแปรสุ่ม  $Y = y$  มาให้

$$p_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}, & p_Y(y) \neq 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  เป็นอิสระเชิงสถิติ (statistically independent) ต่อกัน จะได้ว่า

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

ดังนั้น  $p_{X|Y=y}(x) = p_X(x)$



# ค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิล



- ในทางปฏิบัติบางครั้งไม่มีความจำเป็นต้องคำนวณค่าที่แน่นอนของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม ถ้าทราบพฤติกรรมเชิงเฉลี่ยที่เรียกว่าค่าเฉลี่ยทางสถิติ (statistic average) ของตัวแปรสุ่มสำหรับเหตุการณ์นั้น
  - อยู่ในรูปของค่าคาดหวัง (expected value)
  - ค่าเฉลี่ยทางสถิติของตัวแปรสุ่ม  $\Rightarrow$  ค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิล (ensemble average)

ค่าเฉลี่ย (mean) หรือค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มวิฤต  $X$  ที่มีค่าเท่ากับ  $\alpha_k$  ด้วยความน่าจะเป็น  $\Pr[X = \alpha_k]$  สำหรับ  $k = 1, 2, \dots, N$  นิยามโดย

$$E[X] = \sum_{k=1}^N \alpha_k \Pr[X = \alpha_k]$$

เมื่อ  $E[\cdot]$  คือตัวดำเนินการค่าคาดหวัง (expectation operator)





**Ex:** ค่าเฉลี่ยของเหตุการณ์การโยนเหรียญบาทที่ไม่มีการถ่วงน้ำหนักคือ

$$E[X] = (1)\Pr[X = 1] + (-1)\Pr[X = -1] = (1)(0.5) + (-1)(0.5) = 0$$

ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง  $X$  ที่มีค่าเท่ากับ  $\alpha$  และฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น  $p_X(\alpha)$  จะมีค่าเฉลี่ยคือ

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha p_X(\alpha) d\alpha$$

นอกจากนี้ถ้ากำหนดให้  $g(X, Y)$  คือฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  ดังนั้นค่าคาดหวังของ  $g(X, Y)$  มีค่าเท่ากับ

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy$$



# โมเมนต์



□ โมเมนต์ (moment) หรือค่าเฉลี่ยทางสถิติลำดับที่  $n$  ของการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง  $X$  นิยามโดย

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx$$

## Property

- 1)  $E[a] = a$
- 2)  $E[aX] = aE[X]$
- 3)  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$



## □ โมเมนต์ศูนย์กลาง (central moment) ลำดับที่ $n$

$$E[(X - m_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n p_X(x) dx$$

- โมเมนต์ศูนย์กลางลำดับที่สอง  $\Rightarrow$  ความแปรปรวน (variance)

$$\text{Var}[X] = \sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2] = E[X^2] - m_X^2$$

### Property

- 1)  $\text{Var}[a] = 0$
- 2)  $\text{Var}[X + a] = \text{Var}[X]$
- 3)  $\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$



# Example



ถ้าให้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเอกกรุป  $X$  (uniform random variable) คือ  $p_X(x) = K$  เมื่อ  $a \leq x \leq b$  และ  $\{a, b\}$  คือค่าคงตัว จงหาค่า  $K$ , ค่าเฉลี่ย, และค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha p_X(\alpha) d\alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha d\alpha = \frac{1}{b-a} \left( \frac{b^2 - a^2}{2} \right) = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_X^2 = E\left[(X - m_X)^2\right] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{b-a} \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} y^2 dy = \frac{(b-a)^2}{12}$$





# ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่ม

กำหนดให้  $X$  และ  $Y$  คือตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย  $m_X$  และ  $m_Y$  และมีค่าความแปรปรวน  $\sigma_X^2$  และ  $\sigma_Y^2$  ตามลำดับ

## □ สหสัมพันธ์ (correlation)

$$R_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_{XY}(x, y) dx dy$$

## □ ความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance)

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y$$





□ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient)

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[XY] - m_X m_Y}{\sigma_X \sigma_Y} \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

□ ตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  มีลักษณะเชิงตั้งฉาก (orthogonal)

$$E[XY] = 0$$

□ ตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  ไม่มีสหสัมพันธ์ (uncorrelated) ต่อกัน

$$\rho_{XY} = 0 \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$$

□ ตัวแปรสุ่ม  $X$  และ  $Y$  เป็นอิสระเชิงสถิติต่อกัน

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$$



# PDF แบบเกาส์เซียน



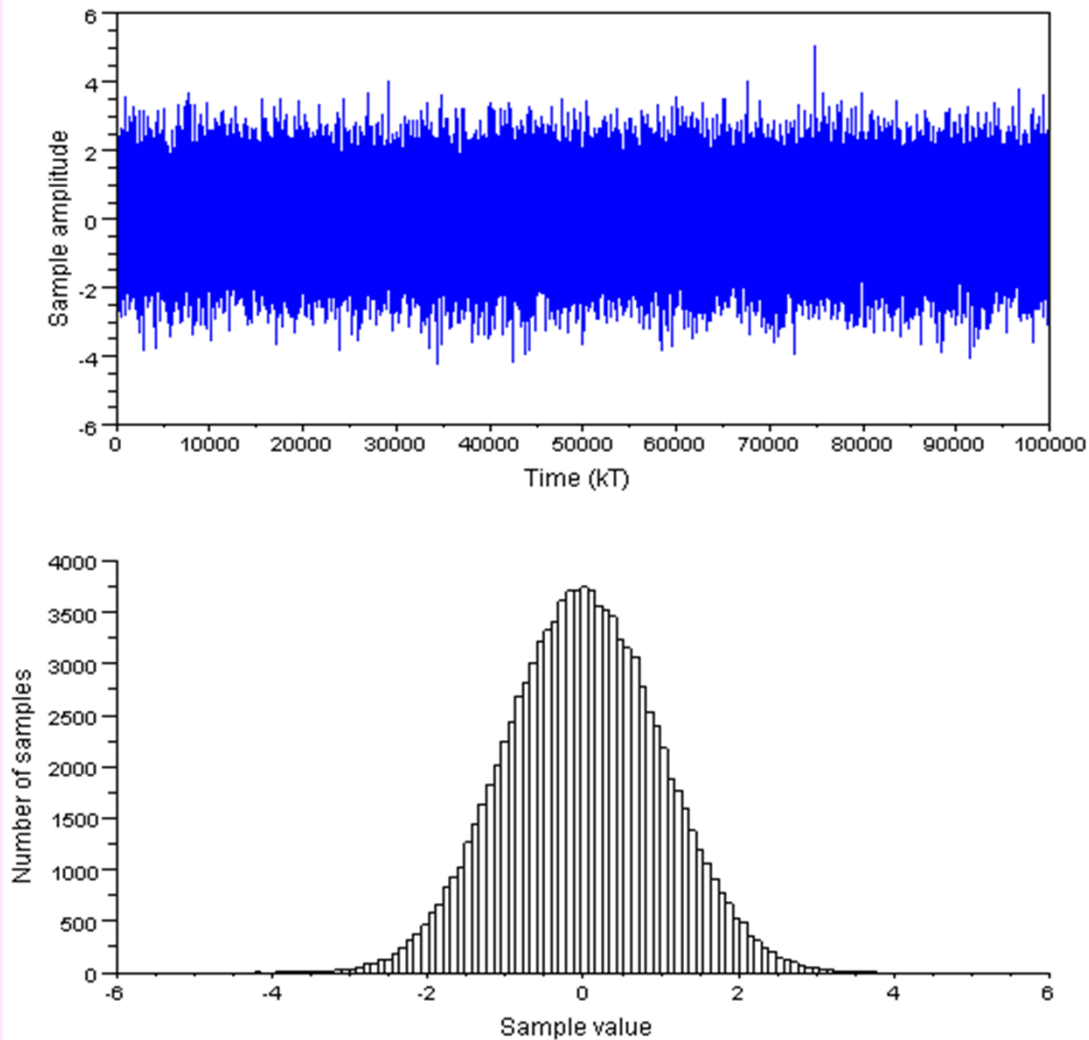
- นิยมใช้งานมากสำหรับการวิเคราะห์ระบบสื่อสาร เพราะพฤติกรรมของตัวแปรสุ่มเกาส์เซียนมีลักษณะคล้ายกับข้อมูลที่พบในระบบสื่อสาร เช่น สัญญาณข้อมูล และสัญญาณรบกวน เป็นต้น
- ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบปกติ (normal pdf)

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

$$X \sim p_X(x) = \mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$$

- การแจกแจงปกติแบบมาตรฐาน (standard normal distribution)  $\Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$





### SCILAB

```
-->x = rand(1, 100000, 'normal'); /
-->[mean(x) variance(x)]
ans =
    0.0028278    1.0061518
-->subplot(2,1,1); plot(x);
-->xtitle('','Time (kT)','Sample amplitude');
-->subplot(2,1,2);
-->histplot(100, x, normalization=%F)
-->xtitle('','Sample value','Number of samples')
```

Ex: สัญญาณรบกวนเชิงความร้อน (thermal noise)



ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม  $F_X(x)$  ของตัวแปรสุ่มเกาส์เซียนที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น  $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$  หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^x p_X(\alpha) d\alpha = 1 - \int_x^{\infty} p_X(\alpha) d\alpha \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{(\alpha - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) d\alpha \end{aligned}$$

ถ้าให้  $v = (\alpha - m_X) / \sigma_X$  จะได้ว่า  $dv = d\alpha / \sigma_X$  ดังนั้น

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-m_X}{\sigma_X}}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv = 1 - Q\left(\frac{x - m_X}{\sigma_X}\right)$$

ตารางค้นหา  
(look-up table)

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$$



# ตัวแปรสุ่มวิฤตที่น่าสนใจ



## ตัวแปรสุ่มเบอร์นูลลี

- ❑ การทดลองสุ่มที่มีผลลัพธ์จากการทดลองได้เพียงสองแบบคือ **ความสำเร็จ** (success) และ **ความล้มเหลว** (failure) เช่น การโยนเหรียญหนึ่งบาทครึ่ง
- ❑ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น

$$\Pr[X = 0] = 1 - q \text{ และ } \Pr[X = 1] = q$$

- ❑ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน

$$E[X] = q \text{ และ } \text{Var}[X] = q(1 - q)$$



## ตัวแปรสุ่มทวินาม

- พิจารณาการทดลองสุ่มที่ทำซ้ำกัน  $n$  ครั้งอย่างเป็นอิสระต่อกัน และการทดลองแต่ละครั้งมีผลลัพธ์ที่จำแนกได้สองแบบคือ ความสำเร็จและความล้มเหลว
  - พบมากในงานทดลองที่มีผลลัพธ์เพียงสองแบบเท่านั้น เช่น หัว/ก้อย, บิตที่ถูก/บิตที่ผิด, หรือชิ้นส่วนที่ดี/ชิ้นส่วนที่บกพร่อง เป็นต้น
- ถ้าให้  $Y$  คือจำนวนครั้งที่เหตุการณ์  $A$  เกิดขึ้นภายในการทดลอง  $n$  ครั้ง
  - ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น

$$\Pr[Y = k] = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \left( \frac{n!}{(n-k)!k!} \right) q^k (1-q)^{n-k}$$

- ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน

$$E[Y] = nq \quad \text{และ} \quad \text{Var}[Y] = nq(1-q)$$





# Example



ข้อมูลบิต 0 และบิต 1 ถูกส่งผ่านไปยังช่องสัญญาณที่มีสัญญาณรบกวน ซึ่งมีผลทำให้วงจรภาครับถอดรหัสข้อมูลผิดพลาดด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.00002 ถ้าข่าวสารแต่ละชุดถูกส่งออกไปในรูปของบล็อก (block) ข้อมูล โดยที่แต่ละบล็อกมีข้อมูลจำนวน 2000 บิต

- ก) จงหาความน่าจะเป็นที่ข้อมูลอย่างน้อยหนึ่งบิตในข่าวสารหนึ่งบล็อกจะผิดพลาด
- ข) ถ้าข่าวสารหนึ่งชุดประกอบด้วยข้อมูล 20 บล็อก จงหาความน่าจะเป็นที่บล็อกข้อมูลจะผิดพลาดมากกว่าหรือเท่ากับ 2 บล็อก





## วิธีทำ

ก) ถ้าให้  $Y$  แทนจำนวนบิตที่ผิดพลาดภายในข่าวสารหนึ่งบล็อก (2000 บิต) และ  $q = 0.00002$  แทนความน่าจะเป็นที่วงจรภาครับถอดรหัสข้อมูลผิดพลาด ดังนั้น

$$\begin{aligned}\Pr[Y \geq 1] &= 1 - \Pr[Y < 1] = 1 - \binom{2000}{0} (0.00002)^0 (1 - 0.00002)^{2000-0} \\ &= 1 - (1)(1)(0.99998)^{2000} = 0.03921\end{aligned}$$

ข) ให้  $Z$  แทนจำนวนบล็อกที่เกิดข้อผิดพลาดภายในข้อมูล 20 บล็อก และ  $p$  แทนความน่าจะเป็นที่บล็อกข้อมูลหนึ่งบล็อกจะผิดพลาดซึ่งมีค่าเท่ากับ **0.03921** ดังนั้น

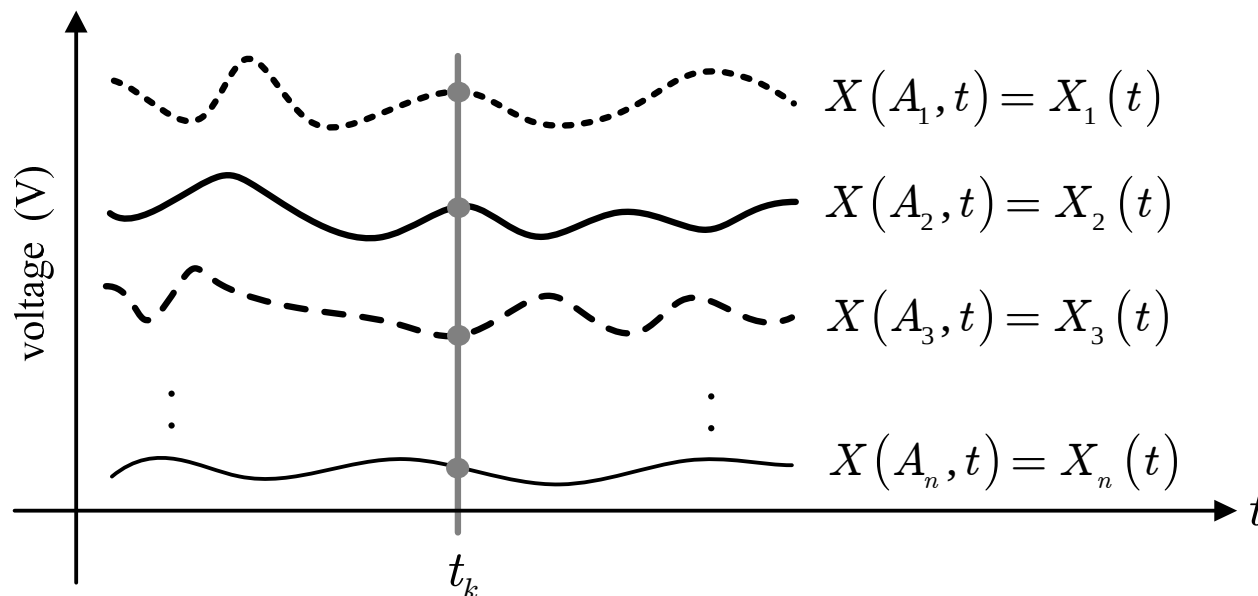
$$\begin{aligned}\Pr[Z \geq 2] &= 1 - \Pr[Z < 2] = 1 - \Pr[Z = 0] - \Pr[Z = 1] \\ &= 1 - \binom{20}{0} (0.03921)^0 (1 - 0.03921)^{20} - \binom{20}{1} (0.03921)^1 (1 - 0.03921)^{19} \\ &= 1 - (1)(1)(0.96079)^{20} - (20)(0.03921)(0.96079)^{19} = 0.184\end{aligned}$$



# กระบวนการสุ่ม



- ❑ กระบวนการสุ่ม (random process)  $X(A, t)$  พิจารณาได้ว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มสองตัวคือ ตัวแปรสุ่มของเหตุการณ์  $A$  และตัวแปรสุ่มของเวลา  $t$



$A_n$  = เหตุการณ์ในการเปิด  
เครื่องกำเนิดแรงดันไฟฟ้าครั้งที่  $n$

ใช้สัญลักษณ์  $X(t)$  แทน  
กระบวนการสุ่ม  $X(A, t)$

ถ้าพิจารณา  $A_j \Rightarrow X(A_j, t) = X_j(t)$  คือฟังก์ชันตัวอย่าง (sample function)

- เซตของฟังก์ชันตัวอย่างทั้งหมดเรียกว่าเอนเซมเบิล (ensemble)

ถ้าพิจารณา  $t_k \Rightarrow X(A, t_k)$  มีลักษณะเป็นตัวแปรสุ่ม  $X(t_k)$  ที่มีค่าขึ้นกับเหตุการณ์  $A$

ถ้าพิจารณา  $A = A_j$  และ  $t = t_k \Rightarrow X(A_j, t_k)$  คือตัวเลข (number)



# ค่าเฉลี่ยและฟังก์ชันอัตโนมัติ



□ ค่าเฉลี่ย (mean) ของกระบวนการสุ่ม  $X(t)$  ที่เวลา  $t = t_k$

$$m_X(t_k) = E[X(t_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{X_k}(x)dx$$

หมายเหตุ

กระบวนการสุ่ม 2 กระบวนการที่ต่างกัน  
อาจมีค่าเฉลี่ย ฟังก์ชันอัตโนมัติ  
และฟังก์ชันอัตโนมัติแปรปรวนร่วมเกี่ยว  
เหมือนกันได้

□ ฟังก์ชันอัตโนมัติ

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uvp_{X_1X_2}(u, v)dudv$$

□ อัตความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (auto-covariance)

$$C_X(t_1, t_2) = E[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}\{X(t_2) - m_X(t_2)\}] = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

□ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)C_X(t_2, t_2)}}$$



# Example



กำหนดให้กระบวนการสุ่ม  $X(t) = A \cos(2\pi t)$  โดยที่  $A$  เป็นตัวแปรสุ่ม จงหาค่าเฉลี่ย ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ และฟังก์ชันอัตความแปรปรวนร่วมเกี่ยว ของกระบวนการสุ่มนี้

วิธีทำ

$$\text{ค่าเฉลี่ย} \Rightarrow m_X(t) = E[A \cos(2\pi t)] = E[A] \cos(2\pi t)$$

ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[A \cos(2\pi t_1) A \cos(2\pi t_2)] = E[A^2] \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2)$$

ฟังก์ชันอัตความแปรปรวนร่วมเกี่ยว

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = \{E[A^2] - (E[A])^2\} \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2) \\ &= \sigma_A^2 \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2) \end{aligned}$$

สังเกตจะพบว่าค่าทั้งสามนี้เป็นฟังก์ชันของเวลา  $t$  เท่านั้น  $\Rightarrow$  **สเตชันนารี**



# สเตชันนารี



- สเตชันนารีแบบสตริกเซนส์ (SSS: strict-sense stationary)  $\Rightarrow$  ค่าทางสถิติทุกอันดับของกระบวนการสุ่ม **ไม่ขึ้นกับเวลา**
  - ในทางปฏิบัติระบบสื่อสารส่วนมาก **ไม่มี**คุณสมบัติสเตชันนารีแบบสตริกเซนส์
- สเตชันนารีแบบไวด์เซนส์ (WSS: wide-sense stationary)  $\Rightarrow$  ค่าทางสถิติเฉพาะ **อันดับที่หนึ่ง** และ **อันดับที่สอง** ของกระบวนการสุ่มนั้น **ไม่ขึ้นกับเวลา**

$$E[X(t)] = m_X(t) = m_X$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) = E[X(t + \tau)X(t)]$$

$\tau = t_1 - t_2$  คือผลต่างของเวลา

WSS  $\in$  SSS



# อัตสหสัมพันธ์ของกระบวนการสุ่ม WSS



- ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์จะใช้เป็นตัววัดความสุ่มของกระบวนการสุ่ม
  - เป็นฟังก์ชันของผลต่างของเวลา  $\tau = t_1 - t_2$  เท่านั้น
  - สำหรับกระบวนการสุ่ม WSS ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ ฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ยังบอกให้ทราบถึงผลตอบสนองเชิงความถี่ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการสุ่มด้วย

## Property

- 1)  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
- 2)  $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$  สำหรับทุกค่า  $\tau$
- 3)  $R_X(\tau) \Leftrightarrow G_X(f)$
- 4)  $R_X(0) = E[X^2(t)]$





# Example



เครื่องกำเนิดคลื่นรูปไซน์ผลิตสัญญาณรูปไซน์มีความถี่เท่ากับ  $f_0$  และแอมพลิจูดเท่ากับ  $A$  ตามสมการ  $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$  เมื่อ  $\phi$  คือตัวแปรสุ่มของมุมเฟสที่มีการแจกแจงเอกรูป (uniform distribution) ซึ่งมีค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ  $p_\phi(\phi) = 1/(2\pi)$  จงหาค่าเฉลี่ย  $m_X$  และฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์  $R_X(\tau)$  ของกระบวนการสุ่ม  $X(t)$

## วิธีทำ

ค่าเฉลี่ย  $m_X$  หาได้จาก

$$\begin{aligned} m_X &= E[X(t)] = E[A \cos(2\pi f_0 t + \phi)] = A \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi) p_\phi(\phi) d\phi \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi) d\phi = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \cos(2\pi f_0 t) \cos(\phi) - \sin(2\pi f_0 t) \sin(\phi) \} d\phi \\ &= \frac{A}{2\pi} \{ \cos(2\pi f_0 t) (0 - 0) + \sin(2\pi f_0 t) (1 - 1) \} = 0 \end{aligned}$$





ในทำนองเดียวกันฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์  $R_X(\tau)$  หาได้จาก

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] = E[A^2 \cos(2\pi f_0(t+\tau) + \phi) \cos(2\pi f_0 t + \phi)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0(2t + \tau) + \phi)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi f_0 \tau)] + \frac{A^2}{2} \underbrace{E[\cos(2\pi f_0(2t + \tau) + \phi)]}_{=0} = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า  $X(t)$  เป็นกระบวนการสุ่มแบบ WSS เพราะค่าเฉลี่ย  $m_X = 0$  ไม่ขึ้นกับเวลา และฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์  $R_X(\tau)$  ก็ขึ้นกับผลต่างของเวลา  $\tau$  เท่านั้น





# กระบวนการเออร์กอดิก



- ❑ การหาค่าเฉลี่ยและฟังก์ชันอัตโนมัติของกระบวนการสุ่มต้องอาศัย joint pdf อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง ซึ่งหาได้ยากในหลายๆ งานประยุกต์
- ❑ กระบวนการเออร์กอดิก (ergodic) มีคุณสมบัติเฉพาะคือ
  - ค่าเฉลี่ยทางเวลา = ค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิล
  - คุณสมบัติทางสถิติของกระบวนการสามารถถูกกำหนดได้ด้วยการหาค่าเฉลี่ยทางเวลาของฟังก์ชันตัวอย่าง (sample function) เพียงฟังก์ชันเดียว
- ❑ กระบวนการสุ่ม  $X(t)$  เป็น
  - เออร์กอดิกเชิงค่าเฉลี่ย ก็ต่อเมื่อ
  - เออร์กอดิกเชิงฟังก์ชันอัตโนมัติ ก็ต่อเมื่อ

$$m_X = \overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$$

$$R_X(\tau) = \overline{X(t+\tau)X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t+\tau)X(t) dt$$



# Example



เครื่องกำเนิดคลื่นรูปไซน์ผลิตสัญญาณรูปไซน์ ตามสมการ  $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$  เมื่อ  $A$  คือแอมพลิจูดของสัญญาณ,  $f_0$  คือความถี่, และ  $\phi$  คือตัวแปรสุ่มของมุมเฟสที่มีการแจกแจงเอกรูป จงหาค่าเฉลี่ยทางเวลาและฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ทางเวลาของกระบวนการสุ่ม  $X(t)$

วิธีทำ ค่าเฉลี่ยทางเวลาหาได้จาก

$$\overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = A \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt = 0$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ย  $m_X$  ในตัวอย่างที่ 3.11 และฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ทางเวลาหาได้จาก

$$\overline{X(t+\tau)X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t+\tau)X(t) dt$$





$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos(2\pi f_0(t + \tau) + \phi) \cos(2\pi f_0 t + \phi) dt \\
&= \frac{A^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ \cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0(2t + \tau) + \phi) \right\} dt \\
&= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) + \underbrace{\frac{A^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_0(2t + \tau) + \phi) dt}_{=0} \\
&= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์  $R_X(\tau)$  ในตัวอย่างก่อนหน้านี้ ดังนั้น  $X(t)$  เป็นกระบวนการสุ่มแบบ WSS และเป็นเออร์กอดิกเชิงค่าเฉลี่ยและเออร์กอดิกเชิงฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ด้วย



# ความหนาแน่นสเปกตรัมกำลัง

- โดยทั่วไปกระบวนการสุ่ม  $X(t)$  จะถูกสมมุติว่ามีอยู่จริงตลอดช่วงเวลา  $[-\infty, \infty]$  จึงทำให้หาผลการแปลงฟูเรียร์  $X(f)$  ไม่ได้
- ในทางปฏิบัติความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังของกระบวนการสุ่มจะนิยามโดยกำลังเฉลี่ยของกระบวนการสุ่มที่กระจายไปในแต่ละความถี่ และเพื่อให้กระบวนการสุ่ม  $X(t)$  สามารถหาผลการแปลงฟูเรียร์ได้
- ในที่นี้จะนิยามกระบวนการตัดปลาย (truncated process) ดังนี้

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

เพื่อรับประกันได้ว่ามีพลังงานจำกัด  $\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(t)|^2 dt < \infty$





□ ความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังของกระบวนการสุ่ม  $X(t)$  นิยามโดย

$$G_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[ |X_T(f)|^2 \right]$$

□  $G_X(f)$  มีค่าเท่ากับผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์  $R_X(\tau)$

$$G_X(f) = \mathcal{F}[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

□ **Property** 1)  $G_X(f) \geq 0$  และเป็นฟังก์ชันค่าจริง

$$2) \quad G_X(f) = G_X(-f)$$

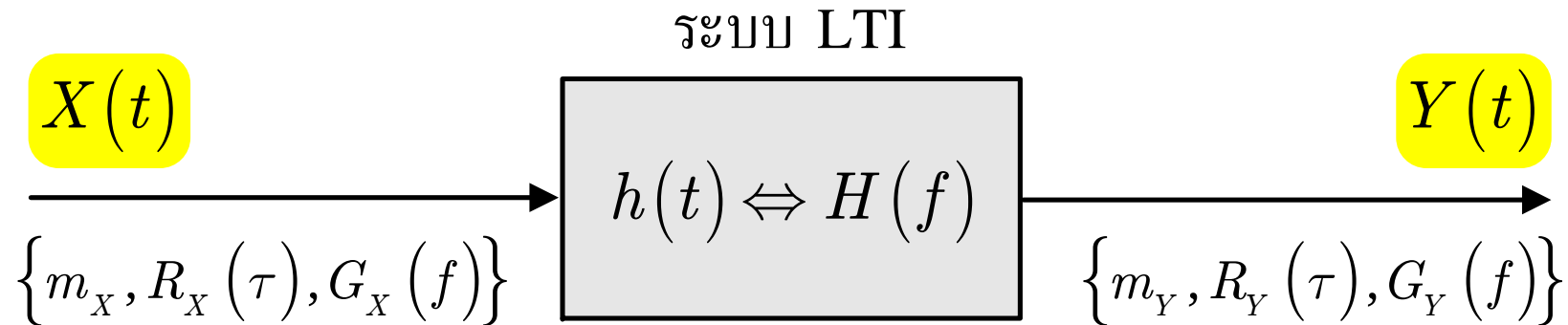
$$3) \quad G_X(f) \Leftrightarrow R_X(\tau)$$

$$4) \quad P_X = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f) df$$

(ดูตัวอย่างที่ 3.13 และ 3.14 ในหนังสือ)



# ความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการสุ่มและระบบ LTI



$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

$$m_Y = E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau) h(\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t - \tau)] h(\tau) d\tau$$

$$= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = m_X H(0)$$







$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t+\tau)Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t+\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\beta)h(\beta)d\beta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta) E[X(t+\tau-\alpha)X(t-\beta)] d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta) R_X(\tau-\alpha+\beta) d\alpha d\beta \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) R_X(\tau+\beta) d\alpha \right\} * h(\tau) = h(-\tau) * R_X(\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

$$G_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = H(f)H^*(f)G_X(f) = |H(f)|^2 G_X(f)$$





# สัญญาณรบกวนในระบบสื่อสาร



- สัญญาณรบกวนเป็นสิ่งที่ระบบไม่ต้องการ เพราะจะไปขัดขวางความสามารถของวงจรภาครับในการตรวจหาและถอดรหัสข้อมูล
- สัญญาณรบกวนสีขาว (white noise)
  - กระบวนการสุ่ม  $W(t)$  ที่ไม่มีสหสัมพันธ์กัน

$$R_W(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) = \begin{cases} N_0 / 2, & \tau = 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$G_W(f) = F[R_W(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_W(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{N_0}{2}$$





- สัญญาณรบกวนสีขาวมีผลกระทบต่อระบบสื่อสารในทุกแถบความถี่
  - กำลังของสัญญาณรบกวนมีค่าเป็นอนันต์
  - จึงเป็นเหตุผลว่าทำไมวงจรภาครับของจึงต้องใช้วงจรกรองผ่านต่ำ (low-pass filter) เพื่อให้กำลังของสัญญาณรบกวนมีค่าจำกัด

## □ สัญญาณรบกวนแบบสี (colored noise)

- สัญญาณรบกวนแบบสีคือกระบวนการสุ่ม  $V(t)$  ที่มีสหสัมพันธ์กัน

$$R_V(\tau) \neq 0, \text{ สำหรับ } \tau \neq 0$$

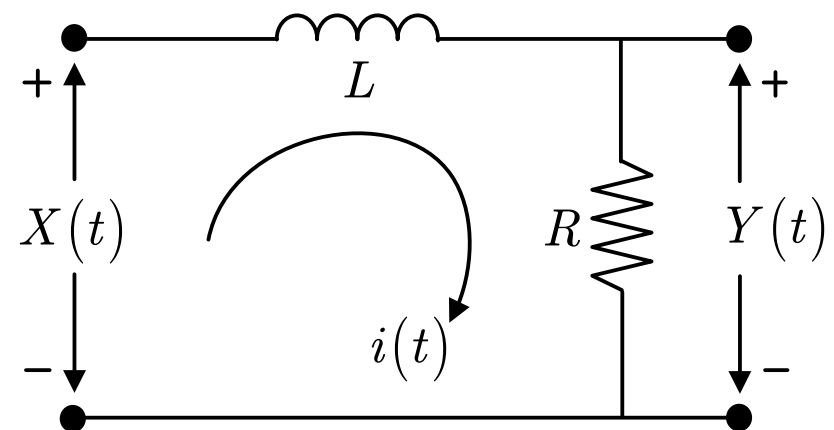


# Example



กำหนดให้  $X(t)$  คือกระบวนการสัญญาณรบกวนสีขาวแบบ WSS ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และความหนาแน่นสเปกตรัมกำลัง  $G_X(f) = N_0 / 2$  สำหรับทุกค่า  $f$  ภายในช่วง  $-W < f < W$  เมื่อ  $W$  คือแบนด์วิดท์ของ  $X(t)$  ถ้านำกระบวนการสุ่ม  $X(t)$  ไปผ่านวงจรกรองผ่านต่ำทำให้ได้เป็นกระบวนการสุ่ม  $Y(t)$

- ก) จงหาค่ากำลังทั้งหมดและฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ของ  $X(t)$
- ข) จงหาความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังและฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ของ  $Y(t)$
- ค) จงหาค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของ  $Y(t)$



# วิธีทำ

ก) กำลังทั้งหมดของ  $X(t)$  หาได้จาก  $P_X = \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} df = N_0 W$

และฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ของ  $X(t)$  หาได้โดย

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_X(f)] = \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = \frac{N_0}{2} \left( \frac{e^{j2\pi W\tau} - e^{-j2\pi W\tau}}{j2\pi\tau} \right) = \frac{N_0}{2} \frac{\sin(2\pi W\tau)}{\pi\tau}$$

ข) จากรูป ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองผ่านต่ำมีค่าเท่ากับ

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega L / R}$$

$$\text{เมื่อ } \omega = 2\pi f \text{ ซึ่งจะได้ } |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega L / R)^2}$$

$$\text{ดังนั้นความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังของ } Y(t) \text{ หาได้จาก } G_Y(f) = |H(f)|^2 G_X(f) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + (\omega L / R)^2}$$





ฟังก์ชันอัตโนมัติสหสัมพันธ์ของ  $Y(t)$  หาได้จาก  $R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_Y(f)] = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+(\omega L/R)^2}\right]$

อาศัยคู่การแปลงฟูเรียร์  $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}\right] = \exp(-a|t|)$  สำหรับ  $a > 0$  เพราะฉะนั้น

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{(R/L)^2}{(R/L)^2 + (2\pi f)^2}\right] = \frac{N_0}{2} \frac{R}{2L} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2(R/L)}{(R/L)^2 + (2\pi f)^2}\right] = \frac{N_0 R}{4L} \exp\left(-\frac{R}{L}|\tau|\right)$$

ค) ค่าเฉลี่ยของ  $Y(t)$  มีค่าเท่ากับ  $m_Y = m_X H(0) = 0 \times H(0) = 0$  และค่าความแปรปรวนของ  $Y(t)$  คือ

$$E[(Y(t) - m_Y)^2] = E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \frac{N_0 R}{4L}$$

\*\*\* END

